

# Großräumige Zirkulationsstrukturen in einem nichtlinearen adaptiven Atmosphärenmodell

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
in der Wissenschaftsdisziplin Physik der Atmosphäre

eingereicht an der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Potsdam

von  
Matthias Läuter

Stiftung Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung  
Forschungsstelle Potsdam, Telegrafenberg 43A, 14473 Potsdam

Potsdam, den 14. Februar 2004



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Atmosphärische Multiskalenprozesse</b>	<b>5</b>
2.1	Zeitlich und zonal gemittelter Grundzustand . . . . .	6
2.1.1	Die Hadley-Zirkulation in den Tropen . . . . .	7
2.1.2	Die Zonalströmung in den mittleren Breiten . . . . .	9
2.1.3	Die Zirkulation in den polaren Breiten . . . . .	9
2.2	Wellenphänomene in mittleren Breiten . . . . .	10
2.2.1	Synoptische Wellen . . . . .	10
2.2.2	Planetare Wellen . . . . .	11
2.2.3	Nichtlineare Skalenwechselwirkungen . . . . .	18
2.3	Planetare Wellen in einem Flachwassermodell . . . . .	19
2.3.1	Formulierung der Gleichungen . . . . .	19
2.3.2	Vereinfachung der Flachwassergleichungen . . . . .	21
2.3.3	Anregung planetarer Wellen . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Die sphärischen Flachwassergleichungen</b>	<b>24</b>
3.1	Vektorformulierung . . . . .	25
3.1.1	Die primitiven Gleichungen . . . . .	25
3.1.2	Orthogonale Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes . . . . .	27
3.1.3	Die sphärische Reskalierung . . . . .	28
3.1.4	Geostrophische Approximation . . . . .	31
3.2	Skalare Formulierung . . . . .	33
3.2.1	Der Advektionsterm . . . . .	34
3.2.2	Die Terme für Geopotenzial und Corioliskraft . . . . .	37
3.2.3	Das Gleichungssystem . . . . .	40
3.3	Transformation auf die unnormierte Sphäre . . . . .	41
3.4	Erhaltungseigenschaften der Gleichungen . . . . .	42
3.4.1	Definition der diagnostischen Größen . . . . .	43
3.4.2	Globale und lokale Erhaltungseigenschaften . . . . .	44
3.5	Analytische Lösungen . . . . .	47
3.5.1	Wechsel des Koordinatensystems . . . . .	47
3.5.2	Stationäre Lösungen . . . . .	49

3.5.3	Instationäre Lösungen . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Das numerische Verfahren</b>	<b>73</b>
4.1	Künstliche Diffusion . . . . .	74
4.2	Die Lagrange-Galerkin-Methode . . . . .	74
4.2.1	Die schwache Formulierung . . . . .	75
4.2.2	Die Finite-Elemente-Methode . . . . .	77
4.2.3	Die Semi-Lagrange-Methode . . . . .	79
4.2.4	Die Trajektorienberechnung . . . . .	82
4.2.5	Die endlichdimensionale Formulierung . . . . .	86
4.2.6	Quadraturformeln . . . . .	87
4.2.7	Die Berechnung der Matrizen . . . . .	88
4.2.8	Der Algorithmus . . . . .	91
4.3	Adaptivität . . . . .	92
4.3.1	Das Polyeder $S_h$ . . . . .	93
4.3.2	Der Diskretisierungsfehler . . . . .	95
4.3.3	Der adaptive Algorithmus . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Simulationsergebnisse</b>	<b>100</b>
5.1	Das idealisierte Atmosphärenmodell . . . . .	101
5.1.1	Die Programmstruktur des Atmosphärenmodells . . . . .	101
5.1.2	Gittergenerator und parallele Löserchnittstelle . . . . .	101
5.1.3	Numerische Stabilität des Atmosphärenmodells . . . . .	102
5.2	Konvergenz des numerischen Verfahrens . . . . .	103
5.2.1	Der numerische Fehler . . . . .	104
5.2.2	Stationäre Lösungen . . . . .	105
5.2.3	Instationäre Lösungen . . . . .	109
5.2.4	Zusammenfassung der Konvergenzuntersuchungen . . . . .	111
5.3	Rosbywellen im globalen Modell . . . . .	111
5.3.1	Die Randbedingungen . . . . .	112
5.3.2	20-Tage-Simulation, statisch . . . . .	112
5.3.3	20-Tage-Simulation, adaptiv . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Ausblick</b>	<b>118</b>
<b>A</b>	<b>Funktionenräume</b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Tangentiale Differenzialoperatoren</b>	<b>121</b>
<b>C</b>	<b>Die Helmholtz-Zerlegung</b>	<b>124</b>
<b>D</b>	<b>Naturkonstanten</b>	<b>126</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>127</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### Atmosphäre und Klima

Die Atmosphäre, als ein Teil des Lebensraumes von Mensch und Natur, ist von grundlegender Bedeutung für die Entwicklung des Lebens auf der Erde. Vor dem Hintergrund extremer Wetter- und Klimaanomalien in den letzten Jahren und Jahrzehnten wurde immer stärker die Notwendigkeit erkannt, die grundlegenden Mechanismen von Klimaschwankungen im System Atmosphäre beschreiben zu können. Die verbesserte Kenntnis von Ursachen der Klimaentwicklung ermöglicht eine verbesserte Vorhersage von zukünftigen Klimaänderungen, insbesondere die Einschätzung der Bedeutung menschlichen Handelns auf das System Atmosphäre.

Die Vorhersage des Wetters ist aufgrund der chaotischen Dynamik und der ungenauen Kenntnisse der Randbedingungen und des Anfangszustandes nur für wenige Tage zuverlässig möglich, siehe [Lor63]. Deshalb interessieren wir uns für die Vorhersage des zeitlich gemittelten Atmosphärenzustandes, des Klimas. Eine Vorhersage des Klimas auf der Grundlage von Szenariensimulationen ermöglicht damit zeitgemittelte Aussagen für die atmosphärischen Zustandsgrößen in Abhängigkeit von den angenommenen Randbedingungen und Anfangszuständen.

Anhand von paläoklimatologischen Daten wurden Klimaschwankungen der Vergangenheit analysiert, siehe [H<sup>+</sup>01]. Zwar konnten Ursachen und Mechanismen für diese Klimaschwankungen gefunden werden, doch ist insbesondere die quantitative Beschreibung des Einflusses der internen und externen Antriebsfaktoren auf die Atmosphäre bislang nicht zufriedenstellend gelungen, siehe [H<sup>+</sup>01] und [Det93]. Verbesserte Kenntnisse über die Wichtung der verschiedenen Antriebsfaktoren sind deshalb für die Verbesserung der Interpretation von Szenariensimulationen von grundlegender Bedeutung.

### Planetare Wellen und Multiskalenprozesse

Schwankungen des atmosphärischen Zustandes treten in einem breiten räumlichen und zeitlichen Spektrum auf. Sie reichen von synoptischen Wettererscheinungen mit der Zeitskala von Tagen bis Wochen bis zu planetaren Wellenphänomenen mit der Zeitskala von Wochen bis Monaten. Da die großräumigen planetaren Wellen eine geringere

zeitliche Variabilität als die synoptischskaligen Wellen aufweisen, werden diese für die Beschreibung des klimatologischen Zustandes der Atmosphäre herangezogen.

Wir unterscheiden externe und interne Antriebsfaktoren, die die zeitliche Entwicklung der planetaren Wellen beeinflussen. Unter den externen Antriebsfaktoren verstehen wir die von außen auf das System Atmosphäre wirkenden Randbedingungen, wie z. B. die räumliche Verteilung der Orografie, die solare Einstrahlung, die Aerosolbelastung oder die  $\text{CO}_2$ -Konzentration. Die internen Antriebsfaktoren sind die dynamischen und physikalischen Atmosphären-Multiskalenprozesse, die durch Impuls- und Energieflüsse, z. B. in der nichtlinearen Energiekaskade, nichtlineare Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen räumlichen und zeitlichen Wellenskalen hervorrufen.

Zuverlässige Klimaszenariensimulationen basieren damit auf der wirklichkeitsnahen Modellierung der externen Antriebsfaktoren einerseits und der internen atmosphärischen Multiskalenprozesse andererseits.

## Physikalische Modellbildung

Für die qualitative und quantitative Beschreibung des realen atmosphärischen Zustandes approximieren wir das natürliche System Atmosphäre im Prozess der Modellbildung durch ein physikalisches System. Die Zustandsgrößen des physikalischen Systems sind die meteorologischen Größen, wie z. B. die Windgeschwindigkeit, der Druck oder die Temperatur. Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten in der Form von Differenzialgleichungen, wie z. B. die Impuls- oder Energiebilanz, werden auf der Grundlage von beobachteten atmosphärischen Prozessen bestimmt.

Da die primitiven Gleichungen für die Atmosphäre ein komplexes System nichtlinearer partieller Differenzialgleichungen darstellen, besteht die allgemeine Vorgehensweise der numerischen Lösung dieser Gleichungen in der Anwendung einer Hierarchie von Computermodellen verschiedener Komplexität. Diese beginnt mit einfachen nulldimensionalen Energiebilanz-Modellen und führt hin bis zu dreidimensionalen allgemeinen Zirkulationsmodellen mit komplexer Modellphysik, siehe [BH03], [Sal78].

Die Wirkung sowohl externer Antriebsfaktoren, z. B. der orografischen Anregung, wie auch interner Multiskalenprozesse, z. B. durch die Wechselwirkung von planetaren und transienten synoptischen Wellen, auf planetare Wellen kann physikalisch modelliert werden, siehe Kapitel 2. Dies gelingt nicht nur innerhalb des physikalischen Systems der dreidimensionalen primitiven Gleichungen der Atmosphäre, vorgestellt in Abschnitt 2.2, sondern auch mit dem physikalisch vereinfachten System der zweidimensionalen barotropen Flachwassergleichungen in Abschnitt 2.3.

Damit sind die im Vergleich zu den primitiven Gleichungen weniger komplexen sphärischen Flachwassergleichungen in Kapitel 3 eine geeignete Wahl für die physikalische Modellierung von externen Antriebsfaktoren und atmosphärischen Multiskalenprozessen. Wir geben in Abschnitt 3.1 eine neue Herleitung der Flachwassergleichungen auf der Sphäre nach [Côt88] an. In dieser Herleitung übertragen wir die von [AG01] für den ebenen Fall vorgeschlagene Reskalierung der vertikalen Bewegungskomponente auf den gekrümmten sphärischen Fall. Als Verallgemeinerung der aus der Literatur bekannt-

ten und z. B. in [WDH<sup>+</sup>92] beschriebenen stationären Lösungen geben wir in Abschnitt 3.5.3 instationäre analytische Lösungen der sphärischen Flachwassergleichungen an.

## Numerische Modellbildung

Das physikalische System der sphärischen Flachwassergleichungen bildet in der vorliegenden Arbeit die Grundlage für die numerische Modellbildung, die im Aufbau eines computerbasierten idealisierten Atmosphärenmodells besteht.

Als ersten Schritt der numerischen Modellbildung stellen wir in Kapitel 4 das numerische Verfahren vor. Zur Diskretisierung verwenden wir die Lagrange-Galerkin-Methode, die z. B. in [Pir82] und [Sül88] auf Navier-Stokes-Gleichungen angewendet wurde und eine Kombination der Finite-Elemente-Methode für die Ortsdiskretisierung und der Semi-Lagrange-Methode für die Zeitdiskretisierung darstellt. Für die Finite-Elemente-Methode in Abschnitt 4.2.2 approximieren wir wie in [Dzi88] neben den Funktionenräumen der schwachen Formulierung durch endlichdimensionale Ansatzräume auch das Modellgebiet, die gekrümmte Sphäre, durch geeignete Polyeder. Um die Semi-Lagrange-Methode, die für den ebenen Fall aus der Literatur, z. B. in [Pir89] und [QV97], gut bekannt ist, auf der gekrümmten Sphäre  $S$  nutzen zu können, wenden wir die ebene Semi-Lagrange-Methode in Abschnitt 4.2.4 in lokalen Koordinatensystemen von  $S$  an.

Die Zielstellung der verbesserten Modellierung von Multiskalenprozessen erfordert eine möglichst hohe räumliche Auflösung dieser Prozesse. Betrachtet man in einem globalen Modell die gesamte Erde, so beschränken aber die rechentechnischen Möglichkeiten und die skalenabhängigen Parametrisierungen die räumliche Auflösung, siehe [CSH95]. Sollen höhere räumliche Auflösungen erzielt werden, kann man z. B. einen Teil der Erde als Modellgebiet in einem Regionalmodell betrachten und Daten eines globalen Modells als Randantrieb nutzen, siehe z. B. [DRL<sup>+</sup>96] und [LCFP03]. Mit dieser Regionalisierungsmethode des dynamischen „Downscalings“ können Multiskalenprozesse nur gerichtet von der planetaren Zirkulation zu regionalen Phänomenen modelliert werden. Die Modellierung von zweiseitigen Rückkopplungen auch hin zur planetaren Zirkulation ist mit einem Regionalmodell bislang nicht gelungen.

Ein vielversprechender Lösungsansatz für die Modellierung von Skalenwechselwirkungen auch in Richtung der planetaren Zirkulation ist die Nutzung von adaptiven Gittertechniken. Während in der mathematischen Literatur die adaptiven Gittertechniken seit den 1970er Jahren ein Forschungsthema sind und seit Mitte der 1980er Jahre sogar für die kommerzielle Forschung eingesetzt werden, siehe [BR78], [Pir89], [Ver96], haben sich adaptive Techniken in der Atmosphärenmodellierung bislang nicht durchgesetzt. Es gibt einzelne globale Atmosphärenmodelle mit einem zeitlich statischen und räumlich adaptiven Gitter, siehe [CRS<sup>+</sup>93], [CGM<sup>+</sup>98], [CDG<sup>+</sup>98] und [BG04], und auch Vorarbeiten mit Regionalmodellen, in denen zeitlich veränderliche adaptive Gitter verwendet werden, siehe [BAB<sup>+</sup>00], [BDHR00]. Die Zielstellung in der vorliegenden Arbeit ist die Beschreibung eines idealisierten globalen Atmosphärenmodells mit zeitlich veränderlichem und räumlich adaptivem Gitter.

Zur Gitteradaption nutzen wir die in Abschnitt 4.3 beschriebene und von [Bän93] vorgeschlagene Methode der Bisektion von Dreiecksgittern. Damit formulieren wir die adaptive Lagrange-Galerkin-Methode, mit der im globalen Atmosphärenmodell auf der Grundlage eines physikalischen Fehlerschätzers die räumliche Auflösung des Modellgitters zeitlich verändert werden kann.

Als zweiten Schritt der numerischen Modellbildung stellen wir in Abschnitt 5.1, das auf der adaptiven Lagrange-Galerkin-Methode aus Kapitel 4 basierende, adaptive idealisierte Atmosphärenmodell vor, siehe [LHD<sup>+</sup>03], [Läu03] und [RFH<sup>+</sup>03]. Das Atmosphärenmodell nutzt zur Gittergenerierung den Gittergenerator `amatos`, siehe [BRH<sup>+</sup>04]. Die großen linearen, dünn besetzten Gleichungssysteme werden mit Hilfe der parallelen Löserschnittstelle FoSSI gelöst, siehe [FHB04].

## Validierung

Aus der Literatur sind uns für die sphärischen Flachwassergleichungen bzw. das vorgestellte numerische Verfahren keine Existenz-, Eindeutigkeits- oder Konvergenzbeweise bekannt. Um zu überprüfen, ob das numerische Verfahren wirklich eine Approximation der kontinuierlichen Flachwassergleichungen darstellt, validieren wir daher in Kapitel 5 das idealisierte Atmosphärenmodell.

Die Validierung erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt in Abschnitt 5.2 können wir anhand von Beispielen zeigen, dass die numerischen Lösungen des Atmosphärenmodells die analytischen Lösungen der Flachwassergleichungen approximieren. Im Fall des isolierten zonalen Strahlstromes, der auf der geografischen Breite um 30° Nord lokalisiert ist, können wir zeigen, dass zur Verringerung des numerischen Fehlers die Erhöhung der Gitterauflösung nur in diesen Breiten genügt. Erstmals konnten für die sphärischen Flachwassergleichungen numerische Lösungen dargestellt werden, die eine analytische instationäre Lösung aus Abschnitt 3.5.3 numerisch approximieren.

Der zweite Schritt basiert auf dem in Abschnitt 2.3 beschriebenen orografischen Anregungsmechanismus planetarer Wellen. Die Modellierung dieses Mechanismus gelingt in Abschnitt 5.3 mit Hilfe von Simulationsergebnissen des Atmosphärenmodells. Die Vergleichssimulation mit einem zeitlich veränderlichen adaptiven Gitter zeigt, dass qualitativ die Ergebnisse der Simulation mit uniformem Gitter reproduziert werden können. Dabei kann regional durch die Gitteradaptivität die räumliche Auflösung des uniformen Gitters bei gleichbleibendem Rechenaufwand übertroffen werden.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass mit dem vorliegenden adaptiven idealisierten Atmosphärenmodell auf der Grundlage der sphärischen barotropen Flachwassergleichungen die Modellierung von atmosphärischen Multiskalenprozessen möglich ist. Mit diesem adaptiven Modellierungsansatz können Beiträge zur Überwindung von Modellgrenzen regionaler und globaler Atmosphärenmodelle geleistet werden.



# Kapitel 2

## Atmosphärische Multiskalenprozesse

Atmosphärische Bewegungsvorgänge treten in einem breiten räumlichen und zeitlichen Spektrum auf. Klimaänderungen sind insbesondere mit den großskaligen atmosphärischen Wellenstrukturen verknüpft, da diese durch ihre Wechselwirkung mit den kürzeren synoptischen Wellenskalen das Klimageschehen auf der Erde wesentlich bestimmen.

Wollen wir die atmosphärischen Wellen genauer beschreiben, gehen wir von dem zeitlich und zonal gemittelten Grundzustand der Atmosphäre aus. Dieser gemittelte Grundzustand wird vom meridionalen Energiegradienten hervorgerufen, der durch die meridional abhängige Strahlungsbilanz der Atmosphäre hervorgerufen wird. Daraus resultiert ein großräumiger meridionaler Energietransport von den Tropen in die hohen Breiten. In den Tropen führt dies zur direkten Hadley-Zirkulation, in den mittleren Breiten aufgrund der Corioliskraft zur Zonalströmung und in den hohen Breiten zur Zirkulation in den polaren Breiten. Die Abweichungen des momentanen Atmosphärenzustandes vom gemittelten Grundzustand können wir als Überlagerung von zonalen Wellen verschiedener räumlicher Skalen interpretieren. Diese Skalen reichen vom synoptischen Wellenbereich (1000 km – 5000 km) mit der Zeitskala von Tagen bis zu Wochen bis zu den großskaligen planetaren Wellenphänomenen (>5000 km) mit der Zeitskala von Wochen bis zu Monaten.

Die interne Dynamik der Atmosphärenbewegungen in den mittleren Breiten können wir als Wechselwirkungsprozesse zwischen den räumlichen Wellenskalen interpretieren. Die Kenntnis dieser Multiskalenprozesse ist daher für die Vorhersage der zeitlichen Entwicklung der besonders klimarelevanten planetaren Wellen von grundlegender Bedeutung. Wesentliche Multiskalenwechselwirkungen können wir, in diesen durch die Zonalströmung dominierten Breiten, bereits in einem vereinfachten barotropen Flachwassersmodell der Atmosphäre modellieren. Für die erste qualitative Analyse dieser Wechselwirkungen innerhalb der Flachwassergleichungen betrachten wir die orografische und thermische Anregung von planetaren Rossbywellen in einem Kanalmodell der mittleren Breiten.

Nachdem wir mit Hilfe der Flachwassergleichungen atmosphärische Multiskalenpro-

zesse qualitativ beschreiben können, ist unser nächster Schritt der Modellierung in den Kapiteln 3 – 5 die numerische Lösung der sphärischen Flachwassergleichungen in einem globalen Modell der Atmosphäre. Mit diesem idealisierten Atmosphärenmodell können wir auch quantitative Aussagen über atmosphärische Multiskalenprozesse machen.

## 2.1 Zeitlich und zonal gemittelter Grundzustand

Zur Charakterisierung der globalen atmosphärischen Bewegungsvorgänge betrachten wir im Folgenden den zeitlich und zonal gemittelten Grundzustand der Atmosphäre. Dabei interessieren wir uns nicht für die einzelnen zeitlich begrenzten Wetterphänomene, wie z. B. kleine Zyklonen oder Gewitterstrukturen, sondern für die zonal gemittelte allgemeine Zirkulationsstruktur der Atmosphäre mit zonalen und meridionalen Komponenten. Den gemittelten Grundzustand können wir damit auch als die zonal gemittelte Dynamik des Klimas interpretieren, genauer als die zeitlich und zonal gemittelten Werte der beobachteten meteorologischen Größen, wie z. B. Windgeschwindigkeit, Temperatur oder Druck. Die zeitliche Mittelung muss dabei einerseits lang genug sein, um einzelne Wetterphänomene herauszumitteln, andererseits so kurz sein, dass monatliche, saisonale oder jährliche Schwankungen noch erkennbar sind. In diesem Sinne können wir den gemittelten Grundzustand als die zonal gemittelte allgemeine atmosphärische Zirkulation nach [Et196] und [Hol92] interpretieren.

Die Ursache für die Bewegungsvorgänge in der Atmosphäre sind Quellen und Senken der Energie, also Energiegradienten, die für die Umwandlung in die kinetische Energie der Bewegungen zur Verfügung stehen. Auf der Erde werden die Quellen und Senken von Energie durch die Strahlungsbilanz an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre hervorgerufen. Die Strahlungsbilanz besteht zum einen aus der einfallenden kurzwelligigen Sonnenstrahlung. Zum anderen strahlen die Erdoberfläche und die Atmosphäre langwellige Strahlung ab. Der Wert der Strahlungsbilanz hängt wegen der Kugelgestalt der Erde und damit regional verschiedener kurzwelliger Einstrahlung hauptsächlich von der geografischen Breite ab. Andere Faktoren sind die Oberflächenalbedo oder die Wärmekapazität der Erdoberfläche. Daraus resultiert eine vornehmlich breitenabhängige Verteilung von Energiequellen und -senken.

Für eine genauere Betrachtung seien  $E_k$  die zeitlich gemittelte Energie, die durch kurzwellige einfallende Strahlung an der Erdoberfläche, in der Atmosphäre und im Ozean absorbiert wird, und  $E_l$  die zeitlich gemittelte Energie, die durch langwellige Strahlung von der Erde in den Weltraum abgestrahlt wird. Um die Breitenabhängigkeit dieser Größen zu erkennen, betrachten wir dazu die zonal gemittelten Werte

$$[E_k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_k d\lambda, \quad [E_l] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_l d\lambda.$$

In Abbildung 2.1 ist schematisch zu erkennen, dass durch die Kugelgestalt der Erde die absorbierte Energie  $[E_k]$  am Äquator ihr Maximum hat und zu den Polen hin

abnimmt. Da mit  $[E_k]$  die Temperatur  $T$  der Oberfläche, der Atmosphäre und des Ozeans zunimmt und die Abstrahlung der Erde als schwarzer Strahler nach dem Stefan-Boltzmann Gesetz ( $[E_l] \sim \sigma T^4$ ) monoton von  $T$  abhängt, hat auch die abgestrahlte Energie  $[E_l]$  in niederen Breiten ihr Maximum. Wir erkennen weiterhin, dass in niederen Breiten die Strahlungsbilanz  $[E_k] - [E_l]$  positiv und in hohen Breiten negativ ist. Durch die Strahlungsbilanz wird also ein Energiegradient verursacht, der die Triebkraft für den gemittelten Grundzustand der Atmosphäre ist.

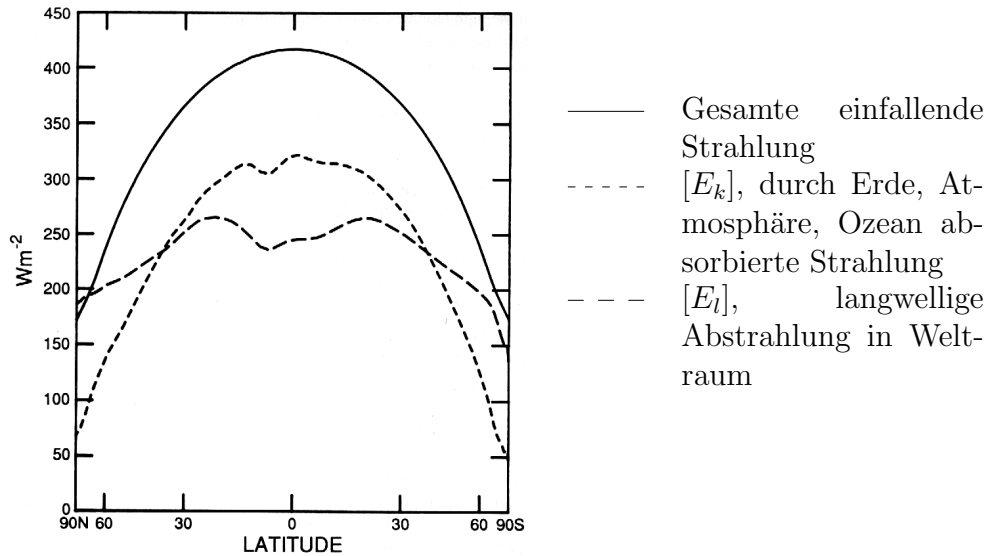


Abbildung 2.1: Strahlungsbilanz der Atmosphäre, zonales und jährliches Mittel, Darstellung aus [Gro93, S. 47]

### 2.1.1 Die Hadley-Zirkulation in den Tropen

Welche Auswirkungen hat der meridionale Energiegradient auf den gemittelten Grundzustand der Atmosphäre?

Wir betrachten dazu die zonal gemittelte Atmosphäre und darin die meridionale und vertikale Verteilung von Temperatur  $T$  und Druck  $p$ . Als Startzustand nehmen wir an, dass die Felder keine meridionalen Gradienten haben und vertikal eine stabile Schichtung vorhanden ist, siehe Abbildung 2.2(a). Wir setzen einen bekannten vertikalen Temperaturverlauf voraus, an dieser Stelle vereinfachend einen linearen Temperaturverlauf

$$T(z) = T_0 - \gamma z$$

mit dem vertikalen Temperaturgradienten  $\gamma$ .

Wird die Atmosphäre nun gemäß des meridionalen Energiegradienten diabatisch erwärmt bzw. gekühlt, so kommt es in niederen Breiten zu einer Erwärmung und in höheren Breiten zu einer Abkühlung der Atmosphäre. Die Auswirkung auf den Druck

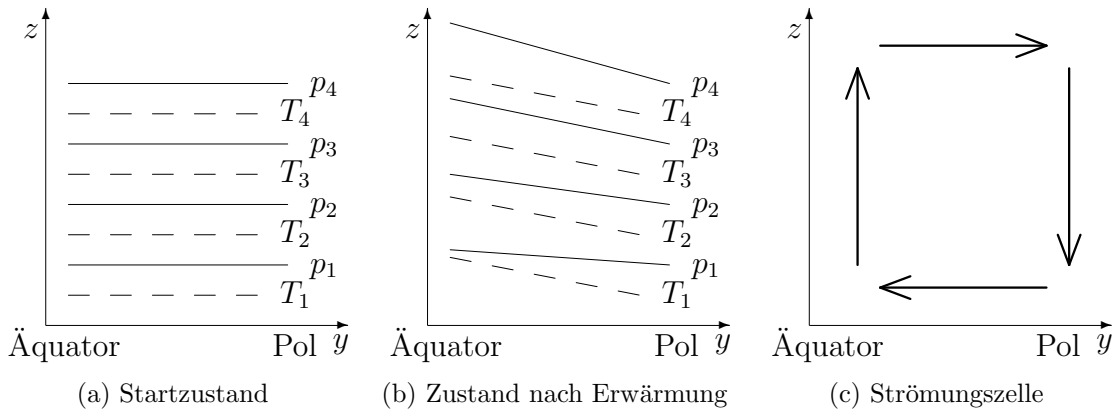


Abbildung 2.2: Hadley-Zirkulation, schematisch

ermitteln wir in der hydrostatischen Atmosphäre mit der idealen Gasgleichung und der hydrostatischen Grundgleichung

$$p = \rho R T, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -g \rho.$$

Damit folgt für den Druckverlauf

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{1}{T(z)} dz$$

und mit dem als linear angenommenen vertikalen Temperaturverlauf  $T(z)$

$$p(z) = p_0 \left( 1 - \frac{\gamma}{T_0} z \right)^{\frac{g}{R\gamma}}.$$

Steigt in niederen Breiten die Temperatur  $T$  der gesamten Luftsäule, steigt also  $T_0$ , und sinkt umgekehrt  $T$  in hohen Breiten ab, dann steigt der meridionale Druckgradient mit der Höhe an, siehe Abbildung 2.2(b). Dem Druckgradienten folgend entsteht in höheren Schichten eine Strömung von niederen zu hohen Breiten. Als Ausgleichsströmungen folgen damit aus dieser meridionalen Massenverschiebung wegen der Kontinuitätsgleichung in Bodennähe eine Nord-Süd Strömung und in den Luftsäulen am Rand der Zirkulation ein vertikaler Massenaustausch. Es bildet sich eine direkte Zirkulationszelle in der Meridionalebene, siehe Abbildung 2.2(c).

Bislang haben wir die Zirkulationszelle nur als meridionale Strömung beschrieben. Wegen der Corioliskraft, die Luftteilchen auf der Nordhalbkugel nach rechts ablenkt, wird durch die Meridionalzirkulation eine zonale Geschwindigkeitskomponente induziert. Mit zunehmender geografischer Breite wird diese geostrophische Zonalkomponente immer stärker.

Die direkte Zirkulation in den Tropen, tritt in der realen Atmosphäre jahreszeitlich veränderlich zwischen dem Äquator und dem 30. Breitengrad auf und wird auch als

Hadley-Zirkulation bezeichnet. Durch die Hadley-Zirkulation wird ein direkter meridionaler Energieaustausch realisiert. In Bodennähe äußert sich diese Zirkulationszelle durch gleichmäßige Nord/Ostwinde (Passatwinde) in niederen Breiten.

### 2.1.2 Die Zonalströmung in den mittleren Breiten

In den mittleren Breiten von  $30^\circ$  bis  $60^\circ$  schließt sich in der Troposphäre als zeitlich und zonal Mittel eine Zone der allgemeinen Westwindströmung an.

Die durch den meridionalen Energiegradienten angetriebene direkte Hadley-Zirkulation aus Abschnitt 2.1.1 wird in den mittleren Breiten durch eine indirekte Zirkulationszelle fortgesetzt, siehe [DS82], [DRH<sup>+</sup>03]. In diesen Breiten wird der Grundstrom baroklin instabil und verursacht dadurch großräumige Wirbelstrukturen (Eddies) und in deren Folge transiente synoptische Zyklonen. Mit diesen Wirbelstrukturen sind großräumige Impuls- und Wärmeflüsse verbunden. Der Meridionalanteil der zeitlich gemittelten Impuls- und Wärmeflüsse realisiert den meridionalen Ausgleich des globalen Energiegradienten. Dagegen verursacht der Zonalanteil der gemittelten Flüsse im zeitlichen Mittel eine Westwindströmung, siehe [DS82]. Da die vertikale Ausdehnung der obigen Wirbelstrukturen die gesamte Höhe der Troposphäre umfasst, reicht die Westwindströmung der mittleren Breiten von der Erdoberfläche bis in die obere Troposphäre.

Die mittlere Windgeschwindigkeit der Zonalströmung steigt mit der Höhe an und hat ihr Maximum in der oberen Troposphäre in den Strahlströmen. Unterhalb dieser Windmaxima treten die stärksten meridionalen Temperaturgradienten auf, was wir wegen der thermischen Windbeziehung nach [Etl96] auch erwarten. Die Strahlströme liegen im Winter bei  $30^\circ$  mit einer maximalen Geschwindigkeit von 40m/s und im Sommer bei  $40^\circ - 45^\circ$  mit einer maximalen Geschwindigkeit von 20m/s, siehe [Gro93].

### 2.1.3 Die Zirkulation in den polaren Breiten

In den polaren Breiten  $> 60^\circ$  schließt sich in der Troposphäre an die Zonalströmung der mittleren Breiten die Zirkulation der polaren Breiten an.

Die zeitlich und zonal gemittelte Zirkulation der polaren Breiten wird analog zu Abschnitt 2.1.1 durch die meridionale Abhängigkeit der diabatischen Wärmequellen und die Corioliskraft hervorgerufen. Die starke diabatische Abkühlung an den Polen, analog zur diabatischen Erwärmung am Äquator in Abschnitt 2.1.1, erzeugt ein bodennahes thermisches Hochdruckgebiet, das unter einem Tiefdruckgebiet in der oberen Troposphäre liegt. Dadurch zeigt in der unteren Troposphäre der meridionale Druckgradient in Polrichtung und in der oberen Troposphäre in Äquatorrichtung.

Als Ergebnis erhalten wir in der unteren Troposphäre eine schwache Ostwindströmung und in der oberen Troposphäre eine polare Westwindströmung.

## 2.2 Wellenphänomene in mittleren Breiten

In Abschnitt 2.1 haben wir den zeitlich und zonal gemittelten Grundzustand der Atmosphäre kennengelernt, der die großräumige Zirkulationsstruktur der Atmosphäre beschreibt. In den mittleren Breiten besteht der gemittelte Grundzustand in einer geostrophischen Grundströmung, einer Zonalströmung, siehe Abschnitt 2.1.2. Wir wollen nun die Struktur der Strömung in den mittleren Breiten genauer beschreiben.

Dazu betrachten wir den momentanen Zustand der Atmosphäre. Dieser besteht aus dem gemittelten Grundzustand und den zonalen und meridionalen Abweichungen davon. Wir interpretieren diese Abweichungen vom Grundzustand als zonale atmosphärische Wellenphänomene mit verschiedenen zonalen Wellenlängen. Die kurzen Wellen haben Wellenlängen von unter 1000 km, die synoptischen Wellen Wellenlängen von 1000 km bis 5000 km und die planetaren Wellen Wellenlängen von über 5000 km.

Die synoptischen Wellen treten im Wesentlichen durch Zyklonen und Antizyklonen in Erscheinung. Diese Wettererscheinungen sind am Boden als Hoch- und Tiefdruckgebiete zu beobachten. Die planetaren Wellen, die auch Rossbywellen genannt werden, sind als Wetterphänomene nicht so eindrücklich wahrnehmbar. Dazu sind die Wellenlängen zu groß und die Ausbreitungsgeschwindigkeiten zu klein. Trotzdem haben gerade die planetaren Rossbywellen eine besondere Bedeutung für die Beschreibung atmosphärischer Prozesse und für die Klimaentwicklung. Diese Bedeutung rührt zum einen daher, dass die großräumige Verformung des Grundstromes die kürzeren Wellen (z. B. Zyklonenlaufbahnen) wesentlich beeinflusst und damit indirekt Einfluss auf das Wettergeschehen am Boden hat. Zum anderen sind stationäre Rossbywellen langlebige Wellenstrukturen (Wochen oder länger) und können damit der Charakterisierung des zeitgemittelten klimatischen Zustandes der Atmosphäre dienen.

Planetare Wellen können sowohl durch externe Prozesse, z. B. durch orografische oder thermische Anregung, als auch durch interne atmosphärische Prozesse, z. B. Anregung durch transiente synoptische Zyklonen, hervorgerufen werden. Synoptische Wellen werden aber umgekehrt auch durch planetare Wellen beeinflusst. So können z. B. planetare Wellen die Lage von bevorzugten Zyklonenentstehungsgebieten verschieben. Damit ist die Frage nach den Ursachen und Mechanismen der Entstehung von planetaren Rossbywellen grundlegend mit den nichtlinearen Wechselwirkungsprozessen zwischen den verschiedenen räumlichen Wellenskalen verbunden.

In den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 beschreiben wir die Entstehungsmechanismen von synoptischen und planetaren Wellen. Anschließend in Abschnitt 2.2.3 gehen wir genauer auf den nichtlinearen dynamischen Charakter dieser Mechanismen ein.

### 2.2.1 Synoptische Wellen

Als synoptische Wellen bezeichnen wir die synoptischen Zyklonen und Antizyklonen, interpretiert als Wellenphänomene, die dem zonalsymmetrischen Grundstrom überlagert sind. Zyklonen sind ein transientes, also zeitlich veränderliches Phänomen, das sich aus Instabilitäten des Grundstromes entwickelt. Sie haben eine räumliche Ausdehnung von

1000 km bis 5000 km und eine Lebensdauer von Tagen. Nach Abgabe ihrer Energie an die Umgebung lösen sich die synoptischen Zyklonen wieder auf.

Die Zyklonenentstehung wird vor allem auf barokline Instabilitäten zurückgeführt, siehe [Etl96], [Hol92], [Gro93]. Das bedeutet, dass kleine Störungen des Ausgangszustandes der Atmosphäre nicht gedämpft werden, sondern durch die dynamische Instabilität der Atmosphäre anwachsen. Der Grundstrom gibt schließlich Energie an das sich abtrennende Strömungsmuster (z. B. Wirbelzelle) ab. Da eine Hauptursache für das Anwachsen der Instabilitäten in der vertikalen Windstruktur der Atmosphäre liegt, genauer in der vertikalen Änderung des geostrophischen Windes  $\mathbf{u}_G$ , spricht man von baroklinen Instabilitäten.

Ein übliches Maß für die vertikale Änderung des geostrophischen Windes  $\mathbf{u}_G$  mit der Höhe ist der thermische Wind  $\mathbf{u}_T$ , der nach [Etl96] mit dem horizontalen Temperaturgradienten verbunden ist. Der großräumige meridionale Temperaturgradient, siehe Abschnitt 2.1, der in den Breiten der Strahlströme sein Maximum erreicht, induziert einen starken thermischen Wind, so dass dort die Baroklinität der Atmosphäre besonders groß ist. Neben der Stärke der Baroklinität spielen bei der Ausprägung der baroklinen Instabilitäten die statische Stabilität der vertikalen Schichtung, die durch das Anwachsen der potenziellen Temperatur charakterisiert wird, und der  $\beta$ -Effekt aus Abschnitt 2.2.2 eine Rolle. Für eine geringe statische Stabilität, einen kleinen Wert  $\beta$  und eine starke Baroklinität steigt die Neigung der Atmosphäre zur Ausbildung von baroklinen Instabilitäten. In mittleren Breiten ist die Parameterkonstellation sehr häufig so, dass barokline Instabilitäten entstehen können. Die genaueren Zusammenhänge sind z. B. in [Etl96] zu finden.

Die Energie der synoptischen Zyklonen stammt aus der potenziellen und inneren Energie der Grundströmung. Der Energieaustausch verläuft dabei so, dass bei der Zyklonenentstehung die horizontalen Temperaturgradienten der Grundströmung durch das Anwachsen der ageostrophischen Windkomponenten der Instabilität abgeschwächt werden, siehe [Etl96]. Die Baroklinität der Grundströmung nimmt ab und Energie wird abgegeben. Andererseits nimmt die potenzielle und kinetische Energie der Instabilität zu.

### 2.2.2 Planetare Wellen

Zur Charakterisierung der planetaren Rossbywellen in den mittleren Breiten betrachten wir die ursächlichen Mechanismen, die zur Bildung der Wellen führen. Beobachtete Rossbywellen nach ihren anregenden Ursachen einzuteilen ist kompliziert, da die dynamischen Wechselwirkungsprozesse zwischen den verschiedenen räumlichen Skalen nichtlineare Prozesse sind, die zum Teil auch heute nicht zufriedenstellend modelliert werden können.

Rossbywellen entstehen aus Störungen des gemittelten Grundzustandes der Atmosphäre. Durch die Breitenabhängigkeit der Corioliskraft, siehe Abschnitt 2.2.2, erfahren die Störungen eine rücktreibende Kraft, die schließlich eine Welle mit zonaler Ausbreitungsrichtung erzeugt. Wir unterscheiden die wellenauslösenden Störungen durch

ihre anregende physikalische Ursache. Es gibt die orografische Anregung (Gebirge), die thermische Anregung (z. B. Anomalien der Ozean-Oberflächentemperatur, Temperaturkontraste Land-Ozean, Vegetation und Landnutzungseffekte) und die Anregung durch synoptische Zyklonen, siehe [DRH<sup>+</sup>03], [Gro93], [Etl96]. Insbesondere die quantitative Bedeutung der verschiedenen Anregungsmechanismen ist bislang nicht geklärt und Gegenstand der wissenschaftlichen Diskussion.

Wir wollen nun qualitativ die Entstehung von Rossbywellen mit Hilfe der dreidimensionalen Vorticitygleichung beschreiben. Dazu betrachten wir die Atmosphäre in mittleren Breiten auf der Nordhalbkugel, wo eine Zonalströmung vorherrscht, in einem Kanalmodell. Die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achsen zeigen dabei in Ost-, Nord- und Vertikalrichtung. Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  besteht aus den Komponenten in  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Richtung, siehe Abbildung 2.3. Mit  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T$  definieren wir dann die Vorticity  $\zeta$  als die Vertikalkomponente der dreidimensionalen Rotation

$$\zeta := \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

und erhalten aus den Eulerschen Bewegungsgleichungen mit Corioliskraft die prognostische Gleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\zeta + f) + (\zeta + f) \operatorname{div}_s \mathbf{u} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \mathbf{n} \cdot (\nabla p \times \nabla \rho) \quad (2.1)$$

für die Vorticity, siehe [Etl96]. Dabei haben wir den Vertikalanteil der Corioliskraft vernachlässigt und bezeichnen mit  $\operatorname{div}_s$  den Horizontalanteil der Divergenz.

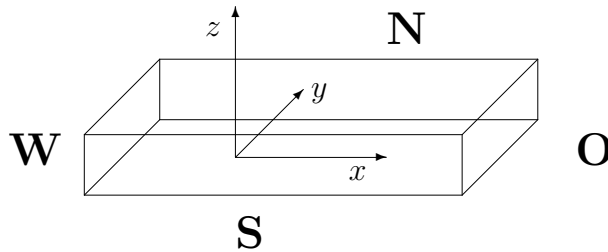


Abbildung 2.3: Kanalmodell der Atmosphäre

Vereinfachend gehen wir im Modell von einer konstanten Dichte  $\rho$  und einem vernachlässigbar kleinen Beitrag des Drehterms (vierter Term der linken Seite) aus. Weiter nehmen wir einen geostrophischen Startzustand der Atmosphäre an. Genauer bedeutet das, dass das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  nur aus den geostrophischen horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $(u, v)$  besteht. Da nach Abschnitt 2.1.2 der Druckgradient meridional von den Polen zum Äquator verläuft, ist  $(u, v)$  ein reiner Westwind und es gilt  $v = 0$  und  $\zeta = 0$ .



Beachten wir die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}_s \mathbf{u} = -\frac{\partial w}{\partial z},$$

so vereinfacht sich Gleichung (2.1) zu

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = -v \frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta + f) \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.2)$$

### Der $\beta$ -Effekt

Für die Auswirkung der Corioliskraft auf Störungen des Grundstroms betrachten wir einen reinen geostrophischen Wind, für den die Vertikalkomponente  $w$  verschwindet. Damit lautet die Vorticitygleichung (2.2)

$$\frac{d\zeta}{dt} = -v \beta. \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnen wir die meridionale Ableitung des Coriolisparameters  $f$  mit  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ . Auf der Nordhalbkugel ist  $\beta$  positiv und in mittleren Breiten erhalten wir  $\beta \approx 1.5 \cdot 10^{-11} \text{s}^{-1} \text{m}^{-1}$ , siehe [Et196].

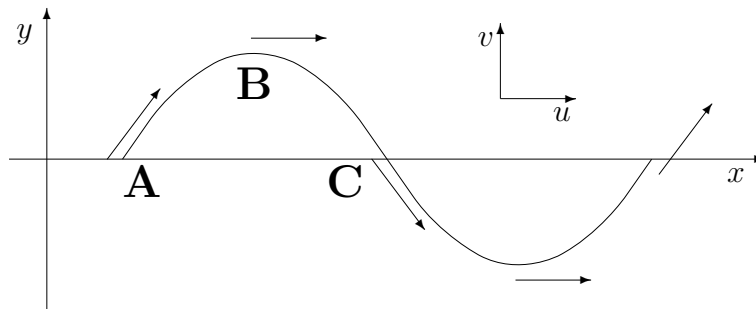


Abbildung 2.4:  $\beta$ -Effekt im Kanalmodell

Aus Gleichung (2.3) erkennen wir, dass für den ungestörten zonalen Grundstrom die Vorticity unverändert bleiben wird. Tritt nun lokal eine kleine meridionale Störung  $v > 0$  auf, dann wird das betroffene Luftpaket nach Norden ausgelenkt, siehe **A** in Abbildung 2.4. Wegen Gleichung (2.3) ist die Vorticityänderung des Luftpaketes entlang der Strömungstrajektorie negativ, die Vorticity wird negativ und die Trajektorie beschreibt eine Rechtskurve. Wenn das Luftpaket am Punkt **B** in Abbildung 2.4 angekommen ist, verläuft die Bewegung wegen  $v = 0$  wieder zonal. Die Vorticity  $\zeta$  ist weiterhin negativ, so dass das Luftpaket im weiteren Strömungsverlauf eine negative Meridional Komponente  $v < 0$  bekommt. Daraufhin wird wegen Gleichung (2.3) die Vorticityänderung des Luftpaketes entlang der Trajektorie positiv. Im Punkt **C** in Abbildung 2.4 wechselt  $\zeta$  das Vorzeichen und die Trajektorie des Luftpaketes beschreibt eine Linkskurve, usw.

Das einmal ausgelenkte Luftpaket wird also um seine ursprüngliche geografische Breite schwingen und sich dabei nach Osten bewegen. Die Stabilisierung des zonalen Grundstromes durch die Corioliskraft wird auch als  $\beta$ -Effekt bezeichnet.

### Orografische Anregung

Wir betrachten die Vorticitygleichung (2.2). Für großräumige Strömungsvorgänge in mittleren Breiten gelten für die Werte von Vorticity und Coriolisterm die Schätzungen  $\zeta \approx \pm 10^{-5} \text{s}^{-1}$  und  $f \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$ , siehe [Et196], [Hol92]. Der Wert der absoluten Vorticity ( $\zeta + f$ ) wird also immer positiv sein.

Betrachten wir nun das Überströmen eines orografischen Hindernisses, etwa eines Berges. Beim Anströmen des Berges weicht die Strömung dem Berg in vertikaler Richtung aus. Damit nimmt die vertikale Windgeschwindigkeit nach unten hin zu, also  $\frac{\partial w}{\partial z} < 0$ . Hinter dem Berg bewegt sich die Strömung wieder vertikal in den mittleren Zustand, die vertikale Windgeschwindigkeit wechselt das Vorzeichen und hat am Boden die größten Absolutwerte, also  $\frac{\partial w}{\partial z} > 0$ . Es folgt damit vor dem Berg  $\frac{d\zeta}{dt} < 0$  und nach dem Berg  $\frac{d\zeta}{dt} > 0$  für die Strömung.

Die Wirkung des Berges auf den Startzustand ist also eine stärker werdende Südauslenkung der Strömung vor dem Berg und eine Abschwächung der meridionalen Geschwindigkeitskomponente nach dem Berg, siehe Abbildung 2.5. Im weiteren Strömungsverlauf verursacht diese Auslenkung wegen des  $\beta$ -Effektes die Ausprägung von zonal ausgedehnten Wellen, den Rossbywellen.

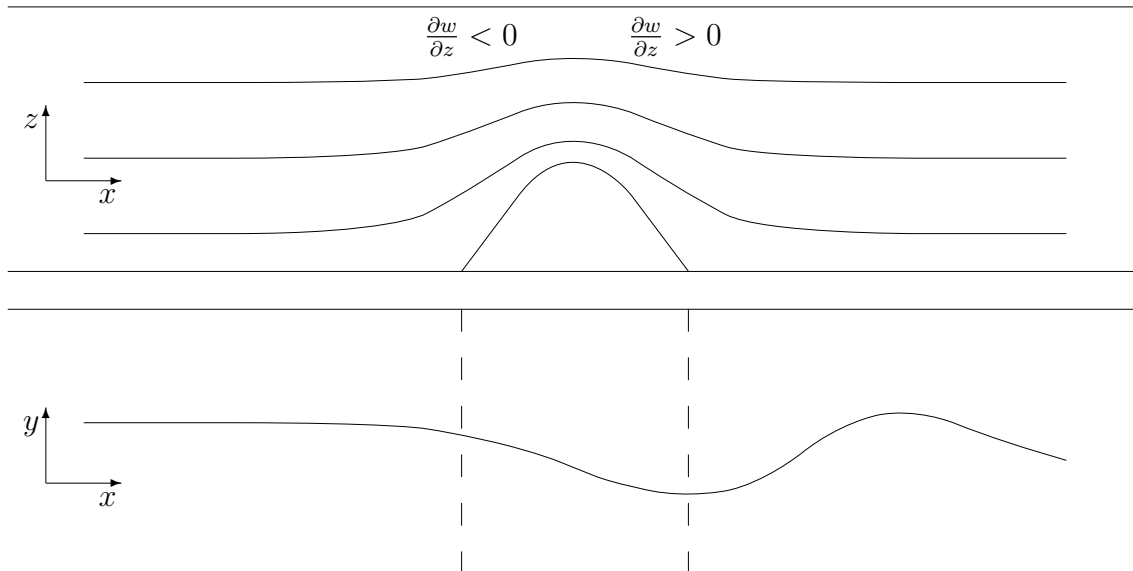


Abbildung 2.5: Orografische Anregung von Rossbywellen

Da die dynamische Größe Vorticity  $\zeta$  direkt auch das Strömungsfeld  $\mathbf{u}$  bestimmt, ist die Interpretation von  $\zeta$  als passiv mitströmende Größe natürlich eine vereinfachende

Sichtweise. Diese reicht hier aber aus, um die durch die Störung verursachte Dynamik qualitativ zu beschreiben.

Mit Hilfe der Divergenzfreiheit der Strömung und der linearisierten barotropen Vorticitygleichung, die die Dynamik der Abweichung  $\zeta'$  vom zonalen Mittelwert  $\bar{\zeta}$  beschreibt, kann man die Phasengeschwindigkeit  $c$  der Rossbywelle genauer bestimmen, siehe [Et196]. Im Grundstrom mit der Geschwindigkeit  $u_0$  haben Wellen mit der Wellenlänge  $L$  die Geschwindigkeit

$$c = u_0 - \beta \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2.$$

Danach ist die Wellenlänge einer stationären Welle ( $c = 0$ ) für  $u_0 \approx 15\text{ms}^{-1}$  und  $\beta \approx 1.5 \cdot 10^{-11}\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}$  rund  $L \approx 6300\text{km}$ . Außerdem erkennen wir, dass die Ausbreitungsrichtung der Rossbywelle immer westwärts relativ zur zonal gemittelten Grundströmung erfolgt.

### Thermische Anregung

Die qualitative Beschreibung der thermischen Anregung von Rossbywellen erfolgt wie bei der orografischen Anregung mit der Vorticitygleichung (2.2).

Die thermische Anregung von Rossbywellen wird durch eine Störung der Vertikalbewegung der Luftsäule verursacht. Um einen Zusammenhang zwischen der Vertikalgeschwindigkeit  $w$  und der diabatischen Energiequelle zu erhalten, benötigen wir den ersten Hauptsatz der Thermodynamik für diabatische Prozesse

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = Q,$$

siehe [Et196]. Dabei sind  $T$  die Temperatur,  $c_p$  die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck und  $Q$  die vorgegebene Netto-Wärmemenge, die angibt, wieviel Wärme dem Medium pro Zeit und Masse zugeführt wird. Da der geostrophische Wind entlang von Isobaren verläuft, fällt die totale Zeitableitung entlang der horizontalen Strömung für  $p$  weg. Weiter teilen wir den Advektionsterm für  $T$  in den geostrophischen und ageostrophischen Anteil auf. Es folgt

$$\frac{d_s T}{dt} + w \left( \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{Q}{c_p}.$$

Wegen der idealen Gasgleichung, können wir im ersten Term die Temperatur  $T$  durch den Druck  $p$  ersetzen. Da wir bereits wissen, dass die totale Zeitableitung entlang der horizontalen Strömung für  $p$  wegfällt, fällt damit auch die totale Zeitableitung  $\frac{d_s T}{dt}$  weg. Für die potenzielle Temperatur

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

definieren wir im  $z$ -System nach [Hol92] und [Gro93] den statischen Stabilitätsparameter  $S_z$  durch

$$S_z := \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Dann lautet der erste Hauptsatz auch

$$w = \frac{Q}{S_z c_p}. \quad (2.4)$$

Setzen wir dies in die Vorticitygleichung (2.2) ein, erhalten wir

$$\frac{d\zeta}{dt} = -v\beta + \frac{\zeta + f}{S_z c_p} \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Wird nun die Atmosphäre lokal an der Erdoberfläche diabatisch erwärmt, z. B. durch eine warme Meeresströmung, dann wird der dort vertikale Gradient  $\frac{\partial Q}{\partial z}$  der Wärmequelle negativ. Da wir für die orografische Anregung gesehen haben, dass die absolute Vorticity  $\zeta + f$  in mittleren Breiten ein positives Vorzeichen hat, resultiert daraus eine lokale Verringerung der Vorticity. Analog dazu resultiert aus einer lokalen diabatischen Abkühlung der Erdoberfläche eine lokale Verstärkung der Vorticity. Damit verursacht eine diabatische Wärmequelle  $Q$  eine Störung in der Vorticity  $\zeta$ . Durch den  $\beta$ -Effekt kann sich damit eine planetare Rossbywelle ausbilden.

Ausführliche Betrachtungen der thermischen Anregung von Rossbywellen zeigen eine komplexe dynamische Reaktion auf die Störung des Grundstromes durch die Wärmequelle  $Q$ , siehe [Gro93].

### Anregung durch transiente synoptische Phänomene

Neben den in den letzten beiden Abschnitten erwähnten Anregungsmechanismen sind auch transiente synoptische Phänomene, wie z. B. transiente Zyklonen, Ursache für langwellige Rossbywellen. Aus Beobachtungsdaten wissen wir, dass ein Teil der Energie der transienten Zyklonen nach deren Auflösung an die Grundströmung abgegeben wird, siehe [Gro93], [Et196]. Die genauen Mechanismen dieses nichtlinearen Energietransports und insbesondere quantitative Aussagen dazu sind uneinheitlich in der Literatur und weiter Gegenstand der Forschung, siehe [DRH<sup>+</sup>03], [Gro93], [OV82]. Deshalb beschreiben wir an dieser Stelle nur verbal die Anregung von Rossbywellen durch transiente synoptische Phänomene.

Den Momentanzustand der Atmosphäre können wir mit Hilfe einer sphärischen Spektralanalyse durch seine Komponenten bezüglich der sphärischen harmonischen Funktionen darstellen, siehe [Mac79]. Damit ergibt sich eine Verteilung der kinetischen Energie  $E$  in der Atmosphäre auf die verschiedenen Wellenlängen. Durch nichtlineare dynamische Prozesse kann zwischen den verschiedenen Wellenlängen kinetische Energie ausgetauscht werden. Beispielsweise wird durch turbulente Diffusion Energie von den längeren zu den kürzeren Wellenlängen transportiert. Umgekehrt geben die synoptischen Wellen in Form von Zyklonen und Antizyklonen während ihrer Auflösung

Energie an planetare Wellen in Form der zonalen Grundströmung ab, siehe [Gro93], [Etl96]. Diesen Vorgang des Energieaustausches nennen wir Energiekaskade. Als Ergebnis der Energiekaskade bildet sich ein Gleichgewichtszustand heraus, der schematisch in Abbildung 2.6 (aus [Gro93, Abschnitt 9.5]) zu sehen ist. Wir erkennen, dass ein Großteil der kinetischen Energie in den planetaren Wellen vorhanden ist.

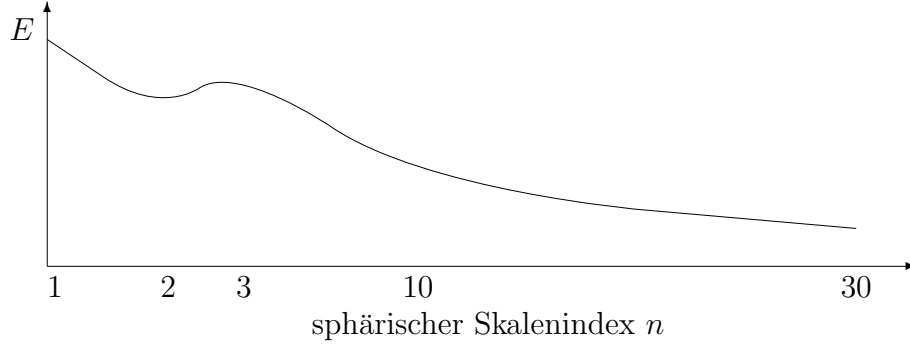


Abbildung 2.6: Nichtlineare Energiekaskade, schematisch aus [Gro93]

Zur Veranschaulichung der Energiekaskade betrachten wir eine divergenzfreie Strömung in einem eindimensionalen Intervall  $I = (0, 2\pi)$ . Die Strömung soll nur die drei fixierten Wellenzahlen  $k_1 < k_2 < k_3 \in \mathbb{N}$  annehmen können und erfülle für die Vorticity  $\zeta$  die Randbedingungen

$$\zeta(0) = \zeta(2\pi) = 0.$$

Die Geschwindigkeit  $u$  und die Vorticity  $\zeta$  stellen wir dann durch die Stromfunktion  $\psi$  dar und es gilt

$$u := -\partial_x \psi, \quad \zeta := \partial_x u = -\Delta \psi.$$

Wir nehmen an, dass Energie  $E$  und Enstrophie  $V$  erhalten bleiben, dass also gilt

$$E := \frac{1}{2} \int_I \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = 0, \quad (2.5)$$

$$V := \frac{1}{2} \int_I \zeta^2 = \frac{1}{2} \int_I (\Delta \psi)^2, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (2.6)$$

Zu den harmonischen Funktionen  $\psi_i = \sin(k_i x)$  betrachten wir die Zerlegung  $\psi = \sum_{i=1}^3 a_i \psi_i$  der Stromfunktion und definieren die Energieanteile von  $\psi$  bezüglich der Wellenzahlen

$$E_i := \frac{a_i^2}{2} \int_I \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_i.$$

Es folgt damit

$$2E = \int_I \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j = - \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \int_I \Delta \psi_i \psi_j = \sum_{i=1}^3 a_i^2 k_i^2 \int_I \psi_i^2 = 2 \sum_{i=1}^3 E_i,$$

$$2V = \int_I \left( \sum_{i=1}^3 a_i \Delta \psi_i \right)^2 = \int_I \left( - \sum_{i=1}^3 a_i k_i^2 \psi_i \right)^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 k_i^4 \int_I \psi_i^2 = 2 \sum_{i=1}^3 k_i^2 E_i.$$

Damit schreiben wir die Energie- und Enstroeerhaltung in den Gleichungen (2.5), (2.6) mit den Energieanteilen

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial t} = 0,$$

$$k_1^2 \frac{\partial E_1}{\partial t} + k_2^2 \frac{\partial E_2}{\partial t} + k_3^2 \frac{\partial E_3}{\partial t} = 0.$$

Fassen wir beide Gleichungen zusammen, erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{k_3^2 - k_2^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{k_1^2 - k_3^2} \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{k_2^2 - k_1^2} \frac{\partial E_3}{\partial t}.$$

Wird nun der Energieanteil  $E_2$  der mittleren Wellenlänge  $k_2$  durch einen dynamischen Prozess verringert, so müssen sich wegen  $k_1 < k_2 < k_3$  die Energieanteile  $E_1$  und  $E_3$  der kleineren und größeren Wellenzahlen erhöhen. Die Energiekaskade verläuft also nicht nur in eine Richtung. Insbesondere muss auch Energie von der kleineren in die größere Wellenlänge transportiert werden.

### 2.2.3 Nichtlineare Skalenwechselwirkungen

In Abschnitt 2.2.1 haben wir gesehen, dass synoptische Wellen während ihrer Entstehungszeit von der Lage und Struktur der planetaren Wellen (über das Maß an Baroklinität und statischer Stabilität und die Energieaustausch) beeinflusst werden. Ein weiteres Beispiel für die Beeinflussung synoptischer Wellen durch planetare Wellen ist die Korrelation der Zyklonenzugbahnen mit den Strahlströmen in mittleren Breiten, siehe [Gro93]. Außerdem haben wir in Abschnitt 2.2.2 gesehen, dass durch synoptische Wellen planetare Wellen angeregt werden können und Energie von der synoptischen Skala zur planetaren Skala hin transportiert wird. Synoptische Wellen sind damit auch Ursache für die Ausprägung von planetaren Wellen.

Mit dieser Sichtweise treten die synoptischen Wellen und die planetaren Wellen jeweils wechselseitig als Ursache für die Entstehung des anderen Phänomens auf. Das bedeutet aber, dass das System eine nichtlineare Dynamik mit wechselseitigen Abhängigkeiten der Systemkomponenten enthält. Da durch diese nichtlineare Dynamik ein Energieaustausch insbesondere zwischen den räumlichen Skalen erzeugt wird, können wir diese Wechselwirkungen auch als Ursache für die nichtlineare Energiekaskade in Abschnitt 2.2.2 interpretieren.

Die Beschreibung der Ursachen und Mechanismen der Ausprägung von planetaren Wellen wird damit zu einem komplexen nichtlinearen dynamischen Problem, welches auf Wechselwirkungsprozessen zwischen verschiedenen räumlichen Wellenskalen basiert.

## 2.3 Planetare Wellen in einem Flachwassermodell

In Abschnitt 2.2 wurde der Zusammenhang zwischen den Entstehungsmechanismen von planetaren Rossbywellen und den Wechselwirkungsprozessen zwischen verschiedenen räumlichen Skalen qualitativ beschrieben. Diese Skalenwechselwirkungsprozesse beschreiben wir in diesem Abschnitt qualitativ in einem Flachwassermodell der Atmosphäre. Obwohl etwa bei der Entstehung der synoptischen Wellen barokline Prozesse eine wesentliche Rolle spielen, siehe Abschnitt 2.2.1, können wir einige Mechanismen aus Abschnitt 2.2 im barotropen Flachwassermodell modellieren.

Die barotrope Flachwasserapproximation vereinfacht die dreidimensionalen primitiven Gleichungen der Atmosphäre, die nach [Et196], [Lan02], [Dut95] und [Jam94] die grundlegenden prognostischen Gleichungen für die Beschreibung physikalischer Prozesse in der Atmosphäre darstellen. Für die Atmosphärenmodellierung bieten sich die zweidimensionalen Flachwassergleichungen deswegen an, weil einerseits der Aufwand für deren numerische Lösung im Vergleich zu den primitiven Gleichungen gering erscheint und andererseits weil ein Teil der horizontalen atmosphärischen Dynamik noch beschrieben werden kann.

Wir betrachten im Folgenden, analog zu Abschnitt 2.2.2, die Atmosphäre der mittleren Breiten in einem Kanalmodell diesmal auf der Grundlage der Flachwassergleichungen. Durch die qualitative Diskussion der Gleichungen erkennen wir, dass durch orografische und thermische Anregung planetare Rossbywellen erzeugt werden können.

### 2.3.1 Formulierung der Gleichungen

Da in den mittleren Breiten nach Abschnitt 2.1.2 in der Atmosphäre eine Zonalströmung vorherrscht, betrachten wir die Atmosphäre der mittleren nördlichen Breiten in einem dreidimensionalen Kanalmodell, siehe Abbildung 2.3. Dazu zeigen die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse in Ost-, Nord- und Vertikalrichtung. Das Geschwindigkeitsfeld besteht aus den Komponenten in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung.

Für die Flachwasserapproximation gehen wir von einer konstanten Dichte  $\rho$  des Mediums und einer geringen vertikalen Ausdehnung der Atmosphäre aus. Als Ergebnis der Approximation erhalten wir im nun zweidimensionalen Kanalmodell mit den horizontalen Koordinatenachsen  $x$  und  $y$ , die zweidimensionalen Flachwassergleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \Phi = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u}, \quad (2.7)$$

$$\partial_t \Phi + \mathbf{u} \cdot \nabla (\Phi - \Phi_B) + (\Phi - \Phi_B) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.8)$$

für das horizontale Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u} = (u, v)$  und das Geopotenzialfeld  $\Phi$ , siehe [Lan02], [Ped87], [Beh96] und Abbildung 2.7.  $\Phi_B$  ist dabei das Geopotenzialfeld

der Orografie,  $f$  der Coriolisparameter, siehe Anhang D, und für das Kreuzprodukt mit dem Vertikalvektor  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)^T$  in Gleichung (2.7) interpretieren wir den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{u}$  als dreidimensionalen horizontalen Vektor  $(u, v, 0)$ . Für dieses zweidimensionale Kanalmodell der Flachwassergleichungen verzichten wir auf eine Herleitung, da wir in Kapitel 3 ausführlich die Flachwasserapproximation für die globalen primitiven Gleichungen behandeln werden. Da die prognostischen Größen das vektorwertige Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  und das Geopotenzialfeld  $\Phi$  sind, nennen wir die Gleichungen (2.7), (2.8) auch die Vektorformulierung der Flachwassergleichungen.

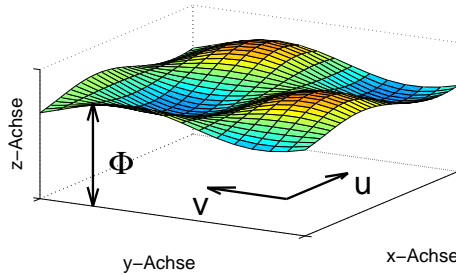


Abbildung 2.7: Flachwasserschicht mit Geschwindigkeitsfeld  $(u, v)$  und Geopotenzialfeld  $\Phi$

Betrachten wir anstelle des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}$  im zweidimensionalen Kanalmodell die Vorticity  $\zeta = \text{rot } \mathbf{u}$  und die Divergenz  $\delta = \text{div } \mathbf{u}$  als prognostische Größen der Flachwassergleichungen, erhalten wir die skalaren Flachwassergleichungen. Diese berechnen wir aus der Impulsbilanz (2.7) durch Anwendung der zweidimensionalen Rotations- und Divergenzoperatoren

$$\text{rot } \mathbf{u} := \partial_x v - \partial_y u, \quad \text{div } \mathbf{u} := \partial_x u + \partial_y v.$$

Damit lauten die skalaren Flachwassergleichungen

$$\partial_t \zeta + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta + (\zeta + f) \delta = -v \partial_y f, \quad (2.9)$$

$$\partial_t \delta + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta + \Delta \Phi - f \zeta = -u \partial_y f + \sum_{i,j=1}^2 \partial_{x_j} u_i \partial_{x_i} u_j, \quad (2.10)$$

$$\partial_t \Phi + \mathbf{u} \cdot \nabla (\Phi - \Phi_B) + (\Phi - \Phi_B) \delta = 0. \quad (2.11)$$

Die im skalaren System diagnostische Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  berechnen wir mit der Helmholtz-Zerlegung aus den prognostischen Größen Vorticity und Divergenz

$$\begin{aligned} -\Delta \psi &= \zeta, \\ \Delta \chi &= \delta, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{rot } \psi + \nabla \chi. \end{aligned}$$

Dabei sind  $\psi$  und  $\chi$  die Stromfunktion und das Vektorpotenzial, und der vektorwertige Rotationsoperator ist definiert durch

$$\mathbf{rot } \psi := (\partial_y \psi, -\partial_x \psi)^T.$$



### 2.3.2 Vereinfachung der Flachwassergleichungen

Für die qualitative Beschreibung der Entstehung von planetaren Rossbywellen im zweidimensionalen Flachwassermodell betrachten wir die skalare Formulierung (2.9) – (2.11). Wir betrachten wieder einen geostrophischen Startzustand, der für den großräumigen meridionalen Druckgradienten ein zonalsymmetrischer Westwind ist, also  $\zeta = \delta = 0$ ,  $v = 0$ . Durch geeignete Randbedingungen, die an den seitlichen Rändern des Kanalmodells vorgeschrieben sind, folgt aus  $\zeta = \delta = 0$  eine nichttriviale Zonalwindkomponente  $u$ . Weiter sei eine homogene Schichtdicke  $\Phi$  vorgegeben.

Für die dynamische Diskussion der Gleichungen (2.9) – (2.11) vernachlässigen wir zunächst kleine Terme. In der Geopotenzialgleichung (2.11) vernachlässigen wir außerdem den Divergenzterm gegenüber dem Advektionsterm, da der Startzustand divergenzfrei ist und erhalten anstelle von Gleichung (2.11)

$$\frac{d\Phi - \Phi_B}{dt} = 0. \quad (2.12)$$

Bleibt die Strömung weitgehend scherungsfrei, dann können wir annehmen, dass der nichtlineare Deformationsterm auf der rechten Seite von Gleichung (2.10) vernachlässigbar klein bleibt. Sind die Störungen im Geopotenzialfeld  $\Phi$  kleinräumig, dann werden sie durch den Laplace-Operator  $\Delta\Phi$  verstärkt und dominieren dadurch die Corioliskraftterme  $-f\zeta$  und  $-u\partial_y f$ . Damit ersetzen wir Gleichung (2.10) durch

$$\frac{d\delta}{dt} = -\Delta\Phi. \quad (2.13)$$

Für die Vorticitygleichung (2.9) wissen wir aus Abschnitt 2.2.2, dass die rechte Seite durch den  $\beta$ -Effekt die Zonalströmung stabilisiert. Bei kleinen lokalen Störungen im Divergenzterm  $(\zeta + f)\delta$  ist die rechte Seite dagegen aber vernachlässigbar klein. Daher spielen für die Anregung von planetaren Wellen beide Terme eine wichtige Rolle. Wir schreiben so die Vorticitygleichung (2.9) mit  $\beta$  aus Abschnitt 2.2.2 in der Form

$$\frac{d\zeta}{dt} = -v\beta - (\zeta + f)\delta. \quad (2.14)$$

### 2.3.3 Anregung planetarer Wellen

Analog zu Abschnitt 2.2.2 wollen wir die Entstehung von planetaren Rossbywellen anhand der vereinfachten skalaren Flachwassergleichungen (2.12) – (2.14) untersuchen.

Wie in Abschnitt 2.2.2, tritt wegen des Terms  $-v\beta$  in der Vorticitygleichung (2.14) der zonalwindstabilisierende  $\beta$ -Effekt auf. Die rücktreibende Kraft in Meridionalrichtung gegenüber kleinen Störungen ist damit als Grundvoraussetzung für die Entstehung von Rossbywellen auch für die Flachwassergleichungen vorhanden. Daher untersuchen wir nun, wie orografische und thermische Störungen Wellen in der Zonalströmung anregen können.

### Orografische Anregung

Für die orografische Anregung durch einen Berg und ein Tal betrachten wir eine konstante Orografiefunktion  $\Phi_B$  mit einer aufgeprägten lokalen sinusförmigen Störung. Seien  $L > 0$  die horizontale Ausdehnung und  $H > 0$  die Höhe des Berges, dann definieren wir

$$\Phi_B(x, y) = \begin{cases} H \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right), & \text{für } x \in (0, L) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wegen der Geopotenzialgleichung (2.12) bleibt die Schichtdicke  $\Phi - \Phi_B$  konstant entlang der Strömung. Der Berg im Orografiefeld muss daher auch im Geopotenzialfeld mit der mittleren Höhe  $H_0 > 0$  auftreten, d. h.

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} H_0 + H \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right), & \text{für } x \in (0, L) \\ H_0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Mit der Divergenzgleichung (2.13) geht diese Störung auf das Divergenzfeld über und wir erhalten

$$\frac{d\delta}{dt} = \begin{cases} \frac{H 4\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right), & \text{für } x \in (0, L) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Betrachten wir nun die Strömung über dem Berg ( $0 < x < L/2$ ), so wird hier die Divergenz  $\delta$  vergrößert und es folgt über dem Berg  $\delta > 0$ . Im anschließenden Tal ( $L/2 < x < L$ ) verringert sich  $\delta$  wieder, so dass nach der Orografiestörung ( $L < x$ ) die Divergenz wieder Null ist, also  $\delta = 0$ . Da die Divergenz über der gesamten Orografiestörung positiv ist, wird durch den Divergenzterm  $(\zeta + f)\delta$  in der Vorticitygleichung (2.14) die Vorticity negativ. Die Strömung wird also nach Süden hin abgelenkt.

Da die dynamischen Größen Vorticity  $\zeta$  und Divergenz  $\delta$  direkt auch das Strömungsfeld  $\mathbf{u}$  bestimmen, ist die Interpretation von  $\zeta$  und  $\delta$  als passiv mitströmende Größen natürlich eine vereinfachende Sichtweise. Diese reicht hier aber aus, um qualitativ die Dynamik der Störung zu beschreiben.

### Thermische Anregung

Anders als bei der orografischen Anregung von planetaren Rossbywellen, für die die Orografiefunktion  $\Phi_B$  direkt auf die Dynamik Einfluss hat, gibt es in den Flachwassergleichungen nur eine parametrisierte Möglichkeit, den Einfluss einer diabatischen Wärmequelle zu berücksichtigen. Die durch die Erwärmung verursachten vertikalen Störungen werden dabei mit Hilfe der dreidimensionalen Divergenzfreiheit in Störungen der horizontalen Divergenz umgerechnet.

Wie in Abschnitt 2.2.2 erhalten wir zu einer lokalen diabatischen Wärmequelle  $Q$  mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik die Ausbildung einer diabatisch verursachten Störung  $w'$  der Vertikalgeschwindigkeit, siehe Gleichung (2.4). In den Flachwassergleichungen (2.7), (2.8) gibt es aber nur die horizontalen Komponenten  $(u', v')$  der

Störung des Geschwindigkeitsfeldes. Deshalb drücken wir die dynamische Auswirkung von  $w'$  in den Flachwassergleichungen dadurch aus, dass  $w'$  wegen der dreidimensionalen Divergenzfreiheit (Kontinuitätsgleichung,  $\rho=\text{konst.}$ ) der Strömung diagnostisch mit dem horizontalen Störungsanteil  $(u', v')$  durch die Gleichung

$$\frac{\partial w'}{\partial z} = -\text{div}(u', v')$$

zusammenhängt. Aus der diabatischen Wärmequelle  $Q$  resultiert damit eine Störung der zweidimensionalen Divergenz durch

$$\text{div}(u', v') = -\frac{1}{S_z c_p} \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Betrachten wir die vertikale Mittelung  $Q_z$  von  $\frac{\partial Q}{\partial z}$ , so erhalten wir aus der Vorticitygleichung (2.14) die Vorticitygleichung mit thermischer Anregung

$$\frac{d\zeta}{dt} = -v \partial_y f - (\zeta + f) \left( \delta - \frac{Q_z}{S_z c_p} \right).$$

Mit den gleichen Argumenten wie in Abschnitt 2.2.2 für die thermische Anregung erkennen wir, dass durch eine lokale diabatische Wärmequelle  $Q_z$  in der Vorticitygleichung eine Störung des zonalsymmetrischen Grundstroms verursacht wird.

# Kapitel 3

## Die sphärischen Flachwassergleichungen

Die Flachwassergleichungen beschreiben die horizontale Bewegung in einer dünnen Atmosphärenschicht. Ausgehend von den primitiven Gleichungen in der dreidimensionalen Atmosphäre erhalten wir mit der Flachwasserapproximation zweidimensionale Bewegungsgleichungen für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten, siehe [Dut95], [Lan02], [Etl96]. Die Flachwassergleichungen haben für die Modellierung dynamischer Prozesse in der Atmosphäre eine große Bedeutung, da einerseits deren numerische Lösung einfacher ist als für die vollen primitiven Gleichungen und andererseits noch reale physikalische Phänomene beschrieben werden können, z. B. wie in Abschnitt 2.3.3 die Anregung von planetaren Rossbywellen. Will man planetare Wellenphänomene simulieren, reicht es nicht, die Flachwassergleichungen nur auf einem zweidimensionalen Gebiet zu betrachten, sondern man muss die Flachwassergleichungen global auf der gesamten Sphäre formulieren. In den letzten 20 Jahren gab es dazu zahlreiche Arbeiten, die verschiedene Ansätze zur numerischen Lösung der Flachwassergleichungen auf der Sphäre verfolgten, z. B. [GPF03], [RR02], [Tol02], [LBV01], [TTSG01], [SP99] [HH02], [SWD97], [CS90], [BSH90], [MO87].

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die Flachwassergleichungen auf der Sphäre in einem erdfesten Koordinatensystem. Damit interpretieren wir die sphärischen Gleichungen eingebettet in den  $\mathbb{R}^3$  und definieren die tangentialen Differenzialoperatoren als horizontale Projektionen der dreidimensionalen Differenzialoperatoren auf die Sphäre, siehe Anhang B, [Dzi88], [Sch93], [Sie90], [HH02].

Im gesamten Kapitel benutzen wir die Einsteinsche Summenkonvention. Tritt also ein Index innerhalb eines Terms mehrfach auf, so wird der Term über den Wertebereich des Index summiert. In Abschnitt 3.1 beginnen wir mit der Flachwasserapproximation der primitiven Gleichungen und erhalten die sphärischen Flachwassergleichungen in der Vektorformulierung. Danach leiten wir in Abschnitt 3.2 die skalare Formulierung der sphärischen Flachwassergleichungen her und zeigen die Äquivalenz zur Vektorformulierung. Nachdem wir in den Abschnitten 3.3 und 3.4 die Skalierung auf die Sphäre mit dem Erdradius  $R_0 > 0$  und die Erhaltungseigenschaften der Flachwassergleichungen

betrachtet haben, leiten wir in Abschnitt 3.5 analytische Lösungen der Flachwassergleichungen her.

## 3.1 Vektorformulierung

Die Herleitung der Flachwassergleichungen auf der Sphäre erfolgt analog zur Flachwasserapproximation im ebenen zweidimensionalen Gebiet, siehe [Lan02]. Ausgehend von den reibungsfreien primitiven Gleichungen führen uns die drei Annahmen A-1 – A-3 zur Flachwasserapproximation der primitiven Gleichungen.

A-1: Das Medium hat eine konstante Dichte  $\rho = \textit{konst.}$

A-2: Die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten sind wesentlich größer als die vertikalen Komponenten.

A-3: Die vertikale Scherung der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten kann geostrophisch approximiert werden.

Die Annahme A-1 können wir wegen  $\nabla\rho = 0$  auch als Barotropiebedingung interpretieren. Die Annahme A-2 ist typischerweise in einer Atmosphärenschicht mit kleiner vertikaler und großer horizontaler Ausdehnung erfüllt. Da wegen der Barotropiebedingung in Annahme A-1 der geostrophische Wind höhenunabhängig ist, bedeutet die Annahme A-3 praktisch die Höhenunabhängigkeit der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten.

In Abschnitt 3.1.1 notieren wir mit der Nutzung der Annahme A-1 die reibungsfreien primitiven Gleichungen in einer Atmosphärenschicht konstanter Dichte. Danach formulieren wir in Abschnitt 3.1.2 die horizontalen und vertikalen Komponenten der Gleichungen getrennt. In den Abschnitten 3.1.3 und 3.1.4 nutzen wir dann mit der sphärischen Reskalierung und der Approximation der Windscherung die Annahmen A-2 und A-3 für die Herleitung der Flachwassergleichungen aus.

### 3.1.1 Die primitiven Gleichungen

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen sind die reibungsfreien primitiven Gleichungen in einer dreidimensionalen Atmosphärenschicht. Wir benötigen zunächst einige Definitionen.  $T > 0$  sei ein beliebig fixierter Zeitpunkt,  $I = (0, T)$  ein Zeitintervall,  $R_0$  der Erdradius,  $\Phi_E$  das Geopotenzial und  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Erde, siehe auch Anhang D. Dazu sei der Winkelgeschwindigkeitsvektor definiert durch  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)^T$ .

**Definition 3.1.1 (Normierter Radialvektor)** Für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  definieren wir die Funktion

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

$\mathbf{n}(\mathbf{x})$  ist der normierte Radialvektor im Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

**Definition 3.1.2 (Sphäre)** Für den Radius  $R > 0$  definieren wir die Sphäre durch

$$S_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = R\}.$$

Für  $R = 1$  heißt  $S := S_1$  die Einheitssphäre.

Für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in S_R$  ist der normierte Radialvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  gleichzeitig der äußere Einheitsnormalenvektor an  $S_R$ .

Die Atmosphärenschicht habe einen oberen und einen unteren Rand, der jeweils durch die zeitabhängige Schichtdickenfunktionen  $h'_\varepsilon : S \times I \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und die Orografiefunktion  $h'_{B,\varepsilon} : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  festgelegt wird. Dabei ordnen  $h'_\varepsilon$  bzw.  $h'_{B,\varepsilon}$  einem Punkt auf  $S$  die Höhe der darüberliegenden Schicht bzw. Orografie zu. Für die maximale Schichtdicke definieren wir dann

$$\varepsilon := \frac{1}{R_0} \max_{x \in S} h'_\varepsilon(x).$$

Wir definieren als Atmosphärenschicht

$$G'_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R_0 + h'_{B,\varepsilon}(\mathbf{n}(\mathbf{x})) < |\mathbf{x}| < R_0 + h'_\varepsilon(\mathbf{n}(\mathbf{x}))\}.$$

Für den Fall einer reibungsfreien Strömung in einer dreidimensionalen Atmosphärenschicht sind die Impulsgleichungen Eulersche Bewegungsgleichungen. Die Kontinuitätsgleichung der primitiven Gleichungen wird mit der Annahme A-1 zur Forderung der Divergenzfreiheit der Strömung. Damit lauten die primitiven Gleichungen in der dreidimensionalen Atmosphärenschicht  $G'_\varepsilon$  für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v} : G'_\varepsilon \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das Druckfeld  $q : G'_\varepsilon \times I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla q &= -\nabla \Phi_E - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}), \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

siehe auch [Dut95], [Lan02], [Et196].

Im Sinne einer kompakteren Darstellung werden wir anstelle der Gleichungen auf  $G'_\varepsilon$  normierte Gleichungen auf der normierten Schicht

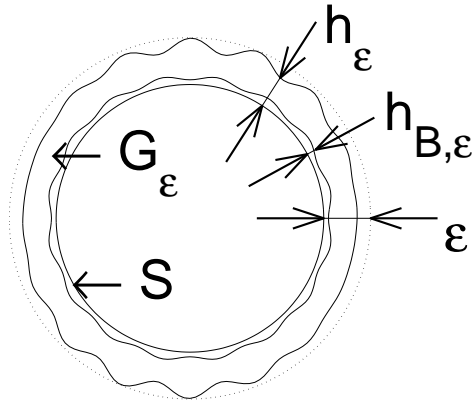
$$G_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + h_{B,\varepsilon}(\mathbf{n}(\mathbf{x})) < |\mathbf{x}| < 1 + h_\varepsilon(\mathbf{n}(\mathbf{x}))\}$$

betrachten. Dabei sind  $h_{B,\varepsilon} = h'_{B,\varepsilon}/R_0$  und  $h_\varepsilon = h'_\varepsilon/R_0$  die normierten Schichtdicken. Es gilt dann für die maximale Schichtdicke

$$\varepsilon = \max_{x \in S} h_\varepsilon(x).$$

In Abbildung 3.1 sind die Einheitssphäre  $S$  und die normierte Schicht  $G_\varepsilon$  zu sehen. Die dazugehörige kinematische Skalierung für die Funktionen lautet

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \frac{1}{R_0} \mathbf{v}(R_0 \mathbf{x}), \quad p(\mathbf{x}) := \frac{1}{R_0^2} q(R_0 \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in G_\varepsilon.$$

Abbildung 3.1: Einheitssphäre  $S$ , transformierte Schicht  $G_\varepsilon$ 

Fassen wir Druck und Geopotenzial in der potenzialkorrigierten Druckvariablen

$$p'(\mathbf{x}) := \frac{p(\mathbf{x})}{\rho} + \frac{\Phi_E(\mathbf{x})}{R_0}, \quad \forall \mathbf{x} \in G_\varepsilon, \quad (3.2)$$

zusammen, so lauten die normierten primitiven Gleichungen in der Schicht  $G_\varepsilon$

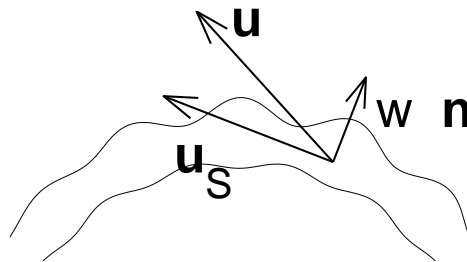
$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p' = -2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}), \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Orthogonale Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes

Um für die Flachwasserapproximation die Annahme A-2 auch formal nutzen zu können, zerlegen wir die Vektoren der Impulsbilanz (3.3) in die orthogonalen horizontalen und vertikalen Komponenten.

Betrachten wir zunächst für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  die Zerlegung in die orthogonalen Komponenten, siehe Abbildung 3.2.

Abbildung 3.2: Orthogonale Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + w \mathbf{n}.$$

Wir können für die vektorwertige Impulsgleichung (3.3) dann die orthogonalen Komponenten berechnen:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_s + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_s + w \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{n} + \frac{|\mathbf{u}_s|^2}{|\mathbf{x}|} \mathbf{n} + \nabla_s p' \\ = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u}_s - 2w \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} + \nabla_s \Phi_Z, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\partial_t w + \mathbf{u} \cdot \nabla w - \frac{|\mathbf{u}_s|^2}{|\mathbf{x}|} + \mathbf{n} \cdot \nabla p' = -2 \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}). \quad (3.6)$$

Dabei sind  $f$  der Coriolisparameter, siehe Anhang D, und  $\Phi_Z$  ein durch die Zentrifugalkraft hervorgerufenen Geopotenzial, für das

$$\Phi_Z = -\frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2}{2}$$

gilt. Schließlich können wir auch die Inkompressibilitätsgleichung (3.4) in die Beiträge durch die orthogonalen Komponenten von  $\mathbf{u}$  zerlegen:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{u}_s + \mathbf{n} \cdot \nabla w + w \operatorname{div} \mathbf{n} = 0. \quad (3.7)$$

Neben den Gleichungen (3.5), (3.6) und (3.7) werden wir in Abschnitt 3.1.4 auch noch zwei weitere sphärisch reskalierte Gleichungen benötigen. Genauer sind das

$$\mathbf{n} \cdot \nabla (\nabla_{s_i} p) = \nabla_{s_i} (\mathbf{n} \cdot \nabla p) - \nabla n_i \cdot \nabla p, \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla (\operatorname{div}_s \mathbf{u}_s) = \operatorname{div}_s (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_s) - \nabla n_i \cdot \nabla u_{s_i}. \quad (3.9)$$

Dabei nutzen wir die Einsteinsche Summenkonvention, die auch für das gesamte Kapitel gelten soll.

### 3.1.3 Die sphärische Reskalierung

In diesem Abschnitt nutzen wir die Annahme A-2 der Flachwasserapproximation. Wir führen dazu eine sphärische Reskalierung für die orthogonalen Komponenten in den Gleichungen (3.5) – (3.9) durch.

Die Annahme A-2 besagt, dass in der Schicht  $G_\varepsilon$  die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten der Strömung wesentlich größer als die vertikalen Komponenten sind. Um diese Annahme für die Gleichungen (3.5) – (3.9) nutzen zu können, führen wir eine sphärische Reskalierung durch und transformieren die Gleichungen auf ein von  $\varepsilon$  unabhängiges Gebiet  $G$ . Dadurch wird zum einen die Geometrie des Gebietes  $G_\varepsilon$  verändert und zum anderen werden die horizontalen und vertikalen Geschwindigkeitskomponenten verschieden skaliert. Im Gebiet  $G$  betrachten wir dann die Gleichungen für den Fall von sehr kleinem  $\varepsilon \ll 1$ . Dadurch können wir Terme vernachlässigen und



erhalten nach der Rücktransformation auf das Gebiet  $G_\varepsilon$  die reskalierten Gleichungen. Dieser Prozess stellt den Grenzfall für sehr dünne Schichten  $G_\varepsilon$  mit der entsprechenden kinematischen Skalierung der dynamischen Größen dar. Diese Form der Reskalierung wurde für den dreidimensionalen Fall zur mathematischen Rechtfertigung der hydrostatischen Approximation in dünnen Schichten in [AG01] angewendet.

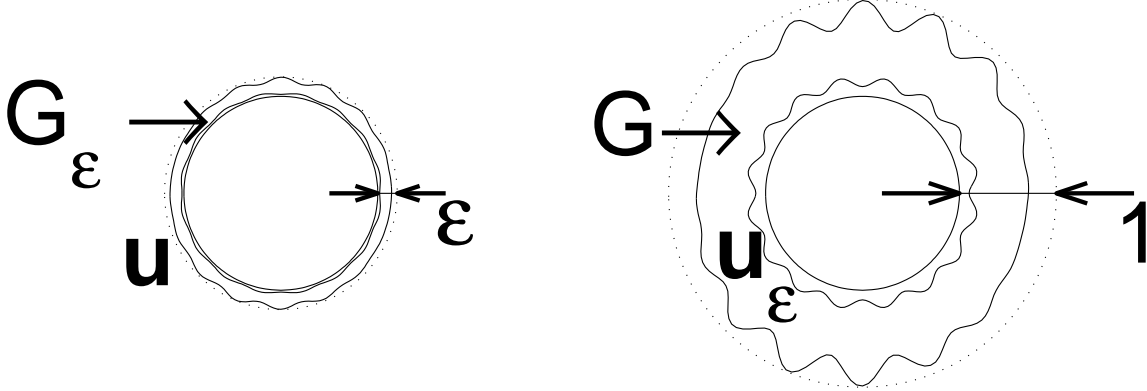


Abbildung 3.3: Originale Schicht  $G_\varepsilon$ , Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$ ; Transformationsgebiet  $G$ , Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}_\varepsilon$

Wir beginnen mit der Definition des Transformationsgebietes  $G$ , dessen Schichtdicke immer von der Dimension 1 sein soll:

$$G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{\varepsilon} h_{B,\varepsilon}(\mathbf{n}(\mathbf{x})) < |\mathbf{x}| - 1 < \frac{1}{\varepsilon} h_\varepsilon(\mathbf{n}(\mathbf{x}))\}.$$

Die Zuordnung der Punkte aus  $G$  und  $G_\varepsilon$  wird durch die Abbildung  $\varphi : G \rightarrow G_\varepsilon$

$$\varphi(\mathbf{y}) := (1 + \varepsilon(|\mathbf{y}| - 1)) \mathbf{n}(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in G$$

realisiert. Entsprechend der Transformation der Schichten führen wir die dazugehörige kinematische Skalierung des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}$  durch. Die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $\mathbf{u}_S$  sollen so transformiert werden, dass die tangentialen Gradienten erhalten bleiben. Die vertikale Geschwindigkeitskomponente  $w$  hingegen soll mit dem Faktor  $\varepsilon$  skaliert werden. Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}_\varepsilon : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das Druckfeld  $p'_\varepsilon : G \rightarrow \mathbb{R}$  ergeben sich damit durch

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon &:= (\lambda \mathbf{u} + (\varepsilon^{-1} - \lambda) w \mathbf{n}) \circ \varphi, \\ p'_\varepsilon &:= \lambda^2 p' \circ \varphi. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Die Radiusskalierungsfunktion  $\lambda : G \rightarrow \mathbb{R}$  wird dabei durch  $\varphi$  mit

$$\lambda(\mathbf{y}) := \frac{|\mathbf{y}|}{|\varphi(\mathbf{y})|}$$

definiert. Im weiteren werden wir die Argumenttransformation  $\varphi$  weglassen, wenn keine Irritationen zu befürchten sind. Wie oben gefordert, gelten für die zu  $\mathbf{u}_\varepsilon$  gehörenden Komponenten  $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_{\varepsilon,S} + w_\varepsilon \mathbf{n}$  die Beziehungen

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{\varepsilon,S} &= \lambda \mathbf{u}_S, \\ w_\varepsilon &= \varepsilon^{-1} w,\end{aligned}$$

und damit insbesondere  $\nabla_S \mathbf{u}_S = \nabla_S \mathbf{u}_{\varepsilon,S}$ .

Damit erhalten wir die transformierten Gleichungen (3.6), (3.5), (3.7) auf  $G$ :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u}_{\varepsilon,S} + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon,S} + \lambda \mathbf{u}_{\varepsilon,S} \left( \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \frac{1}{\lambda} \right) + \varepsilon \lambda w_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{n} \\ + \frac{|\mathbf{u}_{\varepsilon,S}|^2}{|\mathbf{y}|} \mathbf{n} + \nabla_S p'_\varepsilon = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u}_{\varepsilon,S} - 2 \varepsilon \lambda w_\varepsilon \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} + \nabla_S \Phi_Z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon (\partial_t w_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon) - \frac{|\mathbf{u}_{\varepsilon,S}|^2}{\lambda |\mathbf{y}|} + \varepsilon^{-1} \mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{p'_\varepsilon}{\lambda^2} \right) \\ = -\frac{2}{\lambda} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{u}_{\varepsilon,S} \times \mathbf{n}) + \frac{1}{\lambda} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}),\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}_S \mathbf{u}_{\varepsilon,S} + \mathbf{n} \cdot \nabla w_\varepsilon + \varepsilon \lambda w_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{n} = 0.$$

Ebenso berechnen wir die transformierte Form der Gleichungen (3.8) und (3.9) auf  $G$ .

$$\varepsilon^{-1} \mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\lambda} \nabla_{S_i} p_\varepsilon \right) = \varepsilon^{-1} \lambda \nabla_{S_i} (\mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\lambda^2} p_\varepsilon \right)) - \nabla n_i \cdot \nabla p_\varepsilon, \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\varepsilon^{-1} \mathbf{n} \cdot \nabla (\operatorname{div}_S \mathbf{u}_{\varepsilon,S}) = \varepsilon^{-1} \lambda \operatorname{div}_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\lambda} \mathbf{u}_{\varepsilon,S} \right)) - \lambda \nabla n_i \cdot \nabla u_{\varepsilon,S_i}.$$

Als die formale Umsetzung von Annahme A-2 betrachten wir nun den Fall von sehr kleinem  $\varepsilon \ll 1$ . Zum einen bedeutet das, dass die Schicht  $G_\varepsilon$  sehr dünn ist. Zum anderen entspricht dies wegen der unterschiedlichen Skalierung der orthogonalen Geschwindigkeitskomponenten von  $\mathbf{u}$  der Annahme, dass der Betrag des horizontalen Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}_S$  sehr viel größer als der der vertikalen Komponente  $w$  ist. Wir können damit in den transformierten Gleichungen die Terme mit dem Faktor  $\varepsilon$  weglassen. Anschließend transformieren wir diese vereinfachten Gleichungen wieder zurück auf das Gebiet  $G_\varepsilon$  und erhalten

$$\partial_t \mathbf{u}_S + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_S + \frac{|\mathbf{u}_S|^2}{|\mathbf{x}|} \mathbf{n} + \nabla_S p' = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u}_S + \nabla_S \Phi_Z, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p' = 0, \quad (3.12)$$

$$\operatorname{div}_S \mathbf{u}_S + \mathbf{n} \cdot \nabla w = 0 \quad (3.13)$$

und

$$\mathbf{n} \cdot \nabla (\nabla_S p) = \nabla_S (\mathbf{n} \cdot \nabla p), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla (\operatorname{div}_S \mathbf{u}_S) = \operatorname{div}_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_S). \quad (3.15)$$

Die Gleichung (3.12) für die potenzialkorrigierte Druckvariable  $p'$  ist die hydrostatische Approximation für den Druck  $p$  in der dünnen Schicht  $G_\varepsilon$ .

Damit haben wir durch die Annahme A-2 mit System (3.11) – (3.13) die reskalierten Gleichungen zu System (3.3), (3.4) in  $G_\varepsilon$  gewonnen. Weiterhin folgen aus (3.8), (3.9) die reskalierten Gleichungen (3.14), (3.15).

### 3.1.4 Geostrofische Approximation

Die reskalierten Gleichungen (3.11) – (3.15) bilden in diesem Abschnitt die Grundlage für die Anwendung der Annahme A-3 als Teil der Flachwasserapproximation. Wir formulieren zunächst die hydrostatische Approximation für den Druck  $p$  und stellen damit den Zusammenhang zwischen Druck und geopotenzieller Höhe  $\Phi$  der Schicht her. Anschließend nutzen wir die Annahme A-3 der Flachwasserapproximation, die die vertikale Abhängigkeit der horizontalen Gleichungskomponenten beseitigt. Schließlich leiten wir die prognostische Gleichung für die geopotenzielle Höhe  $\Phi$  her.

Zunächst wollen wir in Gleichung (3.11) die potenzialkorrigierte Druckvariable  $p'$  durch die geopotenzielle Höhe  $\Phi$  der Schicht ausdrücken. Dazu können wir mit der Definition in Gleichung (3.2) zunächst den Term  $\nabla_s p'$  in  $G_\varepsilon$  durch den Druckgradienten ersetzen, da der tangentielle Gradient des Geopotentials  $\nabla_s \Phi_E$  verschwindet, d. h.

$$\nabla_s p' = \frac{1}{\rho} \nabla_s p. \quad (3.16)$$

Wir leiten nun den Zusammenhang zwischen dem Druck  $p$  und der geopotenziellen Höhe  $\Phi$  her. Setzen wir in Gleichung (3.12) die Definition (3.2) ein, so folgt für den vertikalen Druckgradienten

$$\frac{1}{\rho} \mathbf{n} \cdot \nabla p = -\frac{1}{R_0} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_E = -\frac{g}{R_0}. \quad (3.17)$$

Damit erkennen wir, dass die Gleichung (3.12) tatsächlich die hydrostatische Approximation für den Druck  $p$  ist. Definieren wir nun die geopotenzielle Höhe  $\Phi$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  durch

$$\Phi(\mathbf{x}) := \frac{g}{R_0} (1 + h_\varepsilon(\mathbf{n}) - |\mathbf{x}|), \quad (3.18)$$

so ergibt sich durch vertikale Integration des Druckgradienten für  $\mathbf{x} \in G_\varepsilon$

$$p((1 + h_\varepsilon(\mathbf{n})) \mathbf{n}) - p(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^{(1+h_\varepsilon(\mathbf{n})) \mathbf{n}} \mathbf{n} \cdot \nabla p \, dx = -\rho \Phi(\mathbf{x}).$$

Der Faktor  $R_0$  in der Definition der geopotenziellen Höhe  $\Phi$  resultiert daraus, dass wir die Gleichungen in Abschnitt 3.1.1 auf das Gebiet  $G_\varepsilon$  mit dem Faktor  $R_0$  normiert haben. Unter der Annahme, dass der Druck  $p((1 + h_\varepsilon(\mathbf{n})) \mathbf{n})$  an der Schichtobergrenze Null ist, folgt für alle  $\mathbf{x} \in G_\varepsilon$

$$\rho \Phi(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}).$$

Zusammen mit Gleichung (3.16) gilt damit in  $G_\varepsilon$

$$\nabla_s p' = \nabla_s \Phi.$$

Die hydrostatische Approximation (3.17) hat auch für den geostrophischen Wind  $\mathbf{u}_G$  eine Konsequenz. Dazu setzen wir in der reskalierten Gleichung (3.14) die Gleichung (3.17) ein und erhalten mit

$$\mathbf{n} \cdot \nabla(\nabla_s p) = \nabla_s(\mathbf{n} \cdot \nabla p) = -\nabla_s \frac{\rho g}{R_0} = 0$$

die Höhenunabhängigkeit des Druckgradienten. Mit der Definition des geostrophischen Windes  $\mathbf{u}_G := -(\rho f)^{-1} \mathbf{n} \times \nabla_s p$ , siehe [Etl96], folgt daraus aber sofort auch die Höhenunabhängigkeit von  $\mathbf{u}_G$ , also

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_G = 0.$$

Mit diesen Vorbereitungen nutzen wir nun die Annahme A-3 der Flachwasserapproximation. Die vertikale Scherung der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten kann geostrophisch approximiert werden, d. h. es gilt in  $G_\varepsilon$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_s = \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_G = 0. \quad (3.19)$$

Für den Advektionsterm in Gleichung (3.11) bedeutet das

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_s = \mathbf{u}_s \cdot \nabla_s \mathbf{u}_s,$$

so dass sich Gleichung (3.11) in  $G_\varepsilon$  auch folgendermaßen schreibt:

$$\partial_t \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s \cdot \nabla_s \mathbf{u}_s + \nabla_s(\Phi - \Phi_Z) = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u}_s - \frac{|\mathbf{u}_s|^2}{|\mathbf{x}|} \mathbf{n}. \quad (3.20)$$

Da zum einen wegen Gleichung (3.19) die Horizontalgeschwindigkeit  $\mathbf{u}_s$  in vertikaler Richtung konstant fortgesetzt werden kann und zum anderen die Schicht  $G_\varepsilon$  als dünn angenommen wird, können wir Gleichung (3.20) auch auf die Einheitssphäre  $S$  fortsetzen.

Eine weitere Schlußfolgerung aus der geostrophischen Approximation (3.19) ist die Höhenunabhängigkeit der tangentialen Divergenz, denn es folgt mit der reskalierten Gleichung (3.15) in  $G_\varepsilon$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla(\operatorname{div}_s \mathbf{u}_s) = \operatorname{div}_s(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_s) = 0.$$

Dies nutzen wir nun bei der Integration der reskalierten Gleichung (3.13) über die Schichtdicke. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} w((1 + h_\varepsilon(\mathbf{n}))\mathbf{n}) - w((1 + h_{B,\varepsilon}(\mathbf{n}))\mathbf{n}) &= \int_{(1+h_{B,\varepsilon}(\mathbf{n}))\mathbf{n}}^{(1+h_\varepsilon(\mathbf{n}))\mathbf{n}} \mathbf{n} \cdot \nabla w \, dx \\ &= -(h_\varepsilon - h_{B,\varepsilon}) \operatorname{div}_s \mathbf{u}_s. \end{aligned}$$

Mit den dynamischen oberen und unteren Randbedingungen

$$\begin{aligned} w((1 + h_\varepsilon(\mathbf{n}))\mathbf{n}) &= \partial_t h_\varepsilon + \mathbf{u}_S \cdot \nabla_S h_\varepsilon, \\ w((1 + h_{B,\varepsilon}(\mathbf{n}))\mathbf{n}) &= \mathbf{u}_S \cdot \nabla_S h_{B,\varepsilon}, \end{aligned}$$

der Definition für die geopotenzielle Höhe der Orografie

$$\Phi_B(\mathbf{x}) := \frac{g}{R_0} (1 + h_{B,\varepsilon}(\mathbf{n}) - |\mathbf{x}|), \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

und mit der geopotenziellen Höhe der Schicht aus Gleichung (3.18) folgt daraus in  $S$

$$\partial_t \Phi + \mathbf{u}_S \cdot \nabla_S (\Phi - \Phi_B) + (\Phi - \Phi_B) \operatorname{div}_S \mathbf{u}_S = 0. \quad (3.21)$$

Die Gleichungen (3.20) und (3.21) stellen damit prognostische Gleichungen für den horizontalen Wind  $\mathbf{u}_S$  und die geopotenzielle Höhe  $\Phi$  der Schicht  $G_\varepsilon$  dar. Zur Vereinfachung der Notation beschreiben wir den horizontalen Wind  $\mathbf{u}_S$  durch das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}'$  mit der Zusatzbedingung  $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} = 0$ . Dieses  $\mathbf{u}'$  ist dabei nicht mit der Lösung von Gleichung (3.3) zu verwechseln. Außerdem ersetzen wir die geopotenzielle Höhe  $\Phi$  und die Bodenoroografie  $\Phi_B$  durch die zentrifugalbereinigten Funktionen

$$\begin{aligned} \Phi' &:= \Phi - \Phi_Z, \\ \Phi'_B &:= \Phi_B - \Phi_Z. \end{aligned}$$

Die Striche der neuen Bezeichnungen lassen wir gleich wieder weg und schreiben damit die Gleichungen (3.20) und (3.21) als die Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_S \mathbf{u} + \nabla_S \Phi = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{x}|} \mathbf{n}, \quad (3.22)$$

$$\partial_t \Phi + \mathbf{u} \cdot \nabla_S (\Phi - \Phi_B) + (\Phi - \Phi_B) \operatorname{div}_S \mathbf{u} = 0, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3.24)$$

in  $S$ . Die Gleichungen (3.22) – (3.24) nennen wir die sphärischen Flachwassergleichungen in Vektorformulierung.

Die Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) sind äquivalent zu den in der Literatur verwendeten Formulierungen, siehe z. B. [Côt88], [SP99], [GPF03], [HH02], [WDH<sup>+</sup>92], [SWD97]. Insbesondere die Äquivalenz zur Schreibweise in Kugelkoordinaten, siehe [WDH<sup>+</sup>92], [SWD97], kann mit Hilfe eines Wechsels vom erdfesten Koordinatensystem in die lokalen Koordinatensysteme gezeigt werden.

## 3.2 Skalare Formulierung

Die sphärischen Flachwassergleichungen in skalarer Formulierung leiten wir aus den Flachwassergleichungen in Vektorformulierung (3.22) – (3.24) ab. Die skalare Formulierung besteht aus den Vorticity- und Divergenzanteilen der Impulsgleichung (3.22),

der Erhaltungsgleichung für die geopotenzielle Höhe (3.23) und den Gleichungen der Helmholtz-Zerlegung.

Die Vorticity und die Divergenz definieren wir als die Tangentialrotation und Tangentialdivergenz des Geschwindigkeitsfeldes, siehe Anhang B. Für die Bestimmung der prognostischen Gleichungen für die Vorticity und die Divergenz berechnen wir in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 nacheinander die Tangentialrotation und die Tangentialdivergenz der Terme in Gleichung (3.22). Nach der Formulierung der Flachwassergleichungen in skalarer Formulierung in Abschnitt 3.2.3 zeigen wir die Äquivalenz von Vektorformulierung und skalarer Formulierung. Aus technischen Gründen fixieren wir für die Berechnung der tangentialen Differentialoperatoren, siehe Anhang B, eine offene Umgebung  $G \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  von  $S$ .

### 3.2.1 Der Advektionsterm

In diesem Abschnitt berechnen wir die Tangentialrotation und Tangentialdivergenz des Advektionsterms in Gleichung (3.22). Die Ergebnisse sind in den Sätzen 3.2.1 und 3.2.2 zusammengefasst.

Für den äußeren Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}$  an  $S$ , siehe Definition 3.1.1, gelten die folgenden grundlegenden Rechenregeln.

**Hilfssatz 3.2.1** *Für  $\mathbf{n}$  aus Definition 3.1.1 gelten in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  die Gleichungen*

$$\begin{aligned}\partial_i n_j &= \partial_j n_i, \\ n_i \partial_i n_j &= 0.\end{aligned}$$

Die Tangentialrotation des Advektionsterms in Gleichung (3.22) können wir mit dem folgenden Satz berechnen.

**Satz 3.2.1** *Für jede Vektorfunktion  $\mathbf{u} \in C^2(S, \mathbb{R}^3)$  mit der Eigenschaft  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  gilt auf  $S$*

$$\text{rot}_S(\mathbf{u} \cdot \nabla_S \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla_S(\text{rot}_S \mathbf{u}) + \text{rot}_S \mathbf{u} \text{ div}_S \mathbf{u}.$$

*Beweis:*

Es sei  $\mathbf{u} \in C^2(S, \mathbb{R}^3)$  mit  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  auf  $S$  gegeben. Wir setzen  $\mathbf{u}$  zu einer  $C^2(G, \mathbb{R}^3)$ -Funktion fort und bezeichnen diese Funktion wieder mit  $\mathbf{u}$ .

Da  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  auf  $S$  gilt und der Operator  $\text{rot}_S$  nur von den Werten seines Arguments auf  $S$  abhängt, folgt auf  $S$

$$\begin{aligned}\text{rot}_S(\mathbf{u} \cdot \nabla_S \mathbf{u}) &= \text{rot}_S(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{n} \cdot \text{rot}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \\ &= n_i \epsilon_{ijk} \partial_j (u_l \partial_l u_k) \\ &= n_i \epsilon_{ijk} \partial_j u_l \partial_l u_k + n_i \epsilon_{ijk} u_l \partial_j l u_k.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Für den ersten Term der rechten Seite kann man auf  $S$  zeigen

$$\begin{aligned}n_i \epsilon_{ijk} \partial_j u_l \partial_l u_k &= (\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{u}) \text{ div} \mathbf{u} - n_i (\nabla u_i \cdot \text{rot} \mathbf{u}) \\ &= \text{rot}_S \mathbf{u} \text{ div}_S \mathbf{u} + \text{rot}_S \mathbf{u} \text{ div}((\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}) - n_i (\nabla u_i \cdot \text{rot} \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Mit  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  folgt für den zweiten Term der obigen rechten Seite auf  $S$  die Gleichung

$$n_i \epsilon_{ijk} u_l \partial_{jl} u_k = \mathbf{u} \cdot \nabla_s (\text{rot}_s \mathbf{u}) - u_l (\partial_l \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{u}).$$

Nutzen wir auf  $S$  die Gleichungen  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  und  $\nabla_s (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0$ , dann folgt für das Funktional

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}) &:= \text{rot}_s \mathbf{u} \operatorname{div}((\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}) - n_j (\nabla u_j \cdot \text{rot} \mathbf{u}) - u_j (\partial_j \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{u}) \\ &= n_i \mathbf{n} \cdot \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) (\text{rot} \mathbf{n})_i - \partial_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) (\text{rot} \mathbf{u})_i \\ &= -\nabla_s (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \text{rot} \mathbf{u} = 0. \end{aligned}$$

Andererseits ist  $R$  so definiert, dass wir Gleichung (3.25) auf  $S$  auch in der Form

$$\text{rot}_s (\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla_s (\text{rot}_s \mathbf{u}) + \text{rot}_s \mathbf{u} \operatorname{div}_s \mathbf{u} + R(\mathbf{u})$$

schreiben können. Dies ist aber die behauptete Gleichung auf  $S$ . Die Rechenschritte des Beweises sind natürlich abhängig von der Wahl der Fortsetzung von  $\mathbf{u}$  auf  $G$ . Da aber beide Seiten der Behauptung auf  $S$  nur von den Werten der Funktion auf  $S$  abhängen, gilt die Behauptung auch für die ursprüngliche Funktion  $\mathbf{u} \in C^2(S, \mathbb{R}^3)$ . □

Als Vorbereitung für die Berechnung der Tangentialdivergenz des Advektionsterms in Gleichung (3.22) benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

**Hilfssatz 3.2.2** *Für jede Vektorfunktion  $\mathbf{u} \in C^2(S, \mathbb{R}^3)$  gelten auf  $S$  die Gleichungen*

$$\begin{aligned} u_i \mathbf{u} \cdot \nabla n_i &= |\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}|^2, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla n_i)^2 &= |\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}|^2. \end{aligned}$$

*Beweis:*

Vorbereitend berechnen wir die Ableitungen von  $\mathbf{n}$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} \nabla n_1 &= |\mathbf{x}|^{-3} (x_2^2 + x_3^2, -x_1 x_2, -x_1 x_3)^\top, \\ \nabla n_2 &= |\mathbf{x}|^{-3} (-x_1 x_2, x_1^2 + x_3^2, -x_2 x_3)^\top, \\ \nabla n_3 &= |\mathbf{x}|^{-3} (-x_1 x_3, -x_2 x_3, x_1^2 + x_2^2)^\top. \end{aligned}$$

Damit beweisen wir die Gleichungen nacheinander. Auf  $S$  ergibt sich für die erste Gleichung

$$\begin{aligned} u_i \mathbf{u} \cdot \nabla n_i &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} |\mathbf{x}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})^2) |\mathbf{x}|^{-3} \\ &= |\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}|^2. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung schließen wir auf  $S$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla n_i)^2 &= \frac{1}{|\mathbf{x}|^4} (u_1^2 (|\mathbf{x}|^2 - x_1^2) + u_2^2 (|\mathbf{x}|^2 - x_2^2) + u_3^2 (|\mathbf{x}|^2 - x_3^2) \\ &\quad - 2u_1 u_2 x_1 x_2 - 2u_1 u_3 x_1 x_3 - 2u_2 u_3 x_2 x_3) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

Damit sind beide Behauptungen bewiesen.

□

Wir können nun zur Berechnung der Tangentialdivergenz des Advektionsterms in Gleichung (3.22) kommen.

**Satz 3.2.2** Für jede Vektorfunktion  $\mathbf{u} \in C^2(S, \mathbb{R}^3)$  mit der Eigenschaft  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  gilt auf  $S$

$$\operatorname{div}_S(\mathbf{u} \cdot \nabla_S \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla_S(\operatorname{div}_S \mathbf{u}) + (\nabla_S u_i)^T \mathbf{A}^{ij} (\nabla_S u_j) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}.$$

Dabei ist der Tensor  $\mathbf{A}$  so definiert, dass für  $i, j, k, l = 1, 2, 3$  gilt

$$\mathbf{A}_{kl}^{ij} := \delta_{il} \delta_{jk}.$$

*Beweis:*

Es sei  $\mathbf{u} \in C^2(S, \mathbb{R}^3)$  mit  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  gegeben. Wir setzen  $\mathbf{u}$  zu einer  $\tilde{\mathbf{u}} \in C^2(G, \mathbb{R}^3)$ -Funktion konstant in Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  fort, d. h. es gilt

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = 0. \quad (3.26)$$

Im Folgenden lassen wir aber die Tilde der Übersichtlichkeit halber weg. Da in  $S$   $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  gilt und der Operator  $\operatorname{div}_S$  nur von den Werten seines Arguments in  $S$  abhängt, folgt in  $S$

$$\operatorname{div}_S(\mathbf{u} \cdot \nabla_S \mathbf{u}) = \operatorname{div}_S(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \operatorname{div}((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}). \quad (3.27)$$

Die Terme der rechten Seite berechnen wir genauer. Für den ersten Term gilt

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \partial_i u_j \partial_j u_i.$$

Beachten wir

$$\begin{aligned} \partial_i u_j \partial_j u_i &= (\partial_j u_i - n_j \mathbf{n} \cdot \nabla u_i) (\partial_i u_j - n_i \mathbf{n} \cdot \nabla u_j) \\ &= (\nabla_S u_i)_j (\nabla_S u_j)_i, \end{aligned}$$

so können wir in  $S$  auch schreiben

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + (\nabla_S u_i)_j (\nabla_S u_j)_i. \quad (3.28)$$

Für den zweiten Term gilt mit Gleichung (3.26)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) &= \partial_i (n_i n_j u_k \partial_k u_j) \\ &= u_k \partial_i (n_i n_j \partial_k u_j) + (\mathbf{n} \cdot \nabla u_i) (\mathbf{n} \cdot \partial_i \mathbf{u}) \\ &= u_k \partial_i (\partial_k (n_i n_j u_j) - \partial_k (n_i n_j) u_j) \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) - u_k \partial_i (\partial_k (n_i n_j) u_j). \end{aligned}$$

Den letzten Summanden der rechten Seite zerlegen wir weiter:

$$u_k \partial_i (\partial_k (n_i n_j) u_j) = u_k \partial_{ki} (n_i n_j) u_j + u_k \partial_k (n_i n_j) \partial_i u_j.$$



Für die beiden Terme der rechten Seite wiederum ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} u_k \partial_{ki}(n_i n_j) u_j &= u_j \mathbf{u} \cdot \nabla (n_j \operatorname{div} \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \nabla n_j) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{n} + u_j \operatorname{div} \mathbf{n} \mathbf{u} \cdot \nabla n_j \\ &= \operatorname{div} \mathbf{n} u_i \mathbf{u} \cdot \nabla n_i \end{aligned}$$

und mit Gleichung (3.26)

$$\begin{aligned} u_k \partial_k(n_i n_j) \partial_i u_j &= (\mathbf{n} \cdot \nabla u_j) (\mathbf{u} \cdot \nabla n_j) + (\mathbf{n} \cdot \partial_i \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \nabla n_i) \\ &= (\mathbf{u} \cdot \nabla n_i) (\partial_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u} \cdot \partial_i \mathbf{n}) \\ &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla n_i) (\mathbf{u} \cdot \partial_i \mathbf{n}) \\ &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla n_i)^2. \end{aligned}$$

Zusammenfassend lässt sich damit feststellen

$$\operatorname{div}((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) - \operatorname{div} \mathbf{n} u_i \mathbf{u} \cdot \nabla n_i + (\mathbf{u} \cdot \nabla n_i)^2.$$

Nutzen wir nun Hilfssatz 3.2.2 und die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathbf{n} = \frac{2}{|\mathbf{x}|}, \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

dann können wir anstelle dessen in  $S$  auch schreiben

$$\operatorname{div}((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \operatorname{div}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}.$$

Zusammen mit den Gleichungen (3.27) und (3.28) ergibt sich damit die Behauptung. □

### 3.2.2 Die Terme für Geopotenzial und Corioliskraft

In diesem Abschnitt berechnen wir die Tangentialrotation und die Tangentialdivergenz des Geopotenzialterms und des Coriolisterms in Gleichung (3.22).

Wir beginnen mit der Berechnung der Tangentialrotation und der Tangentialdivergenz des Terms für das Geopotenzial. Da nach Definition B.4 die Divergenz des Gradienten den Laplace-Beltrami-Operator ergibt, benötigen wir dazu nur noch Hilfssatz 3.2.4 für die Rotation des Gradienten. Der folgende Hilfssatz dient der Vorbereitung.

**Hilfssatz 3.2.3** *Für jede Funktion  $g \in C^1(S)$  bzw.  $g \in C^1(G)$  gelten in  $S$  bzw.  $G$  die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_s(g \mathbf{n}) &= \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}_s g = 0, \\ \operatorname{div}_s(g \mathbf{n}) &= \mathbf{n} \cdot \nabla_s g = 0. \end{aligned}$$

*Beweis:*

Es sei  $g \in C^1(S)$  bzw.  $g \in C^1(G)$  gegeben. Falls  $g \in C^1(S)$  ist, setzen wir  $g$  zu einer  $C^1(G)$ -Funktion fort und bezeichnen diese wieder mit  $g$ . Falls hingegen  $g \in C^1(G)$  gilt, fällt dieser Fortsetzungsschritt weg. Es folgt dann für die erste Gleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_s(g \mathbf{n}) &= \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}_s g = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}(g \mathbf{n}) = n_i \epsilon_{ijk} \partial_j (g n_k) = \\ & \partial_j g \epsilon_{ijk} n_i n_k + n_i g \epsilon_{ijk} \partial_j n_k = 0 \end{aligned}$$

in  $S$  bzw.  $G$ . Für die zweite Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_s(g \mathbf{n}) &= \operatorname{div}(g \mathbf{n} - g \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla_s g &= \mathbf{n} \cdot \nabla g - (\mathbf{n} \cdot \nabla g) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

in  $S$  bzw.  $G$ . Damit sind beide Behauptungen bewiesen. □

Wir können nun die Tangentialrotation des Geopotenzialgradienten berechnen.

**Hilfssatz 3.2.4** *Für jede skalare Funktion  $g \in C^2(S)$  gilt in  $S$*

$$\operatorname{rot}_s \nabla_s g = 0.$$

*Beweis:*

Es sei  $g \in C^2(S)$  und wir setzen  $g$  zu einer  $C^2(G)$ -Funktion fort und bezeichnen diese wieder mit  $g$ . Es gilt dann in  $S$  mit Hilfssatz 3.2.3

$$\operatorname{rot}_s \nabla_s g = \operatorname{rot}_s \nabla g - \operatorname{rot}_s((\mathbf{n} \cdot \nabla g) \mathbf{n}) = \operatorname{rot}_s \nabla g = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \nabla g = 0$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Es verbleibt nun, die Tangentialrotation und die Tangentialdivergenz des Coriolisterms in Gleichung (3.22) zu berechnen. Vorbereitend benötigen wir einige Rechenregeln, die wir in den folgenden Hilfssätzen zusammenstellen.

**Hilfssatz 3.2.5 (Produktregel, Rotation)** *Für alle Funktionen  $g \in C^1(S)$  und  $\mathbf{u} \in C^1(S, \mathbb{R}^3)$  gilt in  $S$  die Gleichung*

$$\operatorname{rot}_s(g \mathbf{u}) = -(\operatorname{rot}_s g) \cdot \mathbf{u} + g \operatorname{rot}_s \mathbf{u}.$$

*Beweis:*

Es seien  $g \in C^1(S)$  und  $\mathbf{u} \in C^1(S, \mathbb{R}^3)$  beliebig gewählt. Wir setzen  $g$  bzw.  $\mathbf{u}$  zu einer  $C^1(G)$ -Funktion bzw. zu einer  $C^1(G, \mathbb{R}^3)$ -Funktion fort und bezeichnen diese Funktionen wieder mit  $g$  bzw.  $\mathbf{u}$ . Es gilt dann in  $S$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_s(g \mathbf{u}) &= n_i \epsilon_{ijk} \partial_j (g u_k) = n_i \epsilon_{ijk} (\partial_j g u_k + g \partial_j u_k) \\ &= -(\operatorname{rot}_s g) \cdot \mathbf{u} + g \operatorname{rot}_s \mathbf{u} \end{aligned}$$

und damit auch die Behauptung.

□

**Hilfssatz 3.2.6** Für alle Vektorfunktionen  $\mathbf{u} \in C^1(S, \mathbb{R}^3)$  gilt in  $S$  die Gleichung

$$\operatorname{rot}_S(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) = \operatorname{div}_S \mathbf{u}.$$

*Beweis:*

Es sei  $\mathbf{u} \in C^1(S, \mathbb{R}^3)$  beliebig gewählt. Wir setzen  $\mathbf{u}$  zu einer  $C^1(G, \mathbb{R}^3)$ -Funktion fort und bezeichnen diese Funktion wieder mit  $\mathbf{u}$ . Dann gilt in  $S$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_S(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) &= n_i \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} n_l u_m) = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) n_i \partial_j (n_l u_m) \\ &= n_i \partial_j n_i u_j + n_i n_i \partial_j u_j - \partial_j (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} n_j) + \partial_j n_i n_j u_i \\ &= \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) = \operatorname{div}_S \mathbf{u} \end{aligned}$$

und damit auch die Behauptung.

□

**Bemerkung 3.2.1** Wegen der Gaußmann-Identität gilt für alle Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{a}| = 1$  die Gleichung

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \mathbf{a}). \quad (3.29)$$

Wenden wir den Hilfssatz 3.2.6 zunächst auf  $\mathbf{n} \times \mathbf{u}$  an und beachten dann noch den Hilfssatz 3.2.3, dann folgt für alle Vektorfunktionen  $\mathbf{u} \in C^1(S, \mathbb{R}^3)$  in  $S$

$$\operatorname{div}_S(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) = -\operatorname{rot}_S \mathbf{u}.$$

Analog zur Produktregel für die Tangentialrotation in Hilfssatz 3.2.5 notieren wir die Produktregel für die Tangentialdivergenz.

**Hilfssatz 3.2.7 (Produktregel, Divergenz)** Für alle Funktionen  $g \in C^1(S)$  und  $\mathbf{u} \in C^1(S, \mathbb{R}^3)$  gilt in  $S$  die Gleichung

$$\operatorname{div}_S(g \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla_S g + g \operatorname{div}_S \mathbf{u}.$$

*Beweis:*

Mit den Hilfssätzen 3.2.5 und 3.2.6 und der Beziehung  $\operatorname{rot}_S g = -\mathbf{n} \times \nabla_S g$  folgt die Behauptung sofort.

□

**Satz 3.2.3 (Coriolis term)** Für alle Vektorfunktionen  $\mathbf{u} \in C^1(S, \mathbb{R}^3)$  gelten in  $S$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_S(g \mathbf{n} \times \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \cdot \nabla_S g + g \operatorname{div}_S \mathbf{u}, \\ \operatorname{div}_S(g \mathbf{n} \times \mathbf{u}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla_S g - g \operatorname{rot}_S \mathbf{u}. \end{aligned}$$

*Beweis:*

Die erste Gleichung folgt sofort mit Hilfe der Hilfssätze 3.2.6 und 3.2.7. Für die zweite Gleichung nutzen wir die Bemerkung 3.2.1 und erhalten

$$\operatorname{div}_s(g \mathbf{n} \times \mathbf{u}) = -\operatorname{rot}_s(g \mathbf{u}).$$

Nutzen wir nun Hilfssatz 3.2.5 und beachten erneut die Definition  $\operatorname{rot}_s g = -\mathbf{n} \times \nabla_s g$ , so erhalten wir

$$\operatorname{div}_s(g \mathbf{n} \times \mathbf{u}) = (\operatorname{rot}_s g) \cdot \mathbf{u} - g \operatorname{rot}_s \mathbf{u} = (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \nabla_s g - g \operatorname{rot}_s \mathbf{u},$$

was die zweite behauptete Gleichung ergibt. □

### 3.2.3 Das Gleichungssystem

Wir kommen zu den Flachwassergleichungen in skalarer Formulierung. Mit den Aussagen der letzten beiden Abschnitte zeigen wir anschließend die Äquivalenz zur Vektorformulierung (3.22) – (3.24).

Es sei  $T > 0$  ein fixierter Zeitpunkt und  $I = (0, T)$  ein Zeitintervall. Weiter seien  $\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi : S \times I \rightarrow \mathbb{R}$  skalare Funktionen und  $\mathbf{u} : S \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Vektorfunktion auf  $S$ . Die skalare Formulierung der Flachwassergleichungen sei dann

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \zeta + \mathbf{u} \cdot \nabla_s \zeta + \zeta \delta + f \delta &= -\mathbf{u} \cdot \nabla_s f, \\ \partial_t \delta + \mathbf{u} \cdot \nabla_s \delta + \Delta_s \Phi - f \zeta &= -(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \nabla_s f - J(\mathbf{u}), \\ \partial_t \Phi + \mathbf{u} \cdot \nabla_s (\Phi - \Phi_B) + (\Phi - \Phi_B) \delta &= 0, \\ -\Delta_s \psi &= \zeta, \\ \Delta_s \chi &= \delta, \\ \operatorname{rot}_s \psi + \nabla_s \chi &= \mathbf{u}. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

$$\left. \begin{aligned} -\Delta_s \psi &= \zeta, \\ \Delta_s \chi &= \delta, \\ \operatorname{rot}_s \psi + \nabla_s \chi &= \mathbf{u}. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Dabei ist das Funktional  $J$  definiert durch

$$J(\mathbf{u}) := (\nabla_s u_i)^T \mathbf{A}^{ij} (\nabla_s u_j) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

mit dem Tensor  $\mathbf{A}^{ij}$  aus Satz 3.2.2. Das Funktional  $J$  beschreibt mit seinem ersten Term einen nichtlinearen Beitrag zur Divergenzänderung durch die Deformation des Geschwindigkeitsfeldes. Diese Nichtlinearität trat bereits bei den ebenen Flachwassergleichungen in Gleichung (2.10) auf. Den zweiten Term  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  im Funktional  $J$ , der nur vom Betrag der Geschwindigkeit abhängig ist, können wir als metrischen Term interpretieren, da dieser explizit von der Krümmung der Sphäre  $S$  abhängt, siehe Herleitung in Satz 3.2.2. In den ebenen Flachwassergleichungen in Gleichung (2.10) tritt der Term  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  dementsprechend nicht auf. Erfüllt die Funktion  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  die

Gleichungen (3.30), (3.31), dann heißt sie Lösung der Flachwassergleichungen in skalarer Formulierung. Wir sprechen vereinfachend auch von einer Lösung  $(\zeta, \delta, \Phi)$  der skalaren Formulierung (3.30), (3.31), wenn die Funktionen  $\psi, \chi$  und  $\mathbf{u}$  mit den diagnostischen Gleichungen der Helmholtz-Zerlegung (3.31) bestimmt sind und falls damit  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  eine Lösung von (3.30), (3.31) ist.

Die Flachwassergleichungen in Vektorformulierung (3.22) – (3.24) sind äquivalent zu den Flachwassergleichungen in skalarer Formulierung (3.30), (3.31). Um dies zu sehen, gehen wir zunächst von einer Lösung  $(\mathbf{u}, \Phi)$  der Gleichungen (3.22) – (3.24) aus. Zu  $\mathbf{u}$  definieren wir die skalaren Funktionen Vorticity  $\zeta := \text{rot}_S \mathbf{u}$  und Divergenz  $\delta := \text{div}_S \mathbf{u}$ . Mit den Sätzen 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 und den Hilfssätzen 3.2.4, 3.2.3 erhalten wir in  $S$  die Gleichungen (3.30). Definieren wir die Stromfunktion  $\psi$  und das Vektorpotenzial  $\chi$  entsprechend der Helmholtz-Zerlegung in Satz C.1, folgt außerdem Gleichung (3.31) in  $S$ . Die Funktion  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  ist also eine Lösung der Gleichungen (3.30), (3.31).

Sei nun umgekehrt  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  eine Lösung der Gleichungen (3.30), (3.31). Wegen der Identitäten auf  $S$

$$\text{rot}_S \text{rot}_S \psi = -\Delta_S \psi, \quad \text{div}_S \text{rot}_S \psi = 0, \quad (3.32)$$

Hilfssatz 3.2.4 und Definition B.4 folgt dann  $\text{rot}_S \mathbf{u} = \zeta$  und  $\text{div}_S \mathbf{u} = \delta$ . Setzen wir dies in die Gleichungen (3.30) ein und nutzen erneut die Sätze 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 und die Hilfssätze 3.2.4, 3.2.3, dann erhalten wir die Gleichungen (3.22), (3.23). Gleichung (3.24) folgt sofort aus der Darstellung von  $\mathbf{u}$  in Gleichung (3.31). Die Funktion  $(\mathbf{u}, \Phi)$  ist also eine Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24).

### 3.3 Transformation auf die unnormierte Sphäre

In Abschnitt 3.1.1 waren die normierten primitiven Gleichungen (3.3), (3.4) im normierten Gebiet  $G_\varepsilon$  der Ausgangspunkt für die Herleitung der sphärischen Flachwassergleichungen auf der Einheitssphäre  $S$ . Gehen wir aber von den physikalisch relevanten primitiven Gleichungen (3.1) in der nicht normierten Atmosphärenschicht aus und betrachten für diese die Flachwasserapproximation, so erhalten wir die Flachwassergleichungen auf der unnormierten Sphäre  $S_{R_0}$ . Die Flachwassergleichungen auf  $S_{R_0}$  in Vektorformulierung sind formal dieselben Gleichungen (3.22) – (3.24) wie im normierten Fall auf  $S$ . Den Zusammenhang zwischen der Lösung  $(\mathbf{v}, \Psi)$  auf  $S$  und der Lösung  $(\mathbf{u}, \Phi)$  auf  $S_{R_0}$  stellen wir in diesem Abschnitt durch die Angabe der Transformation der Lösungen dar.

Für einen Radius  $R > 0$  wollen wir unter den Flachwassergleichungen in Vektorformulierung auf  $S_R$  die Gleichungen (3.22) – (3.24) und unter den Flachwassergleichungen in skalarer Formulierung die Gleichungen (3.30), (3.31) jeweils auf dem Gebiet  $S_R$  verstehen. Wir interessieren uns nun für Lösungen der Anfangswertaufgaben der Flachwassergleichungen mit den dazugehörigen Anfangsdaten im normierten Fall  $R = 1$  und im physikalischen relevanten Fall  $R = R_0$  mit dem Erdradius  $R_0$ .

Es seien  $T > 0$  ein fixierter Zeitpunkt und  $I = (0, T)$  ein Zeitintervall. Zunächst wenden wir uns den Flachwassergleichungen in Vektorformulierung (3.22) – (3.24) zu. Es seien durch  $\mathbf{u}_0 : S_{R_0} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , mit  $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ , und  $\Phi_0 : S_{R_0} \rightarrow \mathbb{R}$  beliebige Anfangsdaten auf  $S_{R_0}$  gegeben. Dazugehörend definieren wir auf  $S$  die transformierten Anfangsdaten durch  $\mathbf{v}_0 : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , mit  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ , und  $\Psi_0 : S \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{y}) := R_0^{-1} \mathbf{u}_0(R_0 \mathbf{y}), \quad \Psi_0(\mathbf{y}) := R_0^{-2} \Phi_0(R_0 \mathbf{y})$$

für alle  $\mathbf{y} \in S$ . Für alle orts- und zeitabhängigen Funktionen  $(\mathbf{u}, \Phi)$  auf  $S_{R_0} \times I$  und  $(\mathbf{v}, \Psi)$  auf  $S \times I$  mit der Beziehung

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, t) = R_0^{-1} \mathbf{u}(R_0 \mathbf{y}, t), \quad \Psi(\mathbf{y}, t) = R_0^{-2} \Phi(R_0 \mathbf{y}, t), \quad \forall (\mathbf{y}, t) \in S \times I \quad (3.33)$$

gilt dann die folgende Aussage:  $(\mathbf{u}, \Phi)$  ist genau dann eine Lösung der Flachwassergleichungen auf  $S_{R_0}$  zu den Anfangsdaten  $(\mathbf{u}_0, \Phi_0)$ , wenn  $(\mathbf{v}, \Psi)$  eine Lösung der Flachwassergleichungen auf  $S$  zu den Anfangsdaten  $(\mathbf{v}_0, \Psi_0)$  ist.

Die analoge Aussage für die Flachwassergleichungen in skalarer Formulierung (3.30), (3.31) lautet wie folgt. Es seien durch  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0, \psi_0, \chi_0, \mathbf{u}_0)$  beliebige Anfangsdaten auf  $S_{R_0}$  gegeben, die natürlich die diagnostische Helmholtz-Zerlegung (3.31) erfüllen müssen. Dazu definieren wir die transformierten Anfangsdaten  $(\eta_0, \gamma_0, \Psi_0, \sigma_0, \tau_0, \mathbf{v}_0)$  auf  $S$  durch

$$\begin{aligned} \eta_0(\mathbf{y}) &:= \zeta_0(R_0 \mathbf{y}), & \gamma_0(\mathbf{y}) &:= \delta_0(R_0 \mathbf{y}), \\ \Psi_0(\mathbf{y}) &:= R_0^{-2} \Phi_0(R_0 \mathbf{y}), & \sigma_0(\mathbf{y}) &:= R_0^{-2} \psi_0(R_0 \mathbf{y}), \\ \tau_0(\mathbf{y}) &:= R_0^{-2} \chi_0(R_0 \mathbf{y}), & \mathbf{v}_0(\mathbf{y}) &:= R_0^{-1} \mathbf{u}_0(R_0 \mathbf{y}) \end{aligned}$$

für alle  $\mathbf{y} \in S$ . Für alle orts- und zeitabhängigen Funktionen  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  auf  $S_{R_0} \times I$  und  $(\eta, \gamma, \Psi, \sigma, \tau, \mathbf{v})$  auf  $S \times I$  mit der Beziehung

$$\begin{aligned} \eta(t, \mathbf{y}) &= \zeta(t, R_0 \mathbf{y}), & \gamma(t, \mathbf{y}) &= \delta(t, R_0 \mathbf{y}), \\ \Psi(t, \mathbf{y}) &= R_0^{-2} \Phi(t, R_0 \mathbf{y}), & \sigma(t, \mathbf{y}) &= R_0^{-2} \psi(t, R_0 \mathbf{y}), \\ \tau(t, \mathbf{y}) &= R_0^{-2} \chi(t, R_0 \mathbf{y}), & \mathbf{v}(t, \mathbf{y}) &= R_0^{-1} \mathbf{u}(t, R_0 \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

für alle  $(\mathbf{y}, t) \in S \times I$  gilt dann die folgende Aussage:  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  ist genau dann eine Lösung der Flachwassergleichungen auf  $S_{R_0}$  zu den Anfangsdaten  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0, \psi_0, \chi_0, \mathbf{u}_0)$ , wenn  $(\eta, \gamma, \Psi, \sigma, \tau, \mathbf{v})$  eine Lösung der Flachwassergleichungen auf  $S$  zu den Anfangsdaten  $(\eta_0, \gamma_0, \Psi_0, \sigma_0, \tau_0, \mathbf{v}_0)$  ist.

Mit den Transformationsgleichungen (3.33) und (3.34) können wir also Lösungen der Flachwassergleichungen auf der unnormierten Sphäre  $S_{R_0}$  auch als Lösungen der Flachwassergleichungen auf der Einheitssphäre  $S$  interpretieren und umgekehrt.

### 3.4 Erhaltungseigenschaften der Gleichungen

Die Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) bzw. (3.30), (3.31) definieren als System von partiellen Differenzialgleichungen die zeitliche Entwicklung des vorliegenden physikalischen Systems. Physikalisch sind neben den lokalen Veränderungen der prognostischen

Größen auch weitere diagnostische Größen von Interesse. Mit Hilfe der Erhaltungseigenschaften dieser Größen können wir Eigenschaften des gesamten Systems genauer beschreiben.

Wir beginnen in Abschnitt 3.4.1 mit den Definitionen der physikalisch interessanten diagnostischen Größen im Kontext der Flachwassergleichungen. In Abschnitt 3.4.2 leiten wir für diese die globalen und lokalen Erhaltungseigenschaften her. Wir fixieren einen Zeitpunkt  $T > 0$  und ein Zeitintervall  $I = (0, T)$ .

### 3.4.1 Definition der diagnostischen Größen

Im System der Flachwassergleichungen wollen wir nun als diagnostische Größen die Masse, die Energie, die absolute und die potenzielle Vorticity definieren. Mit der Flachwasserapproximation wird die Dynamik in der dünnen dreidimensionalen sphärischen Schicht  $G_\varepsilon$  durch die Dynamik auf der gekrümmten lokal zweidimensionalen Fläche  $S$  approximiert, siehe Abschnitt 3.1. Das bedeutet aber, dass die eben aufgezählten diagnostischen Größen auf  $S$  so definiert werden müssen, dass sie den ursprünglichen Größen in  $G_\varepsilon$  entsprechen.

In der Schicht  $G_\varepsilon$  ist die Masse  $m$  an Gas, das über einem Punkt auf  $S$  am Boden der Schicht liegt, die vertikal integrierte Dichte  $\rho$ . Ebenso sind die kinetische Energie  $K$  und die potenzielle Energie  $P$  über einem Punkt auf  $S$  die in  $G_\varepsilon$  vertikal integrierten Energiedichten  $\frac{\rho}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  und  $\rho g h$ . Damit erhalten wir an der Stelle  $\mathbf{x} \in S$  die Massendichte  $m(\mathbf{x})$ , die kinetische Energiedichte  $K(\mathbf{x})$  und die potenzielle Energiedichte  $P(\mathbf{x})$  durch die vertikalen Integrale in  $G_\varepsilon$

$$m(\mathbf{x}) = \int_{1+h_B(\mathbf{x})}^{1+h(\mathbf{x})} \rho dr,$$

$$K(\mathbf{x}) = \int_{1+h_B(\mathbf{x})}^{1+h(\mathbf{x})} \frac{\rho}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dr, \quad P(\mathbf{x}) = \int_{1+h_B(\mathbf{x})}^{1+h(\mathbf{x})} \rho g (r - 1) dr.$$

Wegen der Flachwasserapproximation ist die Dichte in  $G_\varepsilon$  konstant, also  $\rho = \text{konst.}$  Mit der sphärischen Reskalierung in Abschnitt 3.1.3 erhalten wir

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{u}_S + w^2 = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{u}_{\varepsilon,S} \cdot \mathbf{u}_{\varepsilon,S} + \varepsilon^2 w_\varepsilon^2 \approx \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{u}_S,$$

womit wegen Gleichung (3.19) der Term  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  höhenunabhängig ist. Zusammengenommen folgen damit durch Berechnung der vertikalen Integrationen die Gleichungen für

Masse, kinetische Energie und potenzielle Energie für alle  $\mathbf{x} \in S$

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}) &= \rho (h(\mathbf{x}) - h_B(\mathbf{x})) = \frac{\rho}{g} (\Phi(\mathbf{x}) - \Phi_B(\mathbf{x})), \\ K(\mathbf{x}) &= \frac{\rho}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} (h(\mathbf{x}) - h_B(\mathbf{x})) = \frac{\rho}{2g} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} (\Phi(\mathbf{x}) - \Phi_B(\mathbf{x})), \\ P(\mathbf{x}) &= \frac{\rho g}{2} h^2(\mathbf{x}) - h_B^2(\mathbf{x}) = \frac{\rho}{2g} \Phi^2(\mathbf{x}) - \Phi_B^2(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Wir erkennen insbesondere, dass die geopotenzielle Höhe  $\Phi$  auf  $S$  sowohl als Schichtdicke als auch als Massendichte interpretiert werden kann. Die Energie  $E$  an der Stelle  $\mathbf{x} \in S$  definieren wir als die Summe von kinetischer Energie und potenzieller Energie, also

$$E(\mathbf{x}) := K(\mathbf{x}) + P(\mathbf{x}).$$

Für die primitiven Gleichungen (3.3), (3.4) im dreidimensionalen Gebiet  $G_\varepsilon$  stimmen die Definitionen der Vorticity  $\zeta$  und der Tangentialrotation  $\text{rot}_S \mathbf{u}$  formal überein, siehe [Et196]. Wegen Hilfssatz 3.2.3 ist  $\zeta$  damit unabhängig von der vertikalen Geschwindigkeitskomponente  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . Durch die Flachwasserapproximation, bei der wir zur horizontalen Geschwindigkeitskomponente  $\mathbf{u}_S$  als prognostische Variable übergehen, siehe Abschnitt 3.1.4, bleibt daher die Vorticity erhalten. Für die Vorticity  $\zeta$  im System der Flachwassergleichungen gilt also

$$\zeta = \text{rot}_S \mathbf{u}.$$

Nach [Ped87] sind die absolute Vorticity und die potenzielle Vorticity für die Flachwassergleichungen definiert durch

$$\zeta + f, \quad \frac{\zeta + f}{\Phi - \Phi_B}.$$

### 3.4.2 Globale und lokale Erhaltungseigenschaften

Die diagnostischen Größen Masse, Energie, absolute und potenzielle Vorticity erfüllen Erhaltungseigenschaften verschiedener Art. Für die Größen unterscheiden wir die globale Erhaltung, die lokale Erhaltung und die Erhaltung entlang der Strömungslinien. Genauer meinen wir mit der globalen Erhaltung einer Größe, dass das Integral über das gesamte Gebiet  $S$  zeitlich erhalten sein muss. Für die lokale Erhaltung muss das Integral über ein Flächenstück, das sich mit der Strömung mitbewegt, konstant sein. Die Masse und die absolute Vorticity werden sowohl global als auch lokal erhalten. Während die Energie nur global erhalten wird, bleibt die potenzielle Vorticity entlang der Strömungslinien erhalten.

Wir beginnen mit der lokalen Masseerhaltung. Zunächst fixieren wir einen Zeitpunkt  $T > 0$  und das Zeitintervall  $I = (0, T)$ . Weiter fixieren wir einen Zeitpunkt  $t_0 \in I$  und definieren wie in Abschnitt 4.2.3 für  $(\mathbf{x}, t) \in S \times I$  die Trajektorienfunktion



$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ , die die Position eines Teilchens zum Zeitpunkt  $t$  angibt, welches zum Zeitpunkt  $t_0$  am Ort  $\mathbf{x}$  war, d. h. es gilt für alle  $(\mathbf{x}, t) \in S \times I$

$$\partial_t \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t).$$

Betrachten wir ein beliebiges Flächenstück  $A \subset S$ , so ist für  $t \in I$

$$A_t := \mathbf{X}(A, t)$$

das mit der Strömung mitbewegte Flächenstück  $A$ . Es folgt damit die lokale Masseerhaltung, denn mit Gleichung (3.23) folgt für die Zeitableitung der Masse im Flächenstück  $A_t$  für alle  $t \in I$

$$\begin{aligned} \frac{g}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_t} m(\mathbf{x}, t) d\sigma &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_t} \Phi(\mathbf{x}, t) - \Phi_B(\mathbf{x}) d\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int_A (\Phi(\mathbf{X}, t) - \Phi_B(\mathbf{X})) |\det \mathbf{X}'| d\sigma \\ &= \int_A \frac{d\Phi(\mathbf{X}, t) - \Phi_B(\mathbf{X})}{dt} |\det \mathbf{X}'| + (\Phi(\mathbf{X}, t) - \Phi_B(\mathbf{X})) \frac{d|\det \mathbf{X}'|}{dt} d\sigma \\ &= \int_A \left( \frac{\partial \Phi - \Phi_B}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_s (\Phi - \Phi_B) + (\Phi - \Phi_B) \operatorname{div}_s \mathbf{u} \right) |\det \mathbf{X}'| d\sigma \\ &= \int_{A_t} \frac{\partial \Phi - \Phi_B}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_s (\Phi - \Phi_B) + (\Phi - \Phi_B) \operatorname{div}_s \mathbf{u} d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Für die Umformungen haben wir  $\mathbf{X}$  auf eine offene Umgebung von  $S$  fortgesetzt, so dass die Jacobimatrix  $\mathbf{X}'$  auf  $S$  im  $\mathbb{R}^3$  berechnet werden kann. Es gilt nach [CM93] in  $S$

$$\frac{d|\det \mathbf{X}'|}{dt} = \operatorname{div}_s \mathbf{u} |\det \mathbf{X}'|.$$

Setzen wir insbesondere  $A := S$ , so folgt die globale Masseerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S m(\mathbf{x}) d\sigma = 0.$$

Ausgehend von der Vorticitygleichung in Gleichung (3.30) führen die gleichen mathematischen Umformungen auf die lokale Erhaltung der absoluten Vorticity, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_t} \zeta + f d\sigma = 0.$$

Für  $A := S$  folgt ebenso die globale Erhaltung der absoluten Vorticity

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \zeta + f d\sigma = 0.$$

Für den Nachweis der globalen Energieerhaltung multiplizieren wir die Gleichung (3.22) mit  $(\Phi - \Phi_B) \mathbf{u}$  und die Gleichung (3.23) mit  $\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ . Es folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi - \Phi_B) \mathbf{u} \cdot (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u} + \nabla_s \Phi) \\ &= \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_B) [\partial_t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla_s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})] + (\Phi - \Phi_B) \mathbf{u} \cdot \nabla_s \Phi \end{aligned}$$

und

$$0 = \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \partial_t(\Phi - \Phi_B) + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div}_s((\Phi - \Phi_B) \mathbf{u}).$$

Die Summe der beiden Gleichungen ergibt mit Hilfssatz 3.2.7

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \partial_t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}(\Phi - \Phi_B)) + \frac{1}{2} \operatorname{div}_s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}(\Phi - \Phi_B) \mathbf{u}) + (\Phi - \Phi_B) \mathbf{u} \cdot \nabla_s \Phi \\ &= \frac{g}{\rho} (\partial_t K + \operatorname{div}_s(K \mathbf{u})) + (\Phi - \Phi_B) \mathbf{u} \cdot \nabla_s \Phi. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir schließlich die Gleichung (3.23) mit  $\Phi$  und addieren dies zur letzten Gleichung, dann folgt erneut mit Hilfssatz 3.2.7

$$\partial_t E + \operatorname{div}_s(K \mathbf{u}) + \frac{\rho}{g} \operatorname{div}_s(\Phi(\Phi - \Phi_B) \mathbf{u}) = 0.$$

Die Integration über  $S$  und die Anwendung der Formel für die partielle Integration in Bemerkung B.3 ergibt die globale Energieerhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S E d\sigma = 0.$$

Abschließend kommen wir zur Erhaltung der potenziellen Vorticity entlang der Strömungslinien. Wir setzen dazu physikalisch sinnvoll voraus, dass die Schichtdicke  $\Phi - \Phi_B$  ungleich Null ist. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \frac{\zeta + f}{\Phi - \Phi_B} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla_s \left( \frac{\zeta + f}{\Phi - \Phi_B} \right) &= \frac{1}{\Phi - \Phi_B} (\partial_t(\zeta + f) + \mathbf{u} \cdot \nabla_s(\zeta + f)) \\ &\quad + (\zeta + f) \left( -\frac{1}{(\Phi - \Phi_B)^2} \right) (\partial_t(\Phi - \Phi_B) + \mathbf{u} \cdot \nabla_s(\Phi - \Phi_B)). \end{aligned}$$

Setzen wir hier die  $\zeta$ - und  $\Phi$ -Gleichung aus Gleichung (3.30) ein, so erhalten wir

$$\partial_t \left( \frac{\zeta + f}{\Phi - \Phi_B} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla_s \left( \frac{\zeta + f}{\Phi - \Phi_B} \right) = -\frac{\zeta + f}{\Phi - \Phi_0} \operatorname{div}_s \mathbf{u} + \frac{\zeta + f}{\Phi - \Phi_0} \operatorname{div}_s \mathbf{u} = 0.$$

## 3.5 Analytische Lösungen

Analytische Lösungen der Flachwassergleichungen ermöglichen nicht nur einen Einblick in die Dynamik des physikalischen Systems, sondern bieten auch eine Möglichkeit für die Verifikation des numerischen Verfahrens. Die hier vorgestellten Lösungen sind im Prinzip Festkörperrotationen um Achsen, die nicht notwendigerweise mit der Rotationsachse der Erde übereinstimmen. Wir haben dabei die Möglichkeit, eine Vielzahl von meridionalen Windverteilungen zuzulassen. Durch einen Wechsel des Koordinatensystems können schließlich sogar instationäre Lösungen hergeleitet werden.

In Abschnitt 3.5.1 beschreiben wir die Transformationen im Zusammenhang mit dem Wechsel des Koordinatensystems. Danach stellen wir in den Abschnitten 3.5.2 und 3.5.3 Familien von stationären und instationären Lösungen vor.

### 3.5.1 Wechsel des Koordinatensystems

Bei der Berechnung von analytischen Lösungen der Flachwassergleichungen werden wir mehrfach Koordinatensysteme wechseln. Die dabei auftretenden Transformationen von Vektoren und Funktionen beschreiben wir in diesem Abschnitt näher. Dazu betrachten wir zu einem Vektor  $\mathbf{x}$  den Koordinatenvektor bezüglich einer fixierten Basis. Der Koordinatenvektor von  $\mathbf{x}$  enthält als jeweilige Komponente die Projektion von  $\mathbf{x}$  auf den jeweiligen Basisvektor. Die Transformation, die einem beliebigen Vektor  $\mathbf{x}$  seinen Koordinatenvektor zuordnet, nennen wir den Koordinatenwechsel  $\phi$ . Mit  $\phi$  ordnen wir schließlich einer vektorwertigen Funktion  $\mathbf{u}$  ihre Koordinatendarstellung bezüglich der Basis zu, die dem Koordinatenvektor  $\phi(\mathbf{x})$  den Koordinatenvektor  $\phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  zuordnet. Bei einem Basiswechsel ändert sich damit diese basisabhängige Koordinatendarstellung einer Funktion. Mit der Transformation der Koordinatendarstellung einer Funktion bei einem Basiswechsel beschreiben wir dann formal den Wechsel des Koordinatensystems für diese Funktion.

Für das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$  von zwei Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  schreiben wir  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  und wir bezeichnen mit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^3$ . Zu einem Vektor im  $\mathbb{R}^3$  definieren wir nun den Koordinatenvektor bezüglich einer fixierten Basis.

**Definition 3.5.1 (Koordinatenvektor)** *Es seien  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  eine Orthonormalbasis im  $\mathbb{R}^3$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  ein beliebiger Vektor. Durch die Basisdarstellung des Vektors*

$$\mathbf{x} = y_i \mathbf{c}_i$$

*definieren wir die Koordinaten  $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$  bezüglich der Basis  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ . Als Koordinatenvektor von  $\mathbf{x}$  bezüglich  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  definieren wir den Vektor*

$$\mathbf{y} := y_i \mathbf{e}_i.$$

**Bemerkung 3.5.1** *Der Koordinatenvektor eines Vektors  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  bezüglich der Standardbasis ist der Vektor  $\mathbf{x}$  selber.*

**Definition 3.5.2 (Koordinatenwechsel)** Es seien  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  eine Orthonormalbasis im  $\mathbb{R}^3$  und  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Transformationsfunktion, die jedem Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  seinen Koordinatenvektor  $\mathbf{y}$  bezüglich der Basis  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  zuordnet. Wir bezeichnen  $\phi$  als den Koordinatenwechsel bezüglich der Basis  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ . Genauer gilt für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{e}_i, \\ \phi^{-1}(\mathbf{y}) &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{c}_i.\end{aligned}$$

**Bemerkung 3.5.2** Die Gleichungen für den Koordinatenwechsel in Definition 3.5.2 gelten wegen der folgenden Überlegungen. Es seien  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  ein Vektor und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  der dazugehörige Koordinatenvektor mit  $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ . Da die Basis  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  orthonormal ist, gilt für die Koordinaten  $y_1, y_2, y_3$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{c}_i & \Leftrightarrow & & y_i &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_i, & \text{für } i = 1, 2, 3, \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{e}_i & \Leftrightarrow & & y_i &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_i, & \text{für } i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Damit folgt für den Koordinatenwechsel  $\phi$  bezüglich  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \mathbf{y} = y_i \mathbf{e}_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{e}_i, \\ \phi^{-1}(\mathbf{y}) &= \mathbf{x} = y_i \mathbf{c}_i = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{c}_i.\end{aligned}$$

**Bemerkung 3.5.3** Wegen Bemerkung 3.5.1 ist der Koordinatenwechsel  $\phi$  bezüglich der Standardbasis die Identität.

**Bemerkung 3.5.4** Betrachten wir für jeden Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  eine Orthonormalbasis  $(\mathbf{c}_1(t), \mathbf{c}_2(t), \mathbf{c}_3(t))$ , so bezeichnen wir die dazugehörigen Koordinatenwechsel mit  $\phi_t$ .  $\phi_t$  ist damit ein zeitabhängiger Koordinatenwechsel. Anstelle von  $\phi_t$  schreiben wir dann auch  $\phi$ .

In den folgenden beiden Abschnitten transformieren wir Funktionen bei einem Wechsel des Koordinatensystems. Dazu benötigen wir den Begriff der Koordinatendarstellung einer Funktion bezüglich einer Basis. Die basisabhängige Koordinatendarstellung kann bei einem Basiswechsel auch transformiert werden. Es seien eine skalare Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und eine vektorwertige Funktion  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben. Betrachten wir  $\Phi$  und  $\mathbf{u}$  bezüglich einer Orthonormalbasis  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ , so soll das bedeuten, dass wir als neue Argumente der Funktionen  $\Phi$  und  $\mathbf{u}$  die Koordinatenvektoren bezüglich der Orthonormalbasis  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  betrachten. Da die Funktionswerte von  $\mathbf{u}$  auch Vektoren sind, interpretieren wir auch diese als Koordinatenvektoren dieser Basis. Dies bedeutet aber letztlich, dass die Funktionen  $\Phi$  und  $\mathbf{u}$  bezüglich der Basis  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  den Funktionen

$$\Phi \circ \phi^{-1}, \quad \phi \circ \mathbf{u} \circ \phi^{-1} \tag{3.35}$$

entsprechen. Dies führt zum Begriff der Koordinatendarstellung einer Funktion.

**Definition 3.5.3 (Koordinatendarstellung einer Funktion)** *Es seien  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  eine Orthonormalbasis im  $\mathbb{R}^3$  und die Funktionen  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben. Weiter sei  $\phi$  der Koordinatenwechsel bezüglich  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ . Wir bezeichnen dann die Funktionen in (3.35) als die Koordinatendarstellungen der Funktionen  $\Phi$  bzw.  $\mathbf{u}$  bezüglich  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ .*

**Bemerkung 3.5.5** *Wegen Bemerkung 3.5.3 sind Funktionen und deren Koordinatendarstellung bezüglich der Standardbasis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  identisch.*

Für eine fixierte Orthonormalbasis  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  ist damit der Wechsel von einer Funktion zu ihrer Koordinatendarstellung bezüglich  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  die Transformation der Funktion von der Koordinatendarstellung bzgl.  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  in die Darstellung bzgl.  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ .

Abschließend betrachten wir die Transformation des Gradienten einer Funktion bei einem Wechsel des Koordinatensystems von  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  nach  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ . Zu den Funktionen  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  seien  $\Psi$  und  $\mathbf{v}$  deren Koordinatendarstellungen. Wir erhalten für die Transformation der Gradienten von  $\Phi$  und  $\mathbf{u}$  die Gleichungen

$$\nabla \Phi = \mathbf{e}_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \mathbf{c}_i \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} = \mathbf{c}_i \mathbf{e}_i \cdot \nabla \Psi, \quad (3.36)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{c}_i \frac{\partial (\phi^{-1} \circ \mathbf{v})}{\partial y_i} = \mathbf{c}_i \mathbf{e}_i \cdot \nabla (\phi^{-1} \circ \mathbf{v}). \quad (3.37)$$

### 3.5.2 Stationäre Lösungen

Wir kommen nun zu stationären Lösungen der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24). Dazu definieren wir zunächst den Begriff der stationären Lösung. Anschließend leiten wir Eigenschaften für eine Funktion her, die äquivalent dazu sind, dass die Funktion eine stationäre Lösung der Impulsbilanz (3.22) ist. Mit Hilfe dieser Charakterisierung der Stationarität berechnen wir eine Vielzahl von Beispielen für stationäre Lösungen.

Die Funktionen  $\mathbf{u} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  heißen stationäre Lösungen der Gleichungen (3.22) – (3.24), falls sie das folgende Gleichungssystem in  $S$  erfüllen:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u} + \nabla_s \Phi = -f \mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{x}|} \mathbf{n}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_s (\Phi - \Phi_B) + (\Phi - \Phi_B) \operatorname{div}_s \mathbf{u} = 0, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.40)$$

**Bemerkung 3.5.6** *Wir definieren zur Funktion  $\mathbf{u}$  die Vorticity  $\zeta = \operatorname{rot}_s \mathbf{u}$  und die Divergenz  $\delta = \operatorname{div}_s \mathbf{u}$ . Wegen Abschnitt 3.2.3 ist  $(\mathbf{u}, \Phi)$  genau dann eine stationäre Lösung von (3.22) – (3.24), wenn  $(\zeta, \delta, \Phi)$  eine stationäre Lösung von (3.30), (3.31) ist.*

### Charakterisierung von Stationarität

Der folgende Hilfssatz liefert uns für ein Windfeld  $\mathbf{u}$  und ein Geopotenzialfeld  $\Phi$  äquivalente Bedingungen dazu, ob  $(\mathbf{u}, \Phi)$  eine Lösung der stationären Impulsbilanz (3.38) ist. In diesem Sinne können wir damit die Eigenschaft, eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) zu sein, charakterisieren.

**Hilfssatz 3.5.1** *Für die Vektorfunktion  $\mathbf{u} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  und die skalare Funktion  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$  erfüllen die stationäre Gleichung (3.38) in  $S$ .
2. Es gilt in  $S$  die Gleichung

$$\operatorname{div}_s((f + \operatorname{rot}_s \mathbf{u}) \mathbf{u}) = 0$$

und es gibt ein  $\mathbf{x}_0 \in S$  und eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $\mathbf{x} \in S$  gilt

$$\Phi(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} (\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u} + f \mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{y} + c.$$

3. Es gelten in  $S$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}_s((f + \operatorname{rot}_s \mathbf{u}) \mathbf{u}), \\ \Delta_s \Phi &= - \operatorname{div}_s(\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u} + f \mathbf{n} \times \mathbf{u}). \end{aligned}$$

*Beweis:*

Es seien  $\mathbf{u} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  und  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  beliebige Felder in  $S$ .

(1)  $\rightarrow$  (3): Es gelte (1) und damit erfüllen  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$  die stationäre Gleichung (3.38) in  $S$ . Wenden wir auf die Gleichung (3.38) die Tangentialrotation an und nutzen nacheinander Hilfssatz 3.2.4, Hilfssatz 3.2.3, Satz 3.2.1, Satz 3.2.3 und Hilfssatz 3.2.7, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{rot}_s(\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u} + f \mathbf{n} \times \mathbf{u}) \\ &= \operatorname{rot}_s(\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u}) + \operatorname{rot}_s(f \mathbf{n} \times \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \nabla_s(f + \operatorname{rot}_s \mathbf{u}) + (f + \operatorname{rot}_s \mathbf{u}) \operatorname{div}_s \mathbf{u} \\ &= \operatorname{div}_s((f + \operatorname{rot}_s \mathbf{u}) \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Damit gilt die erste Gleichung von (3). Wenden wir dann auf Gleichung (3.38) die Tangentialdivergenz an und beachten Hilfssatz 3.2.3, so folgt sofort die zweite Gleichung von (3).

(3)  $\rightarrow$  (2): Es seien die Gleichungen aus (3) von  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$  erfüllt. Die erste Gleichung von (2) gilt sofort. Wir definieren das Funktional  $\mathbf{F}$  durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) := -\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u} - f \mathbf{n} \times \mathbf{u} - \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\cdot|} \mathbf{n}.$$

Mit Hilfe derselben Umformungen wie im ersten Beweisteil folgt in  $S$

$$\operatorname{rot}_S \mathbf{F} = 0.$$

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes im  $\mathbb{R}^3$  folgt dann für beliebige stückweise glatt berandete Flächenstücke  $S' \subset S$  die Gleichung

$$\int_{\partial S'} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{S'} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{u}) d\sigma = 0.$$

Da die Hyperfläche  $S$  einfach zusammenhängend ist, folgt damit aber, dass für  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in S$  das Wegintegral  $\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{y}$  unabhängig vom Integrationsweg ist. Für ein fixiertes  $\mathbf{x}_0 \in S$  definieren wir damit das skalare Feld  $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\Psi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{y}.$$

Wegen  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0$  in  $S$ , folgt in  $S$  weiter:

$$\nabla_S \Psi = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad \Delta_S \Psi = \operatorname{div}_S \mathbf{F}(\mathbf{u}).$$

Nutzen wir die zweite Gleichung in (3) aus, so folgt in  $S$

$$\Delta_S(\Psi - \Phi) = 0.$$

Nach [Aub98, Theorem 4.7.] ist die Lösung der Poissongleichung bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt, so dass es ein  $c \in \mathbb{R}$  gibt, dass für alle  $\mathbf{x} \in S$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + c$$

gilt. Das ist aber die zweite Gleichung, die für (2) gelten soll.

(2)  $\rightarrow$  (1): Es seien die Gleichungen aus (2) von  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$  für ein  $\mathbf{x}_0 \in S$  und  $c \in \mathbb{R}$  erfüllt. Definieren wir das Funktional  $\mathbf{F}$  wie im letzten Beweisteil, so folgt wegen  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0$  in  $S$  die Gleichheit

$$\nabla_S \Phi = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

in  $S$  und damit die Behauptung von (1). Zusammen genommen haben wir gezeigt, dass die Aussagen (1) – (3) äquivalent sind.

□

**Bemerkung 3.5.7** In Hilfssatz 3.5.1 wird die erste Gleichung in Teil (2) benötigt, um die Wegunabhängigkeit des Wegintegrals in Teil (2) zu sichern.

### Beispiele stationärer Lösungen

In den folgenden Beispielen stellen wir stationäre Lösungen der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) zusammen. Das erste Beispiel 3.5.1 beschreibt eine Zonalströmung, deren meridionale Windverteilung durch eine wählbare Funktion  $u$  gegeben ist, siehe [BHS89], [WDH<sup>+</sup>92, Test 3] und [GPS03]. Die folgenden Beispiele 3.5.2 – 3.5.5 basieren auf Beispiel 3.5.1 und konkretisieren die meridionale Windverteilung. Physikalische Bedeutung hat insbesondere das Beispiel 3.5.5 des isolierten zonalen Strahlstromes, da wir damit einen idealisierten Strahlstrom in der oberen Troposphäre modellieren können, siehe Abschnitt 2.1.2. Das Beispiel 3.5.6 der vorticityfreien Strömung hat nur theoretische Bedeutung, da im System keine Masse vorhanden ist. Abschließend betrachten wir für die Flachwassergleichungen ohne Corioliskraft das Beispiel 3.5.7 einer rotationssymmetrischen Strömung, das in Abschnitt 3.5.3 die Grundlage für die Berechnung instationärer Lösungen bildet.

**Beispiel 3.5.1 (Zonalströmung mit meridionaler Abhängigkeit)** In diesem Beispiel betrachten wir eine Zonalströmung, deren Betrag nur meridional abhängig ist. Diese Abhängigkeit wird durch die meridionale Windverteilung  $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Das Windfeld  $\mathbf{u}$  definieren wir durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := u(x_3) \mathbf{i}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S. \quad (3.41)$$

Dabei ist  $\mathbf{i}(\mathbf{x})$  der Einheitsvektor, der an der Stelle  $\mathbf{x} \in S$  in Ostrichtung zeigt, also

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Maximalwert  $c_0 := \max_{x \in [0,1]} |u(x)|$  der Windverteilung ist nach Abschnitt 3.3 der Wert  $R_0 c_0$  die maximale Windgeschwindigkeit für das auf  $S_{R_0}$  transformierte Windfeld. Definieren wir die Windverteilung  $u$  so, dass  $c_0 = \frac{u_0}{R_0}$  für eine fixierte Geschwindigkeit  $u_0$  gilt, dann folgt, dass  $u_0$  die maximale Windgeschwindigkeit des Windes auf  $S_{R_0}$  ist. Das Orografiefeld  $\Phi_B : S \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir als eine Konstante, als

$$\Phi_B := \text{konst.}$$

Wir suchen nun ein Geopotenzialfeld  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $(\mathbf{u}, \Phi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$  ist. Dazu berechnen wir zu  $\mathbf{u}$  in  $S$  die Gleichungen

$$\operatorname{div}_S \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla_S f = 0$$

und ebenso auch

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_S \operatorname{rot}_S \mathbf{u} = 0.$$

Wir erhalten damit in  $S$

$$\operatorname{div}_S((f + \operatorname{rot}_S \mathbf{u}) \mathbf{u}) = 0$$



und definieren das Geopotenzialfeld für ein  $\mathbf{x}_0 \in S$  und  $c \in \mathbb{R}$  durch

$$\Phi(\mathbf{x}) := - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} (\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u} + f \mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{y} + c, \quad \forall \mathbf{x} \in S.$$

Dabei nehmen wir an, dass das Wegintegral für  $\mathbf{x} \in S$  endliche Werte liefert. Wir können  $\Phi$  alternativ auch als Lösung der Poissongleichung

$$\Delta_s \Phi = - \operatorname{div}_s (\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u} + f \mathbf{n} \times \mathbf{u})$$

definieren. Mit Hilfssatz 3.5.1 folgt in beiden Fällen, dass  $(\mathbf{u}, \Phi)$  die Gleichung (3.38) erfüllt.

Die Integraldarstellung von  $\Phi$  formen wir weiter um. Dazu fixieren wir  $\mathbf{x}_0 \in S$  auf dem Äquator und wählen z. B.  $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T$ . Für die beiden Summanden des Integranden erhalten wir für alle  $\mathbf{x} \in S$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= - \frac{u^2(x_3) x_3}{1 - x_3^2} \begin{pmatrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \\ x_3^2 - 1 \end{pmatrix} + \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u}(\mathbf{x})), \\ f \mathbf{n} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= - \frac{f u(x_3)}{\sqrt{1 - x_3^2}} \begin{pmatrix} x_1 x_3 \\ x_2 x_3 \\ x_3^2 - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Da der Tangentialvektor  $d\mathbf{x}$  entlang des Integrationsweges orthogonal auf dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  von  $S$  steht, d. h.  $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} = 0$  gilt, folgt für alle  $\mathbf{x} \in S$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \left( \frac{u^2 y_3}{1 - y_3^2} + \frac{f u}{\sqrt{1 - y_3^2}} \right) \begin{pmatrix} y_1 y_3 \\ y_2 y_3 \\ y_3^2 - 1 \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{y} + c \\ &= - \int_0^{\arcsin x_3} \tan \varphi u^2(\sin \varphi) + 2 \Omega \sin \varphi u(\sin \varphi) d\varphi + c. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Der Integrationsweg führt dabei zunächst entlang eines Breitenkreises und anschließend entlang eines Längenkreises. Der erste Beitrag ist Null und der zweite Beitrag entspricht der Integration entlang des Winkels  $\varphi$ . Die geografische Breite des Punktes  $\mathbf{x}$  ist dann genau der Wert  $\arcsin x_3$ .

Da wir an einer Lösung der gesamten stationären Flachwassergleichungen (3.38) – (3.40) interessiert sind, bleibt noch zu zeigen, dass die Gleichung (3.39) erfüllt ist. Wegen  $\operatorname{div}_s \mathbf{u} = 0$  ist dafür in  $S$  die Identität

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_s \Phi = 0$$

hinreichend. Das ist wegen Gleichung (3.38) in  $S$  äquivalent zu

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{u}) = 0.$$

Die letzte Gleichung gilt aber, wenn wir Gleichung (3.42) beachten.

Zusammenfassend erhalten damit das Ergebnis, dass  $(\mathbf{u}, \Phi)$  aus den Gleichungen (3.41) und (3.43) eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$  ist.

Für die skalare Formulierung der Flachwassergleichungen definieren wir die Vorticity  $\zeta$  und die Divergenz  $\delta$  durch

$$\zeta(\mathbf{x}) := \operatorname{rot}_S \mathbf{u} = \frac{u(x_3) x_3}{\sqrt{1-x_3^2}} - u'(x_3) \sqrt{1-x_3^2}, \quad \delta(\mathbf{x}) := \operatorname{div}_S \mathbf{u} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S. \quad (3.44)$$

Wegen Bemerkung 3.5.6 gilt dann, dass  $(\zeta, \delta, \Phi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$  ist.

**Bemerkung 3.5.8** *Die Aussagen in Beispiel 3.5.1 sind unabhängig von der Wahl der Konstanten  $c \in \mathbb{R}$  in der Definitionsgleichung (3.43) für das Geopotenzialfeld  $\Phi$ . Wir bestimmen  $c$  durch den Wert  $\Phi_m > 0$  des mittleren Geopotenzialfeldes, d. h.*

$$\frac{1}{|S|} \int_S \Phi \, d\sigma = \Phi_m.$$

Nach Abschnitt 3.3 ist  $R_0^2 \Phi_m$  die mittlere Schichtdicke auf  $S_{R_0}$ . Damit können wir  $R_0^2 \Phi_m$  als mittlere Schichtdicke der Atmosphäre interpretieren. Diese Schichtdicke ist damit ausdrückbar durch die mittlere Skalenhöhe  $h_s > 0$  der dreidimensionalen Atmosphäre, d. h.

$$R_0^2 \Phi_m = h_s g,$$

siehe [Lan02]. Die Skalenhöhe erhalten wir, indem wir von einer konstanten Dichte  $\rho$  des Mediums ausgehen, siehe Flachwasserapproximation in Abschnitt 3.1. Dann folgt aus der hydrostatischen Gleichung und der idealen Gasgleichung mit der Bodentemperatur  $T_0 > 0$  für die Skalenhöhe

$$h_s = \frac{T_0 R}{g}.$$

Für eine mittlere Bodentemperatur von  $T_0 = 288.15\text{K}$  (entspricht  $15^\circ\text{C}$ ) ergibt sich eine mittlere Skalenhöhe von  $h_s \approx 8430\text{m}$ . Eine physikalisch sinnvolle Forderung für das mittlere Geopotenzialfeld ist daher

$$\frac{1}{|S|} \int_S \Phi \, d\sigma = 8000\text{m} \frac{g}{R_0^2}. \quad (3.45)$$

Wir fahren nun mit Beispielen fort, die die meridionale Windverteilung  $u$  in Beispiel 3.5.1 konkret definieren. Das folgende Beispiel der Festkörperrotation ist auch in [WDH<sup>+</sup>92, Test 2] zu finden.

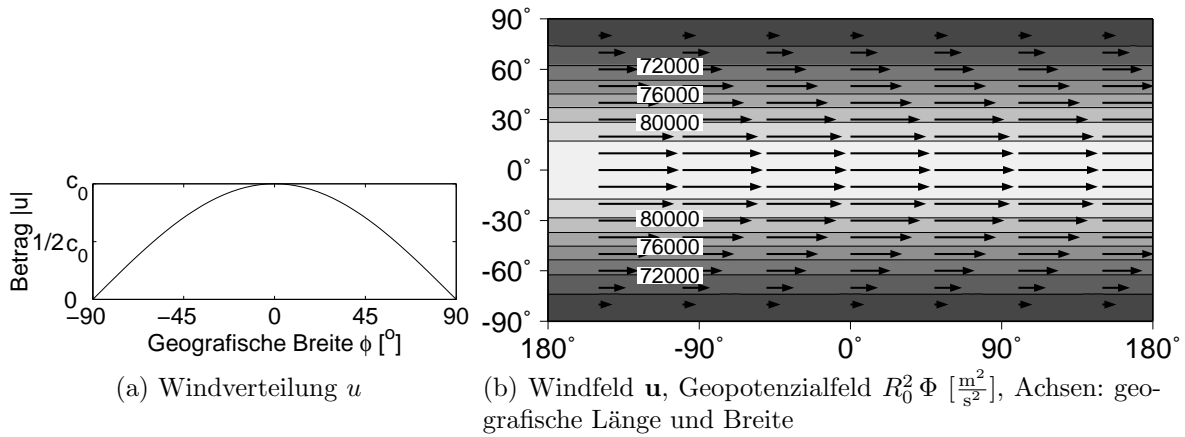


Abbildung 3.4: Festkörperrotation,  $c_0 = \frac{30}{R_0} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\Phi$ -Mittelwert aus (3.45); Beispiel 3.5.2

**Beispiel 3.5.2 (Festkörperrotation)** Als Spezialfall von Beispiel 3.5.1 betrachten wir für eine Konstante  $c_0 > 0$  die meridionale Windverteilung

$$u(x) := c_0 \sqrt{1 - x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Setzen wir dies in Gleichung (3.41) ein, erhalten wir das Windfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := c_0 (-x_2, x_1, 0)^T, \quad \forall \mathbf{x} \in S,$$

welches eine Festkörperrotation mit der Rotationsachse  $(0, 0, 1)^T$  beschreibt, siehe Abbildung 3.4(b). Der Betrag des Zonalwindes ist proportional zum Abstand zur Symmetrieachse der Rotation. In Abbildung 3.4(a) ist die Windverteilung  $u$  in Abhängigkeit von der geografischen Breite  $\varphi = \arcsin x_3$  dargestellt. Weiter wählen wir das Orografiefeld

$$\Phi_B := 0.$$

Das Geopotentialfeld  $\Phi$  definieren wir durch Gleichung (3.43) und erhalten

$$\Phi(\mathbf{x}) := -\frac{c_0 (c_0 + 2\Omega)}{2} x_3^2 + c, \quad \forall \mathbf{x} \in S.$$

Dabei sei die Konstante  $c \in \mathbb{R}$  so fixiert, dass die Gleichung (3.45) für den  $\Phi$ -Mittelwert erfüllt ist.

Wegen Beispiel 3.5.1 ist dann  $(\mathbf{u}, \Phi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$ . Definieren wir die Vorticity  $\zeta$  und die Divergenz  $\delta$  mit Gleichung (3.44), so erhalten wir

$$\zeta(\mathbf{x}) = 2c_0 x_3 \qquad \delta(\mathbf{x}) = 0, \qquad \forall \mathbf{x} \in S.$$

Wegen Beispiel 3.5.1 ist dann auch  $(\zeta, \delta, \Phi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$ .

In Abbildung 3.4(b) sind das Windfeld  $\mathbf{u}$  und das Geopotenzialfeld  $\Phi$  für  $c_0 = \frac{30 \text{ m}}{R_0 \text{ s}}$  zu sehen. Um physikalisch relevante Werte für das Geopotenzialfeld  $\Phi$  zu erhalten, transformieren wir  $\Phi$  zu  $R_0^2 \Phi$  auf  $S_{R_0}$ , siehe Abschnitt 3.3. Wir erkennen das Windmaximum in den niederen Breiten.

Im nächsten Beispiel 3.5.3 definieren wir die meridionale Windverteilung  $u$  aus Beispiel 3.5.1 wie in [GPS03].

**Beispiel 3.5.3** Als weiteren Spezialfall von Beispiel 3.5.1 betrachten wir für Konstanten  $c_0, \gamma, \varphi_0 \in \mathbb{R}$  die meridionale Windverteilung

$$u(x) = c_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2\gamma} (\arcsin x - \varphi_0) \right), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

$u$  definiert im Windfeld  $\mathbf{u}$  in Gleichung (3.41) mehrere lokale Windmaxima im Abstand von  $2\gamma$ . Dabei gibt  $\gamma$  im Bogenmaß die geografische Breite an. Ein Maximum liegt bei  $\varphi_0$  (Bogenmaß) geografischer Breite.

Betrachten wir das dazugehörige Geopotenzialfeld in Gleichung (3.43), so erkennen wir, dass der erste Teil des Integrals

$$\int_0^{\arcsin x_3} \tan \varphi u^2(\sin \varphi) d\varphi$$

für  $x_3 \rightarrow \pm 1$  unbeschränkt wächst. Das Geopotenzialfeld  $\Phi$  ist also an den Polen des Wirbels nicht definiert. Wegen Hilfssatz 3.5.1 kann diese Windverteilung also nicht stationär sein.

Allgemein können wir das Integrabilitätsproblem in Beispiel 3.5.3 nicht lösen, jedoch geben wir mit den folgenden beiden Beispielen 3.5.4 und 3.5.5 Spezialfälle von Beispiel 3.5.1 an, die auch Windmaxima wie in Beispiel 3.5.3 modellieren.

**Beispiel 3.5.4 (Zonale Strahlströme)** Als Spezialfall von Beispiel 3.5.1 betrachten wir für Konstanten  $c_0, \gamma, \varphi_0 \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  die meridionale Windverteilung

$$u(x) = c_0 (1 - x^{2n}) \cos^2 \left( \frac{\pi}{2\gamma} (\arcsin x - \varphi_0) \right), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Wie in Beispiel 3.5.3 definiert  $u$  im Windfeld  $\mathbf{u}$  aus Gleichung (3.41) mehrere lokale Windmaxima im Abstand von  $2\gamma$ . Für  $n = 1$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{18}$ ,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$  ist in Abbildung 3.5(a) die Windverteilung  $u$  in Abhängigkeit von der geografischen Breite  $\varphi = \arcsin x_3$  dargestellt.  $\gamma$  gibt im Bogenmaß die geografische Breite an. Ein Maximum liegt bei  $\varphi_0$  (Bogenmaß) geografischer Breite. Weiter wählen wir das Orografiefeld

$$\Phi_B := 0.$$

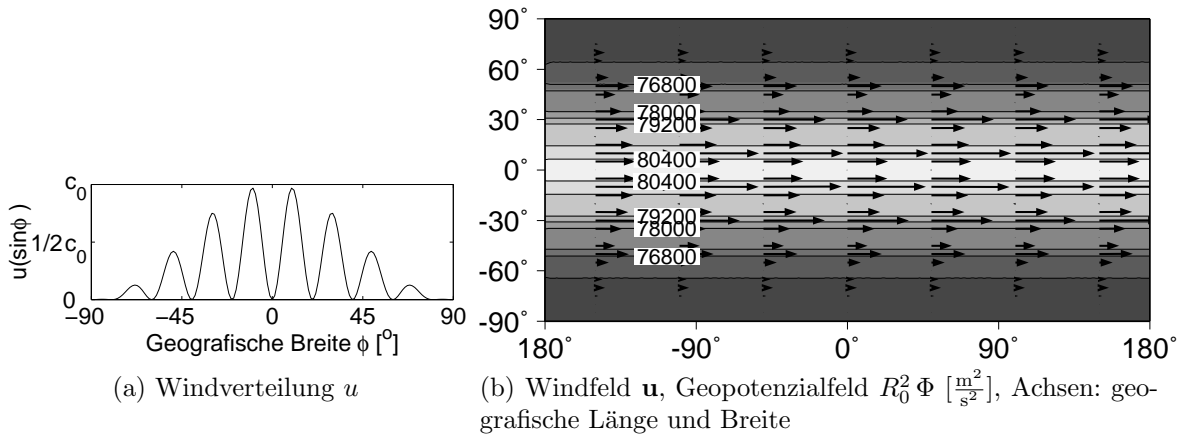


Abbildung 3.5: Zonale Strahlströme,  $c_0 = \frac{30}{R_0} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $n = 1$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{18}$ ,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $\Phi$ -Mittelwert aus (3.45); Beispiel 3.5.4

Das Geopotenzialfeld  $\Phi$  definieren wir durch Gleichung (3.43) und erhalten für alle  $\mathbf{x} \in S$

$$\Phi(\mathbf{x}) = - \int_0^{\arcsin x_3} c_0^2 \tan \varphi (1 - \sin^{2n} \varphi)^2 \cos^4 \left( \frac{\pi}{2\gamma} (\varphi - \varphi_0) \right) + 2 \Omega c_0 \sin \varphi (1 - \sin^{2n} \varphi) \cos^2 \left( \frac{\pi}{2\gamma} (\varphi - \varphi_0) \right) d\varphi + c.$$

Dabei sei die Konstante  $c \in \mathbb{R}$  so fixiert, dass die Gleichung (3.45) für den  $\Phi$ -Mittelwert erfüllt ist.  $\Phi$  bleibt so an den Polen des Wirbels beschränkt.

Wegen Beispiel 3.5.1 ist dann  $(\mathbf{u}, \Phi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$ . Definieren wir die Vorticity  $\zeta$  und die Divergenz  $\delta$  mit Gleichung (3.44), so erhalten wir

$$\zeta(\mathbf{x}) = 2 c_0 x_3, \quad \delta(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S.$$

Wegen Beispiel 3.5.1 ist dann auch  $(\zeta, \delta, \Phi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$ .

Mit den gleichen Parametern wie oben und  $c_0 = \frac{30}{R_0} \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sind das Windfeld  $\mathbf{u}$  und das Geopotenzialfeld  $\Phi$  in Abbildung 3.5(b) dargestellt. Wir erkennen, dass in den Breiten der Strahlströme auch erhöhte Gradienten des Geopotenzialfeldes  $\Phi$  auftreten.

**Bemerkung 3.5.9** Die vorgegebene Windverteilung in Beispiel 3.5.4 beschreibt mehrere lokale Maxima der Windgeschwindigkeit im zonalen Westwind. In der realen Atmosphäre liegen die Windmaxima der Zonalströmung nur in den mittleren Breiten, siehe Abschnitt 2.1.2. Damit entspricht die Windverteilung in Beispiel 3.5.4 nur sehr schlecht der realen globalen zonalgemittelten Strömung.

Als realitätsnähere Strömung im Vergleich zu Beispiel 3.5.4 betrachten wir nun wie in [GPS03] einen isolierten zonalen Strahlstrom in mittleren Breiten.

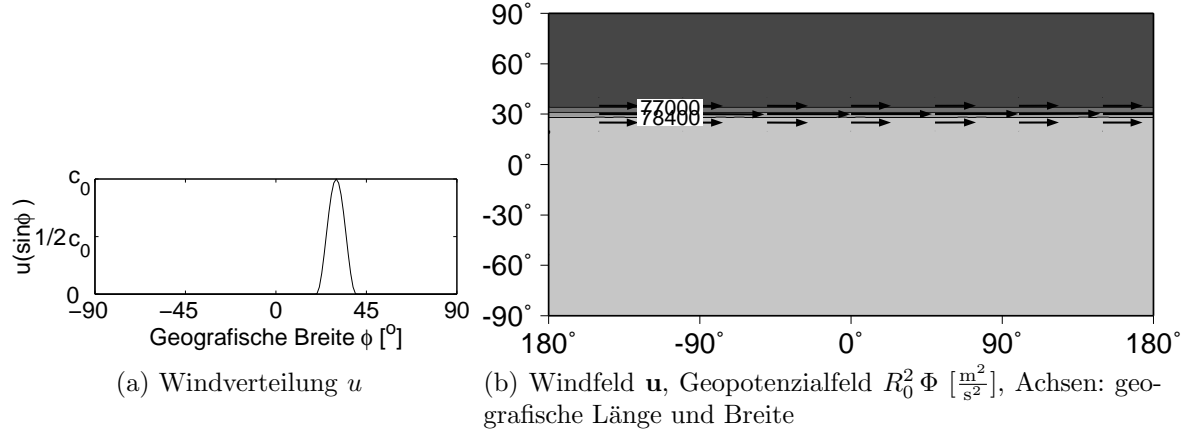


Abbildung 3.6: Isolierter zonaler Strahlstrom,  $c_0 = \frac{30}{R_0} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $n = 1$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{18}$ ,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ,  $\Phi$ -Mittelwert aus (3.45); Beispiel 3.5.5

**Beispiel 3.5.5 (Isolierter zonaler Strahlstrom)** Als Spezialfall von Beispiel 3.5.1 betrachten wir für Konstanten  $c_0, \gamma, \varphi_0 \in \mathbb{R}$  die meridionale Windverteilung

$$u(x) = \begin{cases} c_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2\gamma} (\arcsin x - \varphi_0) \right), & \text{für } x \in [\sin(\varphi_0 - \gamma), \sin(\varphi_0 + \gamma)] \\ 0, & \text{für } x \in [-1, 1] \setminus [\sin(\varphi_0 - \gamma), \sin(\varphi_0 + \gamma)] \end{cases}.$$

$u$  definiert im Windfeld  $\mathbf{u}$  aus Gleichung (3.41) genau ein lokales Windmaximum mit der meridionalen Ausdehnung  $2\gamma$ . Für  $\gamma = \frac{\pi}{18}$ ,  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$  ist in Abbildung 3.6(a) die Windverteilung  $u$  in Abhängigkeit von der geografischen Breite  $\varphi = \arcsin x_3$  dargestellt.  $\gamma$  gibt im Bogenmaß die geografische Breite an. Das Maximum liegt bei  $\varphi_0$  (Bogenmaß) geografischer Breite. Weiter wählen wir das Orografiefeld

$$\Phi_B := 0.$$

Wir definieren das Geopotenzialfeld  $\Phi$  durch die Gleichung (3.43) und fixieren die Konstante  $c \in \mathbb{R}$  so, dass die Gleichung (3.45) für den  $\Phi$ -Mittelwert erfüllt ist.

Dann ist  $(\mathbf{u}, \Phi)$  wegen Beispiel 3.5.1 eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$ . Definieren wir weiter die Vorticity  $\zeta$  und die Divergenz  $\delta$  mit der Gleichung (3.44), dann ist wegen Beispiel 3.5.1  $(\zeta, \delta, \Phi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$ .

Mit den gleichen Parametern wie oben und  $c_0 = \frac{30}{R_0} \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sind das Windfeld  $\mathbf{u}$  und das Geopotenzialfeld  $\Phi$  in Abbildung 3.6(b) dargestellt. Wir erkennen, dass das Geopotenzialfeld  $\Phi$  außerhalb des Strahlstromes konstant ist.

**Bemerkung 3.5.10** *Das isolierte Windmaximum der Zonalströmung in den mittleren Breiten aus dem Beispiel 3.5.5 modelliert nun wesentlich besser als das Beispiel 3.5.4 die mittlere Zonalströmung in der Troposphäre, da in der realen Atmosphäre bei  $30^\circ - 45^\circ$  ein Windmaximum beobachtet werden kann, siehe Abschnitt 2.1.2.*

Nachdem die bisherigen Beispiele divergenzfreie Strömungen behandelten, betrachten wir im folgenden Beispiel eine vorticityfreie Strömung.

**Beispiel 3.5.6 (Vorticityfreie Strömung)** Dieses Beispiel setzt  $f = 0$  voraus, vernachlässigt also die Coriolisbeschleunigung. Wir nehmen an, dass  $\mathbf{u}$  ein vorticityfreies Windfeld auf  $S$  wäre. Mit der Helmholtz-Zerlegung für Vektorfelder auf  $S$  folgt, dass es ein Potenzial  $\chi$  auf  $S$  gibt mit

$$\mathbf{u} = \nabla_s \chi.$$

Da die Gleichung

$$\operatorname{div}_s((f + \operatorname{rot}_s \mathbf{u}) \mathbf{u}) = 0$$

sofort erfüllt ist, ist  $\mathbf{u}$  mit dem Geopotenzialfeld  $\Phi$  aus Hilfssatz 3.5.1 Teil (2) auch Lösung von Gleichung (3.38). Leider ist es selbst für einfache Beispiele schwierig, eine nichttriviale Orografie  $\Phi_B$ , d. h.  $\Phi_B \neq \Phi$ , so zu wählen, dass die Gleichung (3.39) erfüllt ist. Im Fall  $\Phi_B = \Phi$  ist im System keine Masse enthalten, siehe Abschnitt 3.4, so dass die Lösung physikalisch keine Bedeutung hat.

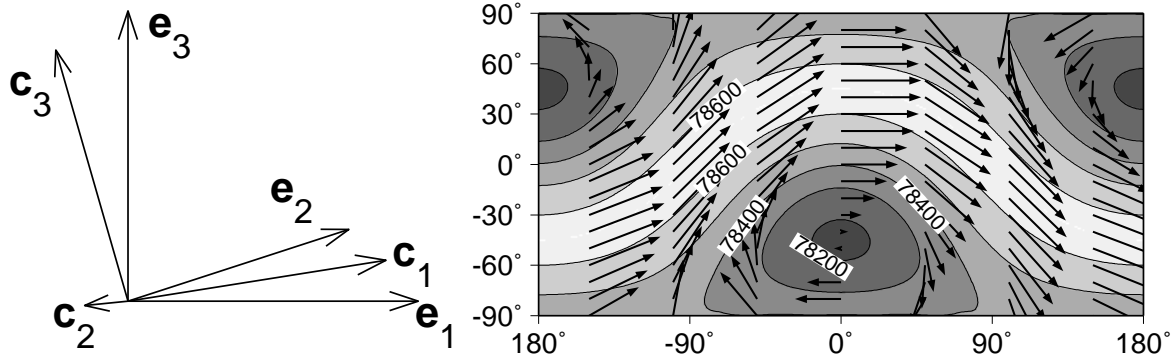
Das folgende Beispiel 3.5.7 einer stationären Lösung der Flachwassergleichungen ist ähnlich konstruiert wie das erste Beispiel 3.5.1, allerdings für die Flachwassergleichungen ohne Corioliskraft. Während in Beispiel 3.5.1 die Erdachse die Rotationsachse der Strömung war, fällt diese Einschränkung in Beispiel 3.5.7 weg. Damit können wir die Rotationsachse der Strömung frei wählen. Wir werden dieses Beispiel für die Konstruktion von instationären Lösungen der Flachwassergleichungen im nächsten Abschnitt benötigen.

**Beispiel 3.5.7 (Rotationssymmetrische Strömung)** Für dieses Beispiel betrachten wir die Flachwassergleichungen ohne Coriolisbeschleunigung, d. h.  $f = 0$ . Wir definieren das Windfeld  $\mathbf{u}$  als Zonalwind nicht bezüglich der Achse  $(0, 0, 1)^T$ , siehe Beispiel 3.5.1, sondern bezüglich einer neuen fixierten Achse  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{a}| = 1$ . Wir setzen für alle  $\mathbf{x} \in S$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := u(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{x}|} \quad (3.46)$$

mit der vorgegebenen Windverteilung  $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Das Windfeld  $\mathbf{u}$  ist dann ein rotationssymmetrischer Wind bezüglich der Achse  $\mathbf{a}$ . Weiter wählen wir für eine Konstante  $c_B \geq 0$  das Orografiefeld

$$\Phi_B := c_B.$$



(a) Koordinatensysteme  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  und  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  (b) Windfeld  $\mathbf{u}$ , Geopotenzialfeld  $R_0^2 \Phi$  [ $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ ], Achsen: geografische Länge und Breite

Abbildung 3.7: Rotationssymmetrische Strömung,  $c_0 = \frac{30 \text{ m}}{R_0 \text{ s}}$ ,  $\mathbf{a} = (-\cos 45^\circ, 0, \sin 45^\circ)^T$ ,  $\Phi$ -Mittelwert aus (3.45); Beispiel 3.5.7

Mit Hilfssatz 3.5.1 wollen wir nun ein geeignetes Geopotenzialfeld  $\Phi$  finden, so dass  $(\mathbf{u}, \Phi)$  eine Lösung der Gleichung (3.38) ist. Dazu führen wir einen Wechsel des Koordinatensystems durch, siehe Abschnitt 3.5.1, und betrachten die Koordinatendarstellung  $\mathbf{v}$  von  $\mathbf{u}$  bezüglich der gedrehten Orthonormalbasis

$$\mathbf{c}_1 := \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 := \frac{1}{|\mathbf{a}| \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \begin{pmatrix} a_1 a_3 \\ a_2 a_3 \\ -(a_1^2 + a_2^2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 := \mathbf{a}.$$

In Abbildung 3.7(a) sind die beiden Basen  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  und  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  zu sehen. Mit dem Koordinatenwechsel  $\phi$  aus Definition 3.5.2 gilt dann für alle  $\mathbf{y} \in S$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{y}) &:= \phi \circ \mathbf{u} \circ \phi^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{e}_j = u(y_3) \frac{-y_2 \mathbf{c}_1 + y_1 \mathbf{c}_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{e}_j \\ &= u(y_3) \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Koordinatendarstellung  $\mathbf{v}$  in der neuen Basis ist nun das gleiche Windfeld wie in Beispiel 3.5.1. Definieren wir für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  das Geopotenzialfeld  $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $\mathbf{y} \in S$  durch

$$\Psi(\mathbf{y}) = - \int_0^{\arcsin y_3} \tan \varphi u^2(\sin \varphi) d\varphi + c$$

und die Orografie durch  $\Psi_B = c_B$ , dann wissen wir nach Beispiel 3.5.1, dass die Funktion  $(\mathbf{v}, \Psi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) mit der



Orografie  $\Psi_B$  ist. Betrachten wir zur Koordinatendarstellung  $\Psi$  das dazugehörige Geopotenzialfeld  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert für alle  $\mathbf{x} \in S$  durch

$$\Phi(\mathbf{x}) := \Psi \circ \phi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{e}_i) = - \int_0^{\arcsin(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})} \tan \varphi u^2(\sin \varphi) d\varphi + c, \quad (3.47)$$

dann erhalten wir durch Multiplikation mit  $\cdot \mathbf{e}_i \mathbf{c}_i$  aus den Gleichungen für  $(\mathbf{v}, \Psi)$  die transformierten Gleichungen (3.38) – (3.40) für  $(\mathbf{u}, \Phi)$ .

Zusammenfassend erhalten wir, dass  $(\mathbf{u}, \Phi)$ , definiert durch die Gleichungen (3.46) und (3.47), eine stationäre Lösung der Gleichungen (3.22) – (3.24) mit der Orografie  $\Phi_B$  ist.

Für die skalare Formulierung der Flachwassergleichungen definieren wir die Vorticity  $\zeta$  und die Divergenz  $\delta$  für  $\mathbf{x} \in S$  durch

$$\zeta(\mathbf{x}) := \text{rot}_S \mathbf{u} = \frac{u(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2}} - u'(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \sqrt{1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2}, \quad \delta(\mathbf{x}) := \text{div}_S \mathbf{u} = 0.$$

Wegen Bemerkung 3.5.6 gilt dann, dass  $(\zeta, \delta, \Phi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) mit dem Orografiefeld  $\Phi_B$  ist.

Wählen wir wie in Beispiel 3.5.2 für die Konstanten  $c_0, c \in \mathbb{R}$  die meridionale Windverteilung

$$u(x) = c_0 \sqrt{1 - x^2}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

erhalten wir mit  $\mathbf{u}$  aus Gleichung (3.46) wieder eine Festkörperrotation, diesmal mit der Rotationsachse  $\mathbf{a}$ . Berechnen wir das Geopotenzialfeld  $\Phi$  mit Gleichung (3.47), erhalten wir für alle  $\mathbf{x} \in S$

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{c_0^2}{2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})^2 + c.$$

In der Abbildung 3.7(b) ist das Windfeld  $\mathbf{u}$  und das Geopotenzialfeld  $\Phi$  mit dem  $\Phi$ -Mittelwert aus Gleichung (3.45) für den Fall  $c_0 = \frac{30}{R_0} \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $\mathbf{a} = (-\cos 45^\circ, 0, \sin 45^\circ)^T$  zu sehen. Das Geopotenzialfeld  $\Phi$  hat eine ähnliche Struktur wie in Beispiel 3.5.2. Allerdings sind die Gradienten von  $\Phi$  hier wesentlich kleiner, da die Corioliskraft fehlt.

### 3.5.3 Instationäre Lösungen

Instationäre Lösungen  $(\mathbf{v}, \Psi)$  der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) können auch aus möglicherweise stationären Lösungen  $(\mathbf{u}, \Phi)$  der Flachwasserwassergleichung gewonnen werden. Dazu betrachten wir die Gleichungen für  $(\mathbf{u}, \Phi)$  im Inertialsystem, in dem die Erde rotiert. Die Gleichungen enthalten also keine Coriolisterme. Führt man einen Koordinatensystemwechsel ins erdfeste Koordinatensystem durch, müssen Scheinkräfte berücksichtigt werden. Damit enthalten die transformierten Gleichungen Coriolisterme und die transformierten Lösungen werden i. a. instationär sein. Es genügt

also eine stationäre Lösung aus Abschnitt 3.5.2 zu nehmen und sie entsprechend zu transformieren. Diese Transformation ist aus der Literatur bekannt und z. B. zu finden in [Dut95] oder [Ped87]. Wir stellen diese Vorgehensweise im Folgenden noch einmal detailliert dar, da wir sie zur konkreten Berechnung von Lösungen nutzen wollen.

Was bedeutet ein Koordinatensystemwechsel genauer? Dazu betrachten wir beliebige Funktionen  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . In Abschnitt 3.5.1 haben wir die in ein anderes Koordinatensystem transformierten Funktionen als die Koordinatendarstellungen von  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$  bezeichnet. Ist  $(\mathbf{u}, \Phi)$  eine Lösung der Gleichungen (3.22) – (3.24), dann ist die Frage nach den Auswirkungen eines Koordinatensystemwechsels auf die Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) demnach die Frage nach den Gleichungen, die die Koordinatendarstellungen von  $(\mathbf{u}, \Phi)$  erfüllen.

### Das Koordinatensystem

Wir gehen von den Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) ohne Corioliskraft, d.h.  $f = 0$ , aus und befinden uns in einem Koordinatensystem (Basis  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ), in dem die Erde eine Drehbewegung um die Achse  $(0, 0, 1)^T$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega \in \mathbb{R}$  ausführt. Nun wollen wir in ein Koordinatensystem wechseln, in dem die Erde ruht, siehe Abschnitt 3.5.1. Das dazugehörige neue zeitabhängige Koordinatensystem hat für  $t \in \mathbb{R}$  die Basis

$$\mathbf{c}_1(t) := \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2(t) := \begin{pmatrix} -\sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Der Koordinatenwechsel

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_i(t) \mathbf{e}_i, \quad (3.49)$$

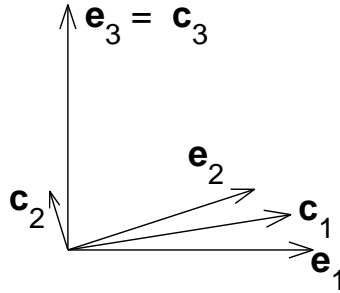
siehe Definition 3.5.2, ist damit auch eine zeitabhängige Funktion. Anstelle von  $\mathbf{c}_i(t)$  und  $\phi_t$  werden wir auch  $\mathbf{c}_i$  und  $\phi$  schreiben. Für die Zeitableitungen der Basisvektoren berechnen wir

$$\frac{d\mathbf{c}_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.50)$$

Da das Koordinatensystem  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  rotiert, beschreibt auch der Koordinatenwechsel  $\phi$  eine Drehung. Wie wir im folgenden Hilfssatz sehen werden, ist  $\phi$  auch mit dem Kreuzprodukt vertauschbar.

**Hilfssatz 3.5.2** *Es sei  $\phi$  der Koordinatenwechsel bezüglich der Basis (3.48). Dann gelten für alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}) \times \phi(\mathbf{b}) &= \phi(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), & \phi^{-1}(\mathbf{a}) \times \phi^{-1}(\mathbf{b}) &= \phi^{-1}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\ \phi(\mathbf{a}) \cdot \phi(\mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, & \phi^{-1}(\mathbf{a}) \cdot \phi^{-1}(\mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Abbildung 3.8: Um  $(0, 0, 1)^T$  rotierendes Koordinatensystem  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ 

*Beweis:*

Wir definieren mit den Basisvektoren  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  die Matrix  $D$  durch

$$D := \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{c}_3^T \end{pmatrix}.$$

Es seien  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ . Da  $D$  eine orthogonale Matrix mit  $\det D > 0$  ist, gilt

$$D \mathbf{a} \times D \mathbf{b} = D (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Damit folgt aber sofort mit Definition 3.5.2

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}) \times \phi(\mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{e}_i) \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{e}_j) = D \mathbf{a} \times D \mathbf{b} = D (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \phi(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\ \phi(\mathbf{a}) \cdot \phi(\mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{e}_j) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Da  $\phi$  als Drehung auf dem  $\mathbb{R}^3$  bijektiv ist, gelten die Behauptungen auch für  $\phi^{-1}$ .

□

Mit Definition 3.5.2, Gleichung (3.50) und dem letzten Hilfssatz, folgt dann für die Zeitableitung des Koordinatenwechsels für  $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{e}_i}{\partial t} = \mathbf{x} \cdot \frac{d\mathbf{c}_i}{dt} \mathbf{e}_i = -(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{c}_i \mathbf{e}_i = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}. \quad (3.51)$$

### Geschwindigkeiten in Bezugssystemen

Da die Geschwindigkeit eines Teilchens von der Wahl des Bezugssystems abhängt, müssen wir genauer wissen, wie die Geschwindigkeiten eines Teilchens in den Koordinatensystemen  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  und  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  zusammenhängen. Dazu sei ein Teilchen am Ort  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  im Koordinatensystem  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  und habe die Geschwindigkeit  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ . Im bewegten Koordinatensystem  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  sei dasselbe Teilchen am Ort  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  und

habe die Geschwindigkeit  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ . Die Transformation der Ortsvektoren erfolgt nach Abschnitt 3.5.1 mit dem Koordinatenwechsel  $\phi$  durch

$$\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}).$$

Mit Gleichung (3.51) erhalten wir die Geschwindigkeit des Ortsvektors  $\mathbf{y}$  im Koordinatensystem  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}\right)_{\mathbf{e}} := \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial t} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}.$$

Da sich  $\mathbf{v}$  aus der Koordinatendarstellung des Vektors  $\mathbf{u}$  und der Geschwindigkeit seines Ortsvektors ergibt, folgt

$$\mathbf{v} = \phi(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y} = \phi(\mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times \phi^{-1}(\mathbf{y})).$$

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  in  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  entspricht also der Geschwindigkeit  $\phi(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}$  in  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ .

### Transformationssätze

Wir wollen im Folgenden die Flachwassergleichungen auf  $S$  betrachten. Da wir dazu das Konzept der tangentialen Differentialoperatoren, siehe Anhang B, nutzen wollen, setzen wir abzuleitende Funktionen auf eine offene Umgebung  $G \subset \mathbb{R}^3$  von  $S$  fort. Wie in Abschnitt 3.2 fixieren wir aus technischen Gründen die Menge  $G$  durch

$$G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2} < |\mathbf{x}| < \frac{3}{2}\}.$$

Damit ist  $G$  auch rotationssymmetrisch und invariant unter der Drehung  $\phi$ , d. h. es gilt  $\phi(G) = G$ . Der folgende Hilfssatz zeigt, wie sich die totale Zeitableitung für Koordinatendarstellungen bezüglich  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  transformieren lässt.

**Hilfssatz 3.5.3 (Transformation, Totale Ableitung)** *Es sei das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u} : G \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben. Zu  $\mathbf{u}$  betrachten wir das entsprechende Geschwindigkeitsfeld*

$$\mathbf{v} := \phi \circ (\mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times \cdot) \circ \phi^{-1},$$

*im Koordinatensystem  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ . Gegeben seien weiter ein skalares Feld  $\Phi : G \times I \rightarrow \mathbb{R}$  und ein Vektorfeld  $\mathbf{a} : G \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , zu denen wir die Koordinatendarstellungen  $\Psi : G \times I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{b} : G \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit*

$$\begin{aligned} \Psi &= \Phi \circ \phi^{-1}, \\ \mathbf{b} &= \phi \circ \mathbf{a} \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

*betrachten. Dann gilt für die totalen Zeitableitungen in  $G$*

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi &= (\partial_t \Psi + \mathbf{v} \cdot \nabla \Psi) \circ \phi, \\ \partial_t \mathbf{a} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} &= \phi^{-1} \circ (\partial_t \mathbf{b} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{b} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{b}) \circ \phi. \end{aligned}$$

*Beweis:*

Es seien die Geschwindigkeitsfelder  $\mathbf{u}, \mathbf{v} : G \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{v} = \phi \circ (\mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times \cdot) \circ \phi^{-1}$  gegeben. Weiterhin seien die skalaren Felder  $\Phi, \Psi : G \times I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Psi = \Psi \circ \phi^{-1}$  und die Vektorfelder  $\mathbf{a}, \mathbf{b} : G \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{b} = \phi \circ \mathbf{a} \circ \phi^{-1}$  gegeben. Für den Beweis seien  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$  mit  $\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$  beliebig fixiert.

Mit Gleichung (3.51) erhalten wir für die partielle Zeitableitung von  $\Phi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \Psi}{\partial t} \circ \phi + \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \circ \phi \frac{\partial \phi \cdot \mathbf{e}_i}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \circ \phi - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \circ \phi \\ &= (\partial_t \Psi - (\boldsymbol{\Omega} \times \cdot) \cdot \nabla \Psi) \circ \phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Den Advektionsterm von  $\Phi$  transformieren wir mit Definition 3.5.2 und Gleichung (3.36) und erhalten

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla \Phi)(\mathbf{x}) &= (\mathbf{v}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{e}_j \cdot \nabla \Psi(\mathbf{y}) \\ &= ((\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \cdot) \cdot \nabla \Psi) \circ \phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Die Summe von (3.52) und (3.53) ergibt dann die erste Behauptung. Widmen wir uns nun den Vektorfeldern, so berechnen wir zunächst mit (3.51) die Zeitableitung von  $\mathbf{b} \circ \phi$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b} \circ \phi}{dt}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \circ \phi + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y_i} \circ \phi \frac{\partial \phi \cdot \mathbf{e}_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \circ \phi - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial y_i} \circ \phi \\ &= (\partial_t \mathbf{b} - (\boldsymbol{\Omega} \times \cdot) \cdot \nabla \mathbf{b}) \circ \phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

und erhalten mit Definition 3.5.2 für die partielle Zeitableitung von  $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(\mathbf{x}) &= \frac{d\phi^{-1} \circ \mathbf{b} \circ \phi}{dt} = \frac{d(\mathbf{b} \circ \phi) \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{c}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{b} \circ \phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{c}_i + (\mathbf{b} \circ \phi) \cdot \mathbf{e}_i \frac{d\mathbf{c}_i}{dt} \\ &= \phi^{-1} \left( \frac{d\mathbf{b} \circ \phi}{dt} \right) + (\mathbf{b} \circ \phi) \cdot \mathbf{e}_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{c}_i) \\ &= \phi^{-1} \circ (\partial_t \mathbf{b} - (\boldsymbol{\Omega} \times \cdot) \cdot \nabla \mathbf{b}) \circ \phi(\mathbf{x}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \phi^{-1} \circ \mathbf{b} \circ \phi) \\ &= \phi^{-1} \circ (\partial_t \mathbf{b} - (\boldsymbol{\Omega} \times \cdot) \cdot \nabla \mathbf{b} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{b}) \circ \phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Den Advektionsterm von  $\mathbf{a}$  transformieren wir mit Definition 3.5.2 und Gleichung (3.37) und erhalten

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a})(\mathbf{x}) &= (\mathbf{v}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{e}_j \cdot \nabla (\phi^{-1} \circ \mathbf{b})(\mathbf{y}) \\ &= \phi^{-1} \circ ((\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \cdot) \cdot \nabla \mathbf{b}) \circ \phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Die zweite Behauptung ergibt sich dann erneut aus der Summe von (3.54) und (3.55).  $\square$

Wie oben gesehen, kommt beim Koordinatensystemwechsel des Geschwindigkeitsfeldes noch die Führungsgeschwindigkeit  $-\boldsymbol{\Omega} \times \cdot$  hinzu. Genauso wird zum Geopotenzialfeld  $\Phi$  bei der Transformation das schon in Abschnitt 3.1.2 erwähnte Geopotenzial

$$\Phi_Z(\mathbf{x}) := -\frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2}{2}, \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

abgezogen. Wir können uns unter  $\Phi_Z$  das Geopotenzialfeld vorstellen, das durch die Zentrifugalkraft hervorgerufen wird. Der folgende Hilfssatz enthält Umformungen, die später in Satz 3.5.1 nützlich sein werden.

**Hilfssatz 3.5.4** Für Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{x} \neq 0$  gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}|} &= \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{x}|} + 2\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}), \\ -\nabla_s \Phi_Z(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Gilt zusätzlich  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0$ , dann folgt

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} \times \mathbf{u}.$$

*Beweis:*

Es seien  $\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{x} \neq 0$  beliebig fixiert. Dann folgt

$$|\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$$

und damit auch die erste Gleichung der Behauptung. Zum Nachweis der zweiten Gleichung rechnen wir die beiden Seiten aus. Für  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  sind beide Terme gleich

$$\frac{\Omega^2}{|\mathbf{x}|^2} (-x_1 x_3^2, -x_2 x_3^2, x_3 (x_1^2 + x_2^2))^T.$$

Es gelte nun  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0$ . Da für Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{c}| = 1$  die Identität

$$(\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \mathbf{c}$$

gilt, setzen wir  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{n}(\mathbf{y})$  und es folgt die letzte behauptete Gleichung.  $\square$

Nach den bisherigen Vorarbeiten kommen wir zur Transformation der Flachwassergleichungen. Ausgehend von einer Lösung der Flachwassergleichungen ohne Corioliskraft  $(\mathbf{u}, \Phi)$  berechnen wir die Gleichungen, die für deren Koordinatendarstellungen im rotierenden Koordinatensystem  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  gelten.

**Satz 3.5.1** Es sei  $(\mathbf{u}, \Phi)$  eine Lösung des Problems (3.22) – (3.24) ohne Corioliskraft (d. h.  $f = 0$ ) mit der Orografie  $\Phi_B : S \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Definieren wir die in das Koordinatensystem  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  transformierten Funktionen  $\mathbf{v} : S \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Psi, \Psi_B : S \times I \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &:= \phi \circ (\mathbf{u} - \boldsymbol{\Omega} \times \cdot) \circ \phi^{-1}, \\ \Psi &:= (\Phi - \Phi_Z) \circ \phi^{-1}, \\ \Psi_B &:= (\Phi_B - \Phi_Z) \circ \phi^{-1}, \end{aligned}$$

so löst  $(\mathbf{v}, \Psi)$  das Problem (3.22) – (3.24) mit der Orografie  $\Psi_B$  und dem Coriolisparameter  $f$ .

*Beweis:*

Es seien  $\mathbf{u} : S \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\Phi : S \times I \rightarrow \mathbb{R}$  Lösungen der Gleichungen (3.22) – (3.24) mit  $f = 0$  und der Orografie  $\Phi_B : S \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir setzen  $\mathbf{u}$ ,  $\Phi$  und  $\Phi_B$  zu Funktionen  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\Phi}$  und  $\tilde{\Phi}_B$  derartig auf  $G$  fort, dass auf  $G$  gilt

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{\Phi} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{\Phi}_B = 0. \quad (3.56)$$

Im Folgenden werden wir anstelle der Bezeichnungen  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\Phi}$  und  $\tilde{\Phi}_B$  wieder  $\mathbf{u}$ ,  $\Phi$  und  $\Phi_B$  schreiben, da keine Verwechslungen zu befürchten sind. Wir definieren die Funktionen  $\mathbf{v} : G \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Psi, \Psi_B : G \times I \rightarrow \mathbb{R}$  gemäß der Formulierung des Satzes. Wir transformieren nacheinander die Terme der Gleichungen (3.22) – (3.24).

In einem ersten Schritt transformieren wir die totalen Zeitableitungen der Funktionen  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$ . Dazu nutzen wir Hilfssatz 3.5.3 und setzen für  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} := \mathbf{u}, \quad \mathbf{b}(\cdot) := \phi \circ \mathbf{u} \circ \phi^{-1}(\cdot) = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \cdot.$$

Beachten wir

$$\mathbf{v} \cdot \nabla (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y})_i = v_l \frac{\partial (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y})_i}{\partial y_l} = \epsilon_{ijk} v_l \Omega_j \delta_{kl} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v})_i, \quad \text{für } i = 1, 2, 3,$$

dann folgt in  $G$

$$\partial_t (\Phi - \Phi_B) + \mathbf{u} \cdot \nabla (\Phi - \Phi_B) = (\partial_t (\Psi - \Psi_B) + \mathbf{v} \cdot \nabla (\Psi - \Psi_B)) \circ \phi$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \phi^{-1} \circ (\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\boldsymbol{\Omega} \times \cdot) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \cdot)) \circ \phi \\ &= \phi^{-1} \circ (\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \cdot)) \circ \phi. \end{aligned}$$

In einem zweiten Schritt transformieren wir den Gradienten von  $\Phi$ . Dazu definieren wir zu  $\Phi_Z$  das transformierte Geopotenzial

$$\Psi_Z(\mathbf{y}) := \Phi_Z \circ \phi^{-1}(\mathbf{y}) = -\frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y})^2}{2}, \quad \forall \mathbf{y} \in G.$$

Es folgt mit der Definition 3.5.2 für alle  $\mathbf{x} \in G$

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial (\Psi + \Psi_Z)}{\partial y_j} \frac{\partial \phi \cdot \mathbf{e}_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial (\Psi + \Psi_Z)}{\partial y_j} \frac{\partial \mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial (\Psi + \Psi_Z)}{\partial y_j} \mathbf{c}_j \\ &= \frac{\partial (\Psi + \Psi_Z)}{\partial y_j} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{c}_k = \phi^{-1} \left( \frac{\partial (\Psi + \Psi_Z)}{\partial y_j} \mathbf{e}_j \right) = \phi^{-1} (\nabla (\Psi + \Psi_Z) \circ \phi(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Schließlich behandeln wir noch die verbleibenden Terme. Wegen Hilfssatz 3.5.2 gilt für den metrischen Term für alle  $\mathbf{x} \in G$

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2}{|\mathbf{x}|} \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \frac{|\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \phi(\mathbf{x})|^2}{|\phi(\mathbf{x})|} \phi^{-1} \circ \mathbf{n} \circ \phi(\mathbf{x}) \\ &= \phi^{-1} \left( \frac{|\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \cdot|^2}{|\cdot|} \mathbf{n} \right) \circ \phi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes bleibt unter der Transformation  $\phi$  erhalten, denn es gilt mit Definition 3.5.2

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial(\phi^{-1} \circ \mathbf{v} \circ \phi) \cdot \mathbf{e}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\mathbf{v} \circ \phi) \cdot \mathbf{e}_j}{\partial x_i} \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j}{\partial y_k} \frac{\partial \phi \cdot \mathbf{e}_k}{\partial x_i} \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j}{\partial y_k} \frac{\partial \mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_k}{\partial x_i} \mathbf{c}_j \cdot \mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j}{\partial y_j} = \operatorname{div} \mathbf{v}(\phi(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Die Transformationen der einzelnen Terme fassen wir zusammen und setzen die Lösung  $(\mathbf{u}, \Phi)$  in die Gleichungen (3.22) und (3.23) ohne Corioliskraft, d. h.  $f = 0$ , ein. Wir beachten noch, dass auf  $S$  wegen (3.56) auch

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi = 0, \quad \text{in } S$$

gilt und damit die dreidimensionalen Differenzialoperatoren durch ihre tangentialen Versionen ersetzt werden können. Es folgt dann in  $S$  für  $(\mathbf{v}, \Psi)$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_s \mathbf{v} + \nabla_s(\Psi + \Psi_Z) &= -2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}) - \frac{|\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}|^2}{|\mathbf{y}|} \mathbf{n}, \\ \partial_t(\Psi - \Psi_B) + \mathbf{v} \cdot \nabla_s(\Psi - \Psi_B) + (\Psi - \Psi_B) \operatorname{div}_s \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

Wenden wir nun Hilfssatz 3.5.4 an und definieren den Coriolisparameter wie in Anhang D durch  $f := 2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}$ , dann folgt in  $S$  die Gleichung

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_s \mathbf{v} + \nabla_s \Psi = -f \mathbf{n} \times \mathbf{v} - \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{y}|} \mathbf{n}.$$

Damit ist  $(\mathbf{v}, \Psi)$  ein Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) in  $S$  mit dem Coriolisparameter  $f$ .

□

**Bemerkung 3.5.11** Wir werden später in diesem Abschnitt als Orografie  $\Phi_B$  eine ortsunabhängige Konstante wählen. Damit ergibt sich für die Orografie  $\Psi_B$  im rotierenden Koordinatensystem für eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  und für alle  $\mathbf{y} \in S$  die Funktion

$$\Psi_B(\mathbf{y}) = -\Psi_Z(\mathbf{y}) + c = \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y})^2}{2} + c.$$

**Bemerkung 3.5.12** Die Orografiefunktion  $\Phi_B$  aus Satz 3.5.1 ist eine zeitabhängige Funktion, da im nicht erdfesten Koordinatensystem  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  die reale Orografie sich mit der Drehung der Erde mitbewegen muss. Betrachten wir aber die Orografie im erdfesten Koordinatensystem, also die Funktion  $\Psi_B$ , dann muss diese zeitunabhängig sein, da in diesem Koordinatensystem die Orografie ruht. Die formale Zeitabhängigkeit der Funktion  $\Psi_B$  aus Satz 3.5.1 muss daher durch die Transformation  $\phi$  wegfallen, um ein physikalisch relevantes Ergebnis zu erhalten.



**Bemerkung 3.5.13** *Wir hatten die Flachwassergleichungen in Abschnitt 3.1.4 ursprünglich nur mit zeitlich konstanter Orografie formuliert. Im Falle einer zeitabhängigen Orografie müssen wir lediglich unter der partiellen Zeitableitung die Orografie hinzufügen. Dies ist im Beweis von Satz 3.5.1 auch geschehen.*

### Beispiele instationärer Lösungen

Wenden wir den Satz 3.5.1 auf das Beispiel 3.5.7 der stationären rotationssymmetrischen Strömung an, erhalten wir das Beispiel 3.5.8 der instationären rotationssymmetrischen Strömung mit wählbarem Windprofil  $u$ . Setzen wir für  $u$  das Windprofil aus dem Beispiel 3.5.2 der Festkörperrotation ein, ergibt sich als Spezialfall von Beispiel 3.5.8 die konkrete Realisierung für eine instationäre Lösung der Flachwassergleichungen in Beispiel 3.5.9.

**Beispiel 3.5.8 (Rotationssymmetrische Strömung)** Es seien die Achse  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{a}| = 1$ , die Windverteilung  $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  und die Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  gegeben. Dazu definieren wir das Windfeld  $\mathbf{u}$ , das Geopotenzialfeld  $\Phi$  und das Orografiefeld  $\Phi_B$  für alle  $\mathbf{x} \in S$  durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := u(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{x}|}, \quad \Phi(\mathbf{x}) = - \int_0^{\arcsin(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})} \tan \varphi u^2(\sin \varphi) d\varphi + c_1,$$

$$\Phi_B(\mathbf{x}) := c_2.$$

Wegen Beispiel 3.5.7 ist  $(\mathbf{u}, \Phi)$  eine stationäre Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) ohne Corioliskraft, d. h.  $f = 0$ .

Bezeichnen wir mit  $\phi_t$  den Koordinatenwechsel aus Gleichung (3.49), dann definieren wir die in das Koordinatensystem  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ , siehe Gleichung (3.48), transformierten Funktionen  $\mathbf{v}, \Psi, \Psi_B$  für alle  $(\mathbf{y}, t) \in S \times I$  durch

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) &:= \phi_t(\mathbf{u}(\phi_t^{-1}(\mathbf{y}))) - \boldsymbol{\Omega} \times \phi_t^{-1}(\mathbf{y}), \\ \Psi(\mathbf{y}, t) &:= \Phi(\phi_t^{-1}(\mathbf{y})) - \Phi_Z(\phi_t^{-1}(\mathbf{y})), \\ \Psi_B(\mathbf{y}) &:= \Phi_B(\phi_t^{-1}(\mathbf{y})) - \Phi_Z(\phi_t^{-1}(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

Nutzen wir Hilfssatz 3.5.2, dann folgt auch

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) &= u(\phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y}) \frac{\phi_t(\mathbf{a}) \times \mathbf{y}}{|\phi_t(\mathbf{a}) \times \mathbf{y}|} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{y}, \\ \Psi(\mathbf{y}, t) &= - \int_0^{\arcsin(\phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y})} \tan \varphi u^2(\sin \varphi) d\varphi + \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y})^2}{2} + c_1, \\ \Psi_B(\mathbf{y}) &= \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y})^2}{2} + c_2. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Wegen Satz 3.5.1 ist  $(\mathbf{v}, \Psi)$  eine Lösung der instationären Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) mit dem Orografiefeld  $\Psi_B$ .

Für die skalare Formulierung der Flachwassergleichungen definieren wir die Vorticity  $\zeta$  und die Divergenz  $\delta$  für alle  $(\mathbf{y}, t) \in S \times I$  durch

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbf{y}, t) &:= \operatorname{rot}_S \mathbf{v} = \frac{u(\phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y}) \phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y}}{\sqrt{1 - (\phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y})^2}} - u'(\phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y}) \sqrt{1 - (\phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y})^2} - 2\Omega y_3, \\ \delta(\mathbf{y}, t) &:= \operatorname{div}_S \mathbf{v} = 0.\end{aligned}\tag{3.58}$$

Wegen der Bemerkung 3.5.6 gilt, dass  $(\zeta, \delta, \Psi)$  eine Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) mit dem Orografiefeld  $\Psi_B$  ist.

**Hilfssatz 3.5.5** *Für alle Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gilt die Gleichung*

$$|\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2.$$

*Beweis:*

Es seien beliebige Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  gegeben. Aus der Graßmann-Identität folgt

$$|\mathbf{y}|^2 \mathbf{x} = -\mathbf{y} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \mathbf{y}.$$

Da dies eine orthogonale Zerlegung von  $\mathbf{x}$  ist, folgt durch Ausmultiplizieren

$$|\mathbf{y}|^4 |\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{x})|^2 + |\mathbf{y}|^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2.$$

Den ersten Term der rechten Seite formen wir erneut mit der Graßmann-Identität um und erhalten

$$\begin{aligned}|\mathbf{y} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{x})|^2 &= (\mathbf{y} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{x})) = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} \times (\mathbf{y} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{x}))) \\ &= |\mathbf{y}|^2 (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) = |\mathbf{y}|^2 |\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgt die Behauptung. □

Das folgende Beispiel wurde auch in [LHD<sup>+</sup>03], [Läu03] beschrieben.

**Beispiel 3.5.9 (Instationäre Festkörperrotation)** Wir definieren die Rotationsachse  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{b}| = 1$  und die Winkelgeschwindigkeit  $d_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  der Festkörperrotation des Startzustandes. Weiter definieren wir im Fall  $\left| \mathbf{b} + \frac{1}{d_0} \boldsymbol{\Omega} \right| \neq 0$  als Hilfskonstruktion die Achse  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\mathbf{a}| = 1$  und die Winkelgeschwindigkeit  $c_0 \in \mathbb{R}$  durch

$$\mathbf{a} := \left| \mathbf{b} + \frac{1}{d_0} \boldsymbol{\Omega} \right|^{-1} \left( \mathbf{b} + \frac{1}{d_0} \boldsymbol{\Omega} \right), \quad c_0 := \left| \mathbf{b} + \frac{1}{d_0} \boldsymbol{\Omega} \right| d_0.$$

Im Fall  $\left| \mathbf{b} + \frac{1}{d_0} \boldsymbol{\Omega} \right| = 0$  definieren wir

$$\mathbf{a} := \mathbf{e}_1, \quad c_0 := 0.$$

Für die Konstante  $c_0$  definieren wir die Windverteilung der Festkörperrotation aus Beispiel 3.5.2 durch

$$u(x) = c_0 \sqrt{1 - x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Mit der Windverteilung  $u$ , der Achse  $\mathbf{a}$  und für fixierte Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  definieren wir damit das Windfeld  $\mathbf{v}$ , das Geopotenzialfeld  $\Psi$  und das Orografiefeld  $\Psi_B$  aus Beispiel 3.5.8 durch die Gleichung (3.57). Zur Vereinfachung der Gleichung (3.57) beachten wir, dass wegen Hilfssatz 3.5.5 für alle  $\mathbf{y} \in S$  die Gleichung

$$\frac{u(\phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y})}{|\phi_t(\mathbf{a}) \times \mathbf{y}|} = c_0$$

und analog zu Beispiel 3.5.2 die Gleichung

$$\int_0^{\arcsin(\phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y})} \tan \varphi u^2(\sin \varphi) d\varphi = \frac{c_0^2}{2} (\phi_t(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y})^2$$

gilt. Damit folgt nach dem Einsetzen von  $\mathbf{b}$  und  $d_0$  in die Gleichung (3.57) für alle  $(\mathbf{y}, t) \in S \times I$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) &= d_0 \phi_t(\mathbf{b}) \times \mathbf{y}, \\ \Psi(\mathbf{y}, t) &= -\frac{d_0^2}{2} (\phi_t(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{y})^2 - d_0 \phi_t(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{y} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y} + c_1, \\ \Psi_B(\mathbf{y}) &= \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y})^2}{2} + c_2. \end{aligned}$$

Wegen Beispiel 3.5.8 ist  $(\mathbf{v}, \Psi)$  eine Lösung der Flachwassergleichungen (3.22) – (3.24) mit dem Orografiefeld  $\Psi_B$ . Definieren wir die Vorticity  $\zeta$  und die Divergenz  $\delta$  mit Gleichung (3.58), so erhalten wir

$$\zeta(\mathbf{y}, t) := \text{rot}_S \mathbf{v} = 2 d_0 \phi_t(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{y}, \quad \delta(\mathbf{y}, t) := \text{div}_S \mathbf{v} = 0, \quad \forall (\mathbf{y}, t) \in S \times I.$$

Wegen Beispiel 3.5.8 ist  $(\zeta, \delta, \Psi)$  eine Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) mit dem Orografiefeld  $\Psi_B$ .

Für die grafische Darstellung betrachten wir konkrete Zahlenwerte für die Konstanten. Wir definieren die Konstante  $d_0 := \frac{u_0}{R_0}$  für eine Festkörperrotation mit der maximalen Windgeschwindigkeit  $u_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  auf  $S_{R_0}$ , siehe Beispiel 3.5.1. Weiter sei die Rotationsachse des Startzustandes definiert durch  $\mathbf{b} = (-\cos 45^\circ, 0, \sin 45^\circ)^T$ . Schließlich wählen wir  $c_2 = 0$  und  $c_1 \in \mathbb{R}$  derartig, dass die  $\Psi$ -Mittelung in Gleichung (3.45) für eine mittlere Schichtdicke von 12000m gelte. Wir weichen hier von der Schichtdicke

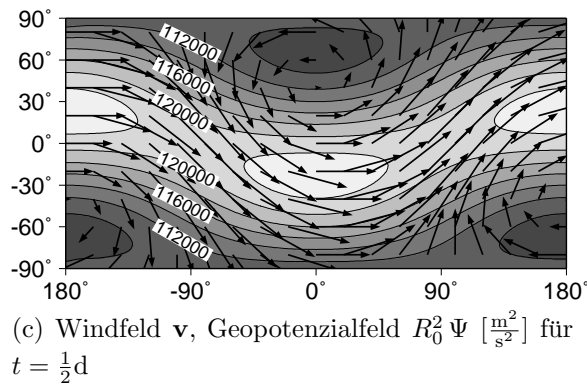
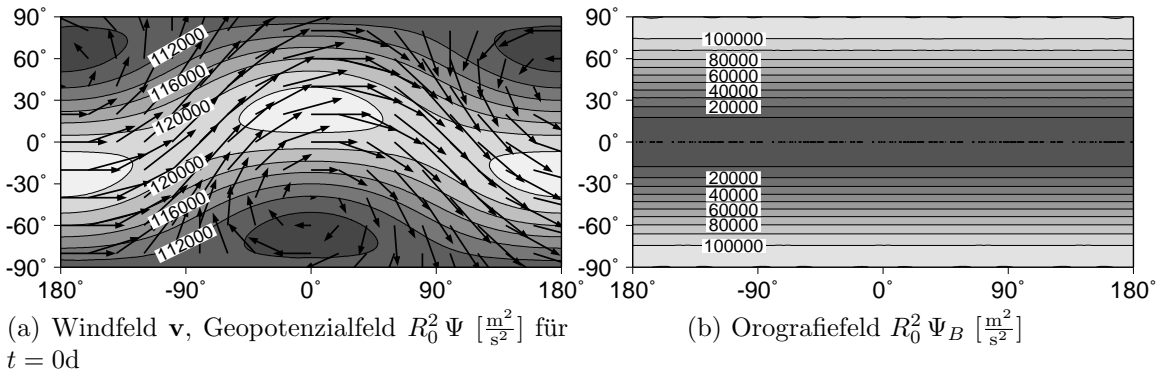


Abbildung 3.9: Instationäre Festkörperrotation,  $\mathbf{b} = (-\cos 45^\circ, 0, \sin 45^\circ)^T$ ,  $u_0 = 30\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , Achsen: geografische Länge und Breite; Beispiel 3.5.9

von 8000m aus Bemerkung 3.5.8 ab, da in diesem Fall  $\Psi - \Psi_B$  nichtnegative Werte, die Atmosphäre also eine negative Masse, hätte.

Für den Anfangszustand ( $t = 0\text{d}$ ) sind das Windfeld  $\mathbf{v}$  und das Geopotenzialfeld  $\Psi$  in Abbildung 3.9(a) und das Orografiefeld  $\Psi_B$  in Abbildung 3.9(b) dargestellt. Wir erkennen, dass das Windfeld  $\mathbf{v}$  deutlich vom geostrophischen Wind entlang der Höhenlinien des Geopotenzialfeldes  $\Psi$  abweicht. Weiterhin sehen wir, dass das Orografiefeld  $\Psi_B$  verglichen zum Geopotenzialfeld  $\Psi$  größere Gradienten hat. Da  $\Psi_B$  nur von der Stärke der Corioliskraft abhängt,  $\Psi$  hingegen auch von  $u_0$ , ist dies ein Indiz dafür, dass die Corioliskraft eine wesentliche Bedeutung für die Dynamik der Flachwassergleichungen hat.

Nach einem halben Tag für den Zeitpunkt  $t = \frac{1}{2}\text{d}$  sind das Windfeld  $\mathbf{v}$  und das Geopotenzialfeld  $\Psi$  in Abbildung 3.9(c) dargestellt. Das Strömungsmuster hat die gleiche Struktur wie in Abbildung 3.9(a). Die Wirbel der Festkörperrotation haben ihre Lage dabei aber um  $180^\circ$  verschoben.

# Kapitel 4

## Das numerische Verfahren

Für die numerische Lösung der sphärischen Flachwassergleichungen gibt es eine Vielzahl von Ansätzen und Simulationsergebnissen, siehe auch die Literatur am Anfang von Kapitel 3. Während es generell in der Atmosphärenmodellierung einige wenige Projekte mit adaptiven Gitterauflösungen gibt, sind uns für die Flachwassergleichungen bislang noch keine adaptiven numerischen Simulationen bekannt. Wir stellen in diesem Kapitel eine Lagrange-Galerkin-Methode kombiniert mit der Methode der verschwindenden Viskosität für die sphärischen Flachwassergleichungen vor, die ein räumlich adaptives und gleichzeitig zeitlich veränderliches Gitter zulässt.

Die Lagrange-Galerkin-Methode ist eine Kombination der Finite-Elemente-Methode für die Ortsdiskretisierung und der Semi-Lagrange-Methode für die Zeitdiskretisierung, siehe [Pir82], [Sül88], [MPS88]. Die Approximation der gesuchten Funktionen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode beinhaltet dabei neben der Wahl der endlich-dimensionalen Ansatzräume auch die geometrische Approximation der gekrümmten Fläche  $S$  durch geeignete Polyeder, siehe [Dzi88], [Sch93], [Sie90], [HH02]. Mit der Semi-Lagrange-Methode diskretisieren wir in einem lokalen Koordinatensystem auf  $S$  die totalen Zeitableitungen entlang der Strömungstrajektorien, siehe [Pir89], [QV97]. Die Methode der verschwindenden Viskosität besteht darin, die advektiven Anteile in den Gleichungen durch künstliche Diffusionsterme zu glätten. Damit werden im diskretisierten System unphysikalische Wellen, die durch die Beschränkung der Wellenlängen nach unten durch die Gitterweite anwachsen, gedämpft.

Da uns für das numerische Verfahren zur Diskretisierung der Flachwassergleichungen kein mathematischer Beweis der korrekten Funktionstüchtigkeit vorliegt, werden wir das Verfahren in Kapitel 5 validieren. Dazu werden wir numerische Simulationsergebnisse des idealisierten Atmosphärenmodells zum einen mit analytischen Lösungen der Flachwassergleichungen vergleichen und zum anderen zur Reproduktion von physikalischen Multiskalenprozessen aus Abschnitt 2.3.3 nutzen.

In Abschnitt 4.1 fügen wir zur Stabilisierung des numerischen Verfahrens eine künstliche Diffusion ein. Danach beschreiben wir in Abschnitt 4.2 die Lagrange-Galerkin-Methode auf einem fixierten Gitter  $S_h$ . Zum Abschluss formulieren wir in Abschnitt 4.3 das adaptive Diskretisierungsverfahren.

## 4.1 Künstliche Diffusion

Eine wesentliche Schwierigkeit für die numerische Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) stellen die advektiven Terme dar:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_s \zeta, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla_s \delta, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla_s \Phi. \quad (4.1)$$

Diese hyperbolischen Anteile der Gleichungen sind, vor allem da sie schlechte Glättungseigenschaften haben, potenzielle Quellen von numerischen Instabilitäten. Dies kommt daher, dass Unstetigkeiten in der kontinuierlichen Lösung auftreten können, die im diskreten Fall ungewollte Wellenphänomene bis hin zu Instabilitäten verursachen. Praktisch wird durch die Energiekaskade, siehe Abschnitt 2.2.2, immer ein Teil der Energie an kürzere Wellenlängen abgegeben. Die Wellenlänge im diskretisierten System ist aber durch die Gitterweite nach unten beschränkt. Ist das numerische Verfahren für diese Wellen zu wenig dissipativ, wächst dort die Energie unphysikalisch und unkontrollierbar an. Das diskrete System würde durch das Fehlen von räumlich subskaligen Prozessen instabil.

Zur Stabilisierung des numerischen Verfahrens wenden wir daher die Methode der verschwindenden Viskosität an, siehe [QV97], [GR94]. Diese Methode besteht darin, künstliche dissipative Diffusionsterme in die Gleichung (3.30) einzuführen. In den Flachwassergleichungen ersetzen wir die Terme aus der Formel (4.1) für kleine Parameter  $\nu_1, \nu_2 > 0$  durch

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_s \zeta - \nu_1 \Delta_s \zeta, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla_s \delta - \nu_1 \Delta_s \delta, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla_s \Phi - \nu_2 \Delta_s \Phi.$$

Durch eine geeignete Wahl der numerischen Parameter  $\nu_1, \nu_2$  werden wir damit stabile Lösungen berechnen können und im Grenzfall kleiner  $\nu_1, \nu_2$  die ursprünglichen Gleichungen annähern.

Aus der Literatur ist uns auch das Einfügen von dissipativen Hyperdiffusionstermen der Struktur

$$(-\nu_n \Delta_s)^n \zeta, \quad \text{für } n > 1$$

bekannt. Je höher der Wert  $n$  gewählt ist, desto stärker werden kurze Wellenlängen gedämpft. Dies ist insbesondere für spektrale Methoden der Ortsdiskretisierung sehr effektiv. Im Zusammenhang mit der Finite-Elemente-Methode allerdings steigt der Rechenaufwand für Ortsableitungen höherer Ordnung schnell an, so dass wir die einfache Diffusion ausgewählt haben.

## 4.2 Die Lagrange-Galerkin-Methode

Die Lagrange-Galerkin-Methode ist eine Kombination der Finite-Elemente-Methode für die Ortsdiskretisierung und der Semi-Lagrange-Methode für die Zeitdiskretisierung, siehe [Pir82], [Sül88], [MPS88].

Die hier verwendete Finite-Elemente-Methode auf der Sphäre  $S$  basiert neben der Approximation der Funktionenräume der schwachen Formulierung zusätzlich auf der geometrischen Approximation der Sphäre  $S$  durch einen Polyeder  $S_h$ . Auf dem Polyeder  $S_h$  stellen wir die numerische Lösung als Linearkombination der Basisfunktionen der endlichdimensionalen Ansatzräume dar, siehe [Dzi88], [Sch93], [Sie90], [HH02].

Für die Zeitdiskretisierung verwenden wir die Semi-Lagrange-Methode, die eine Diskretisierung der totalen Zeitableitung entlang von Strömungstrajektorien ist, siehe [Pir89], [QV97]. Durch die Finite-Elemente-Methode kann das Strömungsfeld diagnostisch auf dem Polyeder  $S_h$  berechnet und auf die Sphäre  $S$  projiziert werden. In lokalen Koordinatensystemen berechnen wir damit auf  $S$  die Trajektorienfunktionen, mit deren Hilfe wir die totale Zeitableitung der prognostischen Größen approximieren können.

In den Fällen von passiver Advektion, von Konvektions-Diffusionsgleichungen und von inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen gibt es in [Pir82], [Sül88], [MPS88], [Pir89] und [FF98] Konvergenz- und Stabilitätsaussagen für die Lagrange-Galerkin-Methode. Im vorliegenden Fall kompressibler Navier-Stokes-Gleichungen können wir leider nur heuristisch diese Ergebnisse nutzen. Das bedeutet, dass wir ausgehend von den guten Konvergenz- und Stabilitätseigenschaften der Lagrange-Galerkin-Methode für die genannten Gleichungen analog für das vorliegende System der Flachwassergleichungen gute Konvergenz- und Stabilitätseigenschaften erwarten. Diese sind eine wichtige Grundlage, um auch eine adaptive Gittersteuerung für die numerische Lösung zuzulassen.

Basierend auf der in Abschnitt 4.2.1 vorgestellten schwachen Formulierung der Flachwassergleichungen leiten wir mit der Finite-Elemente-Methode in Abschnitt 4.2.2 die örtlich semidiskretisierte Formulierung her. In den Abschnitten 4.2.3 bis 4.2.5 berechnen wir daraus mit der Semi-Lagrange-Methode die diskretisierte endlichdimensionale Formulierung der Gleichungen. Um die endlichdimensionale Formulierung auch mit Hilfe des Computers numerisch lösen zu können, leiten wir in den Abschnitten 4.2.6 bis 4.2.8 einen Algorithmus her, mit dem wir für ein fixiertes Gitter  $S_h$  die numerische Lösung berechnen können.

### 4.2.1 Die schwache Formulierung

Wir notieren nun die schwache Formulierung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31). Diese besteht einerseits aus einer geeigneten Wahl der Funktionenräume für die gesuchten Funktionen und andererseits der dazugehörigen Variationsformulierung der Ausgangsgleichungen.

Wir wollen die zeitliche Entwicklung des Systems im Zeitintervall  $I = (0, T)$  für  $T > 0$  betrachten. Die geeignete Wahl der Funktionenräume der schwachen Formulierung ist sehr komplex. Dies gilt insbesondere dann, wenn man sich am Problemkreis der Existenz-, Eindeutigkeits- oder Konvergenzsätze orientiert, was aber nicht das Thema der vorliegenden Arbeit ist. Wir widmen uns hingegen in diesem Kapitel der numerischen Umsetzung der Gleichungen, so dass lediglich die korrekte Formulierung der verwendeten Ausdrücke im Vordergrund steht. Als Ortsräume wählen wir die Sobo-

Leberräume  $L^2(S)$ ,  $H^1(S)$ ,  $H^2(S)$  und  $H^3(S)$  auf der Sphäre  $S$ , siehe Anhang A. Wir definieren damit die Funktionenräume

$$\begin{aligned}\mathcal{H}, \mathcal{U} &:= L^2(I, H^1(S)) \cap H^1(I, L^2(S)), \\ \mathcal{V} &:= L^2(I, H^3(S)), \\ \mathcal{W} &:= L^2(I, (H^2(S))^3) \cap L^2(I, Ta(S)).\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $Ta(S)$  den Tangentialraum von  $S$ . Durch diese Wahl sind Funktionen  $u \in \mathcal{H}$  bzw.  $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$  für fast alle  $t \in I$  dann  $H^1(S)$ -Funktionen bzw.  $H^1(S)$ -,  $H^3(S)$ -,  $H^2(S)$ -Funktionen, so dass die unten verwendeten Integrale auch existieren. Außerdem gilt nach [LM72, Kapitel 1] für eine Funktion  $u \in \mathcal{H} = \mathcal{U}$  insbesondere  $u \in C(\bar{I}, L^2(S))$ , so dass für  $u$  Anfangsdaten in  $L^2(S)$  sinnvoll vorgegeben werden können.

Damit können wir zur Variationsformulierung der Gleichungen kommen. Es seien  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0) \in (L^2(S))^3$  mit  $\int_S \zeta_0 d\sigma = \int_S \delta_0 d\sigma = 0$  vorgegebene Anfangsbedingungen. Wir bezeichnen als die schwache Formulierung der Gleichungen (3.30), (3.31) die folgende Aufgabenstellung. Man finde Funktionen  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$  mit  $\zeta(0) = \zeta_0, \delta(0) = \delta_0, \Phi(0) = \Phi_0$ , so dass für fast alle  $t \in I$  gilt

$$\begin{aligned}(D_t \zeta, \varphi)_S + \nu_1 (\nabla_s \zeta, \nabla_s \varphi)_S \\ + (\zeta \delta, \varphi)_S + (f \delta, \varphi)_S &= (F_1(\mathbf{u}), \varphi)_S, \quad \forall \varphi \in H^1(S) \\ (D_t \delta, \varphi)_S + \nu_1 (\nabla_s \delta, \nabla_s \varphi)_S \\ - (\nabla_s \Phi, \nabla_s \varphi)_S - (f \zeta, \varphi)_S &= (F_2(\mathbf{u}), \varphi)_S, \quad \forall \varphi \in H^1(S) \\ (D_t \Phi, \Psi)_S + \nu_2 (\nabla_s \Phi, \nabla_s \Psi)_S \\ + (\Phi \delta, \Psi)_S - (\Phi_0 \delta, \Psi)_S &= (F_3(\mathbf{u}), \Psi)_S, \quad \forall \Psi \in H^1(S) \\ (\nabla_s \psi, \nabla_s \eta)_S - (\zeta, \eta)_S &= 0, \quad \forall \eta \in H^1(S) \\ (\nabla_s \chi, \nabla_s \eta)_S + (\delta, \eta)_S &= 0, \quad \forall \eta \in H^1(S) \\ (\mathbf{rot}_s \psi + \nabla_s \chi, \mathbf{v})_S &= (\mathbf{u}, \mathbf{v})_S, \quad \forall \mathbf{v} \in (L^2(S))^3 \cap Ta(S).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Dabei definieren wir die totale zeitliche Ableitung durch

$$D_t g = \partial_t g + \mathbf{u} \cdot \nabla_s g, \quad \forall g \in \mathcal{H} = \mathcal{U}\tag{4.3}$$

und das Skalarprodukt in  $L^2(S)$  durch  $(\cdot, \cdot)_S$ . Die Funktionale  $F_1, F_2, F_3$  werden mit den rechten Seiten von (3.30) definiert. Wir definieren für  $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$

$$F_1(\mathbf{u}) := -\mathbf{u} \cdot \nabla_s f, \quad F_2(\mathbf{u}) := -(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla_s f - J(\mathbf{u}), \quad F_3(\mathbf{u}) := \mathbf{u} \cdot \nabla_s \Phi_B.$$

Wir bezeichnen eine Lösung  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  der schwachen Formulierung (4.2) auch als eine kontinuierliche Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31). Vereinfachend nennen wir eine Funktion  $(\zeta, \delta, \Phi)$  eine kontinuierliche Lösung der Flachwassergleichungen, wenn es Funktionen  $\psi, \chi, \mathbf{u}$  gibt, so dass  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  eine kontinuierliche Lösung ist.



Die Mittelwertfreiheit der Anfangsbedingungen  $\zeta_0$  und  $\delta_0$  auf  $S$  sichert nach [Dzi88] die eindeutige Lösbarkeit der Poissongleichungen bis auf Konstante für  $\psi$  und  $\chi$  in Gleichung (4.2). Interpretieren wir  $\zeta_0$  und  $\delta_0$  als die Vorticity und die Divergenz eines Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}_0$ , dann ist die Mittelwertfreiheit von  $\zeta_0$  und  $\delta_0$  auf  $S$  eine Konsequenz aus der Formel für die partielle Integration in Bemerkung B.3.

### 4.2.2 Die Finite-Elemente-Methode

Die schwache Formulierung (4.2) der Flachwassergleichungen dient als Ausgangspunkt für die Diskretisierung der Gleichungen (3.30), (3.31). In einem ersten Schritt nutzen wir die Finite-Elemente-Methode zur Diskretisierung des Ortes. Sie besteht zunächst darin, die Funktionenräume des Ortes in Abschnitt 4.2.1 durch endlichdimensionale Ansatzräume zu ersetzen. Es besteht die Schwierigkeit, dass das Integrationsgebiet in (4.2) die gekrümmte Hyperfläche  $S$  ist, die diskrete Darstellung der Gleichungen aber nicht von der Wahl der lokalen Koordinatensysteme abhängen soll. Daher betrachten wir  $S$  eingebettet in den  $\mathbb{R}^3$  und approximieren  $S$  durch einen Polyeder  $S_h$ . Dementsprechend müssen dann auch die verwendeten Differentialoperatoren des Gleichungssystems für  $S_h$  angepasst werden.

Wir betrachten zur Sphäre  $S$  einen Polyeder  $S_h$ , der aus Dreiecken zusammengesetzt ist und dessen Knoten auf der Sphäre  $S$  liegen, siehe auch Abschnitt 4.3.1. Die Menge der Dreiecke von  $S_h$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}_h$ . Weiter werden wir sowohl Vektoren von  $S_h$  auf  $S$  als auch Tangentialvektoren an  $S_h$  auf Tangentialvektoren an  $S$  projizieren. Dazu definieren wir die Liftfunktionen  $L$  und  $L_v$ .

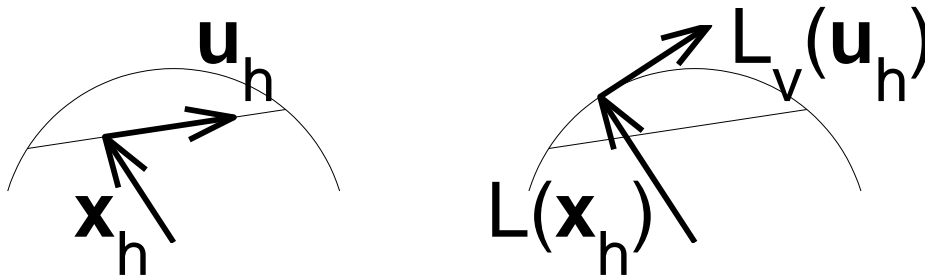


Abbildung 4.1: Projektion durch Liftfunktionen  $L$  und  $L_v$

$$L : S_h \rightarrow S, \quad L(\mathbf{x}_h) := \frac{\mathbf{x}_h}{|\mathbf{x}_h|}$$

Der Tangentialraum  $Ta_{\mathbf{x}_h}(S_h) := \{\mathbf{v}_h \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_h(\mathbf{x}_h) = 0\}$  kann auf den Kanten der Dreiecke nicht eindeutig definiert werden. Daher können wir die Liftfunktion  $L_{v, \mathbf{x}_h}$  auch nur für die  $\mathbf{x}_h \in S_h$  definieren, die im Inneren eines Dreiecks  $T \in \mathcal{T}_h$  liegen. Für

alle  $\mathbf{x}_h \in \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \text{int}(T)$  definieren wir also

$$L_{v, \mathbf{x}_h} : Ta_{\mathbf{x}_h}(S_h) \rightarrow Ta_{L(\mathbf{x}_h)}(S), \quad L_{v, \mathbf{x}_h}(\mathbf{u}_h) := -|\mathbf{u}_h| \frac{\mathbf{x}_h \times (\mathbf{x}_h \times \mathbf{u}_h)}{|\mathbf{x}_h \times (\mathbf{x}_h \times \mathbf{u}_h)}.$$

Dabei ist für  $\mathbf{x} \in S$  der Tangentialraum  $Ta_{\mathbf{x}}(S) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0\}$  definiert. Da aus dem Zusammenhang klar sein wird, um welche Stützstelle  $\mathbf{x}_h$  es sich handelt, schreiben wir auch  $L_v$  für  $L_{v, \mathbf{x}_h}$ .

Damit können wir von Funktionen auf  $S$  zu solchen auf  $S_h$  übergehen und ersetzen die Funktionenräume des Ortes  $H^1(S)$ ,  $H^3(S)$  und  $H^2(S)$  im letzten Abschnitt durch die endlichdimensionalen Ansatzräume auf  $S_h$

$$\begin{aligned} H_h &:= \{\varphi_h \in C(S_h) \mid \varphi_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(S_h), \\ U_h, V_h &:= \{\varphi_h \in C(S_h) \mid \varphi_h|_T \in P_2(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(S_h), \\ W_h &:= \{u_h \in (L^2(S_h))^3 \mid u_h|_T \in P_1(T) \cap Ta(S_h), \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset (L^2(S_h))^3. \end{aligned}$$

Im Geschwindigkeitsansatzraum  $W_h$  ist die Eigenschaft, dass die Geschwindigkeiten auf allen Dreiecken  $T \in \mathcal{T}_h$  tangential an  $S_h$  verlaufen, bereits enthalten.

Die örtlich semidiskrete Formulierung von (4.2) ergibt sich damit durch den Übergang vom Integrationsgebiet  $S$  zu  $S_h$ , durch die Substitution der Ortsfunktionenräume und durch die Ersetzung der Ortsableitungsoperatoren. Dabei ersetzen wir den Gradienten  $\nabla_S$  durch  $\nabla_{S_h}$ , der für eine hinreichend glatte Funktion  $g_h : S_h \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\nabla_{S_h} g_h := \nabla g_h - (\mathbf{n}_{S_h} \cdot \nabla g_h) \mathbf{n}_{S_h}$$

definiert ist. Dabei ist  $\mathbf{n}_{S_h}$  der äußere normierte Normalenvektor an den Polyeder  $S_h$ . Die totale Zeitableitung  $D_t$  ersetzen wir durch  $D_t^h$ , die für eine hinreichend glatte Funktion  $g_h : S_h \times I \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$D_t^h g_h(x_h, t) := D_t g_h(L^{-1}(x), t), \quad \text{für } x = L(x_h),$$

definiert ist. Das bedeutet also, dass einerseits der tangentielle Operator  $\nabla_S$  auf  $S$  durch einen auf dem Polyeder  $S_h$  (unabhängig von  $\nabla_S$ !) definierten neuen Operator  $\nabla_{S_h}$  approximiert wird. Andererseits wird die totale Zeitableitung  $D_t$ , die ja auch Ortsableitungen enthält, durch deren auf  $S_h$  projizierte Version  $D_t^h$ , die damit von  $D_t$  abhängt, approximiert.

Die Daten, die in das Gleichungssystem eingehen, wie der Coriolisparameter  $f$ , die Orografiefunktion  $\Phi_B$  und die Anfangsbedingung  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  projizieren wir mit der Liftfunktion  $L^{-1}$  von  $S$  auf  $S_h$ . Während die Projektionen von  $f$  und  $\Phi_B$  keine neuen Bezeichnungen bekommen, führen wir nur für die Anfangsbedingungen neue Bezeichnungen ein

$$\zeta_{0h} := P_{h1}(\zeta_0 \circ L), \quad \delta_{0h} := P_{h1}(\delta_0 \circ L), \quad \Phi_{0h} := P_{h2}(\Phi_0 \circ L).$$

Dabei sind  $P_{h1} : L^2(S_h) \rightarrow H_h$  bzw.  $P_{h2} : L^2(S_h) \rightarrow U_h$  die  $L^2$ -Projektionen auf  $H_h$  bzw.  $U_h$ .

Für die Anfangsbedingungen  $(\zeta_{0h}, \delta_{0h}, \Phi_{0h}) \in H_h \times H_h \times U_h$  erhalten wir damit die örtlich semidiskretisierte Formulierung von (4.2) durch die folgende Aufgabenstellung. Man finde zeitlich hinreichend glatte Funktionen  $(\zeta_h, \delta_h, \Phi_h, \psi_h, \chi_h, \mathbf{u}_h) : \bar{I} \rightarrow H_h \times H_h \times U_h \times V_h \times V_h \times W_h$  mit  $\zeta_h(0) = \zeta_{0h}$ ,  $\delta_h(0) = \delta_{0h}$ ,  $\Phi_h(0) = \Phi_{0h}$ , so dass für alle  $t \in I$  gilt

$$\begin{aligned}
& (D_t^h \zeta_h, \varphi_h)_{S_h} + \nu_1 (\nabla_{S_h} \zeta_h, \nabla_{S_h} \varphi_h)_{S_h} \\
& \quad + (\zeta_h \delta_h, \varphi_h)_{S_h} + (f \delta_h, \varphi_h)_{S_h} = (F_1(\mathbf{u}_h), \varphi_h)_{S_h}, \\
& (D_t^h \delta_h, \varphi_h)_{S_h} + \nu_1 (\nabla_{S_h} \delta_h, \nabla_{S_h} \varphi_h)_{S_h} \\
& \quad - (\nabla_{S_h} \Phi_h, \nabla_{S_h} \varphi_h)_{S_h} - (f \zeta_h, \varphi_h)_{S_h} = (F_2(\mathbf{u}_h), \varphi_h)_{S_h}, \\
& (D_t^h \Phi_h, \Psi_h)_{S_h} + \nu_2 (\nabla_{S_h} \Phi_h, \nabla_{S_h} \Psi_h)_{S_h} \\
& \quad + (\Phi_h \delta_h, \Psi_h)_{S_h} - (\Phi_0 \delta_h, \Psi_h)_{S_h} = (F_3(\mathbf{u}_h), \Psi_h)_{S_h}, \\
& (\nabla_{S_h} \psi_h, \nabla_{S_h} \eta_h)_{S_h} - (\zeta_h, \eta_h)_{S_h} = 0, \\
& (\nabla_{S_h} \chi_h, \nabla_{S_h} \eta_h)_{S_h} + (\delta_h, \eta_h)_{S_h} = 0, \\
& (\mathbf{rot}_{S_h} \psi_h + \nabla_{S_h} \chi_h, \mathbf{v}_h)_{S_h} = (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{S_h}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

für alle Testfunktionen  $(\varphi_h, \Psi_h, \eta_h, \mathbf{v}_h) \in H_h \times U_h \times V_h \times W_h$ .

Für die Lösbarkeit der Poissongleichungen für  $\psi_h$  und  $\chi_h$  in Gleichung (4.4) benötigen wir auf  $S_h$  mittelwertfreie rechte Seiten  $\zeta_h$  und  $\delta_h$ , siehe [Dzi88] und Abschnitt 4.2.1. Da die Mittelwertfreiheit in der semidiskreten Formulierung in Gleichung (4.4) nur approximativ gegeben ist, müssen wir diese in der diskreten Formulierung in Abschnitt 4.2.5 durch eine Mittelwertkorrektur künstlich erzwingen.

### 4.2.3 Die Semi-Lagrange-Methode

Ausgehend von der örtlich semidiskretisierten Formulierung (4.4) der Flachwassergleichungen, diskretisieren wir die Zeitableitungen mit Hilfe der Semi-Lagrange-Methode. Das bedeutet, dass wir eine geeignete diskrete Approximation der totalen zeitlichen Ableitung  $D_t^h$  angeben. Dazu interpretieren wir  $D_t^h$  als Zeitableitung eines mit der Strömung mitbewegten Lagrangeschen Teilchens. Für die Zeitdiskretisierung muss für den zeitlichen Differenzenquotienten demnach neben der Zeitdifferenz auch die räumliche Verschiebung des Teilchens berücksichtigt werden.

Wir berechnen also zunächst aus dem diagnostischen Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}_h$  die Trajektorienfunktion der Strömung, die die räumliche Bewegung des Lagrangeschen Teilchens beschreibt. Mit deren Hilfe können wir die totale zeitliche Ableitung  $D_t^h$  in eine pure Zeitableitung einer zusammengesetzten Funktion umformen. Diese neue Lagrangesche Zeitableitung wird schließlich durch den Differenzenquotienten ersetzt.

### Die Trajektorienfunktion

Dem Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}_h : \bar{I} \rightarrow W_h$  auf  $S_h$  wollen wir als erstes die Trajektorien  $\mathbf{X}_h$  der sich mitbewegenden Teilchen zuordnen. Dazu projizieren wir das Geschwindigkeitsfeld von  $S_h$  auf  $S$  und bestimmen auf  $S$  die Trajektorienfunktion  $\mathbf{X}$ . Deren Rückprojektion von  $S$  auf  $S_h$  definiert dann  $\mathbf{X}_h$ .  $\mathbf{u}_h$  ist aber eine diagnostische Variable in System (4.4) und damit für die Numerik zeitlich nicht kontinuierlich bekannt. Deshalb werden wir  $\mathbf{u}_h$  durch eine Folge von Ortsfunktionen  $\mathbf{u}_h^m$  für  $m \in \mathbb{N}$  approximieren und eine entsprechende Approximation  $\mathbf{X}_h^m$  der Trajektorie  $\mathbf{X}_h$  erhalten.

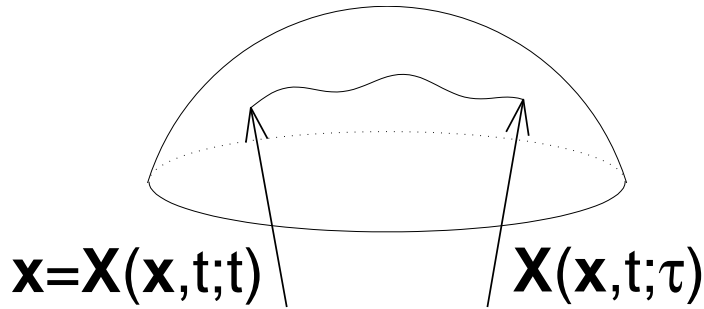


Abbildung 4.2: Teilchentrajektorie im Geschwindigkeitsfeld

Wir betrachten das durch den Operator  $L_v$  auf  $S$  projizierte Strömungsfeld  $L_v(\mathbf{u}_h)$ . Zu diesem Strömungsfeld sei  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \cdot) : \bar{I} \rightarrow S$  für jedes fixierte  $(\mathbf{x}, t) \in S \times \bar{I}$  die Trajektorienfunktion.  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau)$  bezeichnet dabei die Position des Teilchens zur Zeit  $\tau$ , das zur Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{x}$  war. Genauer ist also  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \cdot)$  die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau) &= L_v \circ \mathbf{u}_h(L^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau)), \tau), \quad \forall \tau \in \bar{I} \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}, t; t) &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

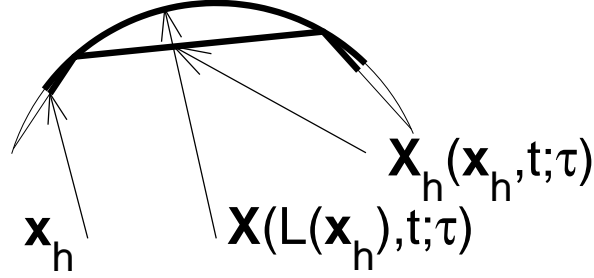
Wir nehmen an dieser Stelle an, dass wir eine eindeutige Lösung dieser gewöhnlichen Differenzialgleichung haben, siehe Abschnitt 4.2.4. Für alle  $(\mathbf{x}_h, t) \in S_h \times \bar{I}$  definieren wir damit die dazugehörige Trajektorienfunktion  $\mathbf{X}_h(\mathbf{x}_h, t; \cdot) : \bar{I} \rightarrow S_h$  auf  $S_h$  durch die Projektion von  $\mathbf{X}$  auf  $S_h$ , also durch

$$\mathbf{X}_h(\mathbf{x}_h, t; \tau) := L^{-1} \circ \mathbf{X}(L(\mathbf{x}_h), t, \tau), \quad \forall \tau \in \bar{I}.$$

Gehen wir nun vom zeitlich kontinuierlichen Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}_h$  zur diskreten Form über. Dazu betrachten wir die zeitlichen Stützstellen  $t_m = m \Delta t$ , für  $m = 0, \dots, M$ , des Intervalls  $I$ . Wir definieren damit das zeitlich diskrete Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}_h^m := \mathbf{u}_h(\cdot, t_m), \quad m = 0, \dots, M - 1.$$

Mit  $\mathbf{u}_h^m$  gehen wir analog wie im letzten Absatz vor und betrachten die Folge von Trajektorienfunktionen  $\mathbf{X}^m(\mathbf{x}, t; \cdot) : [t_m, t_{m+1}] \rightarrow S$  auf  $S$  für alle  $(\mathbf{x}, t) \in S \times [t_m, t_{m+1}]$

Abbildung 4.3: Trajektorien auf  $S$  und  $S_h$ 

und  $m = 0, \dots, M - 1$ , die die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathbf{X}^m(\mathbf{x}, t; \tau) &= L_v \circ \mathbf{u}_h^m \circ L^{-1}(\mathbf{X}^m(\mathbf{x}, t; \tau)), \quad \forall \tau \in [t_m, t_{m+1}] \\ \mathbf{X}^m(\mathbf{x}, t; t) &= \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.5)$$

lösen. Wieder nehmen wir an, dass wir eine eindeutige Lösung dieser gewöhnlichen Differenzialgleichung haben, siehe Abschnitt 4.2.4. Nun projizieren wir diese Trajektorienfunktionen auf  $S_h$  und erhalten für alle  $(\mathbf{x}_h, t) \in S_h \times [t_m, t_{m+1}]$  und  $m = 0, \dots, M - 1$

$$\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}_h, t; \tau) := L^{-1} \circ \mathbf{X}^m(L(\mathbf{x}_h), t, \tau), \quad \forall \tau \in [t_m, t_{m+1}]. \quad (4.6)$$

Auf dem Intervall  $[t_m, t_{m+1}]$  unterscheiden sich die Trajektorien  $\mathbf{X}_h$  und  $\mathbf{X}_h^m$  lediglich durch das erzeugende Windfeld. Da diese sich für kleine  $\Delta t$  annähern sollten, nehmen wir für kleine  $\Delta t$  an, dass für alle  $\mathbf{x}_h \in S_h$  und  $t, \tau \in [t_m, t_{m+1}]$  gilt:

$$\mathbf{X}_h(\mathbf{x}_h, t; \tau) \approx \mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}_h, t; \tau).$$

### Das totale Differenzial

Mit der Trajektorienfunktion  $\mathbf{X}_h$  stellen wir die totale Zeitableitung  $D_t^h$  als Differenzialquotienten entlang der Trajektorie dar. Diesen approximieren wir durch seinen Differenzenquotienten und erhalten damit die gesuchte Approximation von  $D_t^h$ .

Es sei  $g_h$  eine Funktion  $g_h : \bar{I} \rightarrow H_h$  bzw.  $g_h : \bar{I} \rightarrow U_h$ . Für alle  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_h, t) \in S \times S_h \times \bar{I}$  mit  $L(\mathbf{x}_h) = \mathbf{x}$  gilt dann

$$\begin{aligned} D_t^h g_h(\mathbf{x}_h, t) &= \partial_t g_h(L^{-1}(\mathbf{x}), t) + (L_v \circ \mathbf{u}_h) \cdot \nabla_s g_h(L^{-1}(\mathbf{x}), t) \\ &= \partial_\tau g_h(L^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau)), \tau)|_{\tau=t} \\ &= \partial_\tau g_h(\mathbf{X}_h(\mathbf{x}_h, t; \tau), \tau)|_{\tau=t}. \end{aligned}$$

Den letzten Differenzialquotienten approximieren wir durch seinen rückwärtigen Differenzenquotienten mit der Schrittweite  $\Delta t$  und erhalten

$$D_t^h g_h(\mathbf{x}_h, t) \approx \frac{g_h(\mathbf{x}_h, t) - g_h(\mathbf{X}_h(\mathbf{x}_h, t; t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

Diese Beziehung betrachten wir nur für  $t = t_{m+1}$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$ , und können dann auf dem Intervall  $[t_m, t_{m+1}]$  die Trajektorienfunktion  $\mathbf{X}_h(\mathbf{x}_h, t_{m+1}; t_m)$  durch deren Approximation  $\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}_h, t_{m+1}; t_m)$  ersetzen. Definieren wir

$$d_t^h g_h(\mathbf{x}_h, t_{m+1}) := \frac{g_h(\mathbf{x}_h, t_{m+1}) - g_h(\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}_h, t_{m+1}; t_m), t_m)}{\Delta t}, \quad (4.7)$$

so erhalten wir

$$D_t^h g_h(\mathbf{x}_h, t_{m+1}) \approx d_t^h g_h(\mathbf{x}_h, t_{m+1}). \quad (4.8)$$

Für die Zeitdiskretisierung werten wir jetzt die Funktion  $g_h$  nur noch an den Stellen  $t = t_m$ , für  $m = 0, \dots, M$ , aus und führen die zeitlich diskrete Funktionenfolge

$$g_h^m := g_h(\cdot, t_m), \quad \forall m = 0, \dots, M$$

ein. Damit können wir anstelle der Gleichungen (4.7) und (4.8) für alle  $\mathbf{x}_h \in S_h$  und  $m = 0, \dots, M - 1$

$$d_t^h g_h^{m+1}(\mathbf{x}_h) = \frac{g_h^{m+1}(\mathbf{x}_h) - g_h^m(\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}_h, t_{m+1}; t_m))}{\Delta t}, \quad (4.9)$$

$$D_t^h g_h(\mathbf{x}_h, t_{m+1}) \approx d_t^h g_h^{m+1}(\mathbf{x}_h) \quad (4.10)$$

schreiben. Die Berechnung des stromaufwärts liegenden Punktes  $\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}_h, t_{m+1}; t_m)$  in der Gleichung (4.9) beschreiben wir in folgenden Abschnitt 4.2.4.

#### 4.2.4 Die Trajektorienberechnung

Die Bestimmung des stromaufwärts liegenden Punktes  $\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}_h, t_{m+1}; t_m)$  in der Gleichung (4.9) war in Abschnitt 4.2.3 offen geblieben. Während die dafür nötige Projektion in der Gleichung (4.6) durch die Liftfunktion  $L^{-1}$  keine Schwierigkeit bedeutet, beschreiben wir in diesem Abschnitt die numerische Lösung der Anfangswertaufgabe (4.5).

Dazu formulieren wir zunächst eine Modellaufgabe, die wir in drei Schritten lösen. Im ersten Schritt formulieren wir eine lokale Darstellung der Anfangswertaufgabe. Im zweiten Schritt wählen wir eine konkrete lokale Karte aus. Im dritten Schritt approximieren wir die lokale Anfangswertaufgabe und berechnen aus dem lokalen Trajektorienwert den gesuchten Trajektorienwert.

Es sei in diesem Abschnitt  $I \subset \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall, also offen, abgeschlossen oder halboffen. In einem gegebenen Strömungsfeld  $\mathbf{u}$  interessieren wir uns für den Ort  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; \tau)$  eines Teilchens zum Zeitpunkt  $\tau \in I$ , das zum Zeitpunkt  $t_0$  am Ort  $\mathbf{x}$  war. Für  $(\mathbf{x}_0, t_0) \in S \times I$  ist also die Trajektorienfunktion  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; \cdot) : I \rightarrow S$  für das gegebene Vektorfeld  $\mathbf{u} : S \rightarrow T(S)$  die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; \tau) &= \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; \tau)), \quad \forall \tau \in I \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; t_0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Für diese Anfangswertaufgabe suchen wir eine numerische Lösung, d. h. zu  $(\mathbf{x}_0, t_0, t) \in S \times I \times I$  suchen wir eine Approximation des Funktionswertes  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; t)$ .

Kommen wir zum ersten Schritt. Wir fixieren  $\mathbf{x}_0 \in S, t_0, t \in I$  und schreiben anstelle von  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; \cdot)$  kürzer auch  $\mathbf{X}(\cdot)$ . Das Vektorfeld  $\mathbf{u}$ , und damit auch die Trajektorie  $\mathbf{X}(\cdot)$ , ist nur eine Funktion auf der Sphäre  $S$  und nicht etwa auf dem  $\mathbb{R}^3$ . Daher findet die Bewegung der Teilchen auf der Hyperfläche  $S$  statt. Es ist also zweckmäßig, die Anfangswertaufgabe (4.11) in lokalen Koordinaten von  $S$  zu schreiben. Dazu betrachten

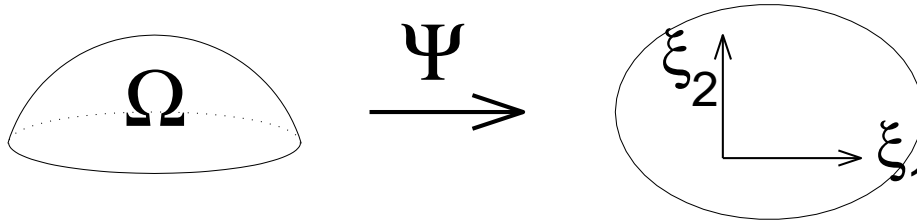


Abbildung 4.4: Lokale Karte  $(\Omega, \Psi)$  auf  $S$

wir um  $\mathbf{x}_0$  eine lokale Karte  $(\Omega, \Psi)$ , wobei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $S$  und  $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine glatte Funktion ist, siehe Abbildung 4.4. Im Tangentialraum  $Ta_{\mathbf{x}}(S) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0\}$ , für  $\mathbf{x} \in \Omega$ , bezeichnen wir die kanonische Basis bzw. die kanonische Kobasis mit

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial \xi_2}(\mathbf{x}) \right) \quad \text{bzw.} \quad ((d\xi_1)_{\mathbf{x}}, (d\xi_2)_{\mathbf{x}}).$$

Dabei ist die kanonische Basis für  $i = 1, 2$  durch  $\frac{\partial}{\partial \xi_i}(\mathbf{x}) := \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial \xi_i}(\Psi(\mathbf{x}))$  definiert und die kanonische Kobasis als Dualbasis dazu. Man bezeichnet diese Basen auch als kovariante bzw. kontravariante Basis des Tangentialraumes  $Ta_{\mathbf{x}}(S)$ , siehe Abbildung 4.5. Da die

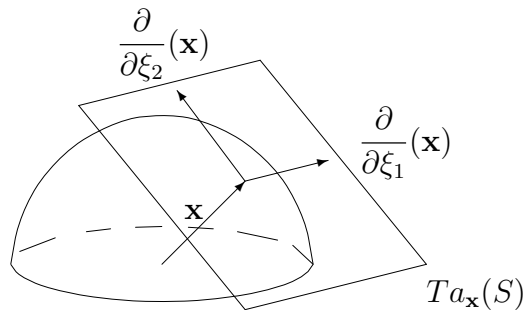


Abbildung 4.5: Tangentialraum von  $S$  im Punkt  $\mathbf{x}$

beiden Basen dual zueinander sind, gilt für jeden Tangentialvektor  $\mathbf{v} \in Ta_{\mathbf{x}}(S)$  die Darstellung

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot (d\xi_i)_{\mathbf{x}}) \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\mathbf{x}).$$

Zu einer Funktion  $\mathbf{X} : I \rightarrow S$  definieren wir bezüglich der lokalen Karte  $\Psi$  die Funktion  $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  für  $\tau \in I$  durch

$$\xi(\tau) := \Psi(\mathbf{X}(\tau)) \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{X}(\tau) = \Psi^{-1}(\xi(\tau)). \quad (4.12)$$

Wir interessieren uns für die Anfangswertaufgabe, die für die Funktion  $\xi$  gilt, wenn  $\mathbf{X}$  eine Lösung der Anfangswertaufgabe (4.11) ist. Dazu sei  $\mathbf{X}$  eine Lösung von Aufgabe (4.11) und  $\xi$  durch Gleichung (4.12) definiert. Es gilt dann für alle  $\tau \in I$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \xi_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\mathbf{X}(\tau)) &= \partial_\tau \Psi^{-1}(\xi(\tau)) = \partial_\tau \mathbf{X}(\tau) \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{X}(\tau)) = (\mathbf{u}(\mathbf{X}(\tau)) \cdot (d\xi_i)_{\mathbf{X}(\tau)}) \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\mathbf{X}(\tau)). \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt für die Funktion  $\xi$  die lokale Formulierung der Anfangswertaufgabe (4.11)

$$\begin{aligned} \partial_\tau \xi_i(\tau) &= (d\xi_i)_{\Psi^{-1}(\xi(\tau))} \cdot \mathbf{u}(\Psi^{-1}(\xi(\tau))), \quad \forall \tau \in I, i = 1, 2 \\ \xi(t_0) &= \Psi(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Umgekehrt sei die Funktion  $\xi$  eine Lösung der lokalen Aufgabe (4.13) und  $\mathbf{X}$  durch Gleichung (4.12) definiert. Es gilt dann für alle  $\tau \in I$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathbf{X}(\tau) &= \partial_\tau \Psi^{-1}(\xi(\tau)) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\mathbf{X}(\tau)) \partial_\tau \xi_i(\tau) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\mathbf{X}(\tau)) (d\xi_i)_{\mathbf{X}(\tau)} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}(\tau)) \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{X}(\tau)). \end{aligned}$$

Es folgt also, dass  $\mathbf{X}$  eine Lösung der Anfangswertaufgabe (4.11) ist. Wir fassen zusammen, dass  $\mathbf{X}$  genau dann eine Lösung von (4.11) ist, wenn  $\xi$  eine Lösung von (4.13) ist. Also ist (4.13) die gesuchte Darstellung der Anfangswertaufgabe (4.11) in lokalen Koordinaten.

Im zweiten Schritt definieren wir die lokale Karte  $(\Omega, \Psi)$  genauer. Zum Anfangswert  $\mathbf{x}_0 \in S$  der Trajektorie  $\mathbf{X}$  ist  $\mathbf{u}_0 := \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) \in Ta_{\mathbf{x}_0}(S)$  der dazugehörige Wert des Geschwindigkeitsfeldes. Wir wählen als lokale Kartenabbildung  $\Psi$  gewöhnliche Kugelkoordinaten auf der Sphäre, wobei der Punkt  $\mathbf{x}_0$  auf der Äquatorlinie ( $\varphi = 0$ ) liegen soll und  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$  entlang der Äquatorlinie zeigt. Genauer definieren wir  $\Psi$  durch die Umkehrabbildung  $\Psi^{-1} : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow S$ ,

$$\Psi^{-1}(\lambda, \varphi) := \cos \lambda \cos \varphi \mathbf{x}_0 + \sin \lambda \cos \varphi \frac{\mathbf{u}_0}{|\mathbf{u}_0|} + \sin \varphi \mathbf{x}_0 \times \frac{\mathbf{u}_0}{|\mathbf{u}_0|}.$$

Insbesondere folgt damit  $\Psi(\mathbf{x}_0) = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda}(\mathbf{x}_0) = \frac{\mathbf{u}_0}{|\mathbf{u}_0|}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_2}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \times \frac{\mathbf{u}_0}{|\mathbf{u}_0|}.$$



Die kanonische Basis des Tangentialraumes  $Ta_{\mathbf{x}_0}(S)$  ist also orthonormal im  $\mathbb{R}^3$ , so dass die kanonische Basis und die Kobasis identisch sind. Es gilt also

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}(\mathbf{x}_0) = (d\xi_i)_{\mathbf{x}_0}, \quad i = 1, 2.$$

Im dritten Schritt approximieren wir den Wert  $\xi(t)$  durch die Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung (4.13). Dazu integrieren wir die erste Gleichung in (4.13) über das Intervall  $(t_0, t)$  und approximieren das Integral durch die Rechteckregel. Dies entspricht einem Zeitschritt des bekannten Polygonzugverfahrens, einer expliziten Runge-Kutta Formel, siehe [Mae88].

$$\begin{aligned} \xi_i(t) - \xi_i(t_0) &= \int_{t_0}^t (d\xi_i)_{\Psi^{-1}(\xi(\tau))} \cdot \mathbf{u}(\Psi^{-1}(\xi(\tau))) d\tau \\ &\approx (t - t_0)(d\xi_i)_{\mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{u}_0 = \begin{cases} (t - t_0)|\mathbf{u}_0|, & \text{für } i = 1 \\ 0, & \text{für } i = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung aus (4.13) erhalten wir damit die Approximation der lokalen Trajektorie

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (t - t_0)|\mathbf{u}_0| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir dies in die Kartenfunktion (4.12) ein, erhalten wir die Approximation der Trajektorienfunktion

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; t) \approx \cos((t - t_0)|\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|) \mathbf{x}_0 + \sin((t - t_0)|\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|) \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|}. \quad (4.14)$$

Die Kurve  $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0; t)$  verläuft also auf einem Großkreisbogen, an dem  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$  Tangentialvektor ist, siehe Abbildung 4.6. Die Berechnung des stromaufwärts liegenden Punktes  $\mathbf{X}_h^m(\mathbf{x}_h, t_{m+1}; t_m)$  in der Gleichung (4.9) erfolgt also durch die Gleichung (4.14), wobei wir die Argumente  $(x_0, t_0, t) := (\mathbf{x}_h, t_{m+1}, t_m)$  wählen.

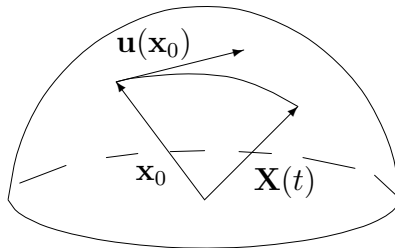


Abbildung 4.6: Teilchentrajektorie

Die Vorgehensweise in diesem Abschnitt setzt implizit natürlich voraus, dass die notierten Anfangswertaufgaben (4.11) und (4.13) überhaupt lösbar sind. Genauer benötigen wir zumindest einen Eindeutigkeitssatz für Aufgabe (4.11) und einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Aufgabe (4.13). Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass z. B. die lokale Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seiten in den Aufgaben (4.11) und (4.13) dafür hinreichend ist. Gehen wir von solchen rechten Seiten aus, dann bekommen wir für jede Karte eine lokale Trajektorie und können Trajektorien  $\mathbf{X}$  durch (4.12) konstruieren. Durch die Eindeutigkeit wäre dann  $\mathbf{X}$  schließlich kartenunabhängig.

In unserem Fall wird das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  in Abschnitt 4.2.3 als Projektion einer stückweisen Polynomfunktion von  $S_h$  auf  $S$  bestimmt. Abgesehen davon, dass  $\mathbf{u}$  damit auf den Projektionen der Dreieckskanten von  $S_h$  noch nicht einmal definiert ist, können wir die Stetigkeit von  $\mathbf{u}$  über diese Kanten hinweg nicht erwarten! Dies liegt genau daran, dass wir ein stetiges Vektorfeld (überhaupt erst einmal ein Vektorfeld) auf den Dreieckskanten der  $C^{0,1}$ -Hyperfläche  $S_h$  gar nicht definieren können. Wir begnügen uns also damit,  $\mathbf{u}$  durch Projektion über die Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h$  nur fast überall auf  $S$  zu bestimmen und sonst durch Null zu definieren. Als theoretische Grundlage für die numerische Lösung müsste die Anfangswertaufgabe (4.11) dann in einem geeigneten schwachen Sinn interpretiert werden.

Es hat sich gezeigt, dass die numerische Umsetzung trotz der eben erwähnten theoretischen Probleme zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Die Erklärung besteht darin, dass wir die Trajektorien in Abschnitt 4.2.7 nur an inneren Quadraturpunkten der Dreiecke berechnen, siehe Abschnitt 4.2.6, und damit das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  auch nur an diesen Stellen auswerten.  $\mathbf{u}$  ist damit an den Auswertungsstellen stetig auf  $S$ . Wir erwarten daher, dass für ein hinreichend glattes Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  ohne starke Unstetigkeiten diese Trajektorienberechnung gute physikalische und stabile Ergebnisse liefert. Falls das numerische Verfahren durch numerische Diffusion etwaige Unstetigkeiten in  $\mathbf{u}$  glättet, hätte das für die Trajektorienberechnung wahrscheinlich eine stabilisierende Auswirkung.

### 4.2.5 Die endlichdimensionale Formulierung

Wir kombinieren nun die Ergebnisse der beiden letzten Abschnitte. Dazu gehen wir von der örtlich semidiskretisierten Formulierung (4.4) aus und führen zu den zeitlich kontinuierlichen Funktionen  $(\zeta_h, \delta_h, \Phi_h, \psi_h, \chi_h, \mathbf{u}_h) : \bar{I} \rightarrow H_h \times H_h \times U_h \times V_h \times V_h \times W_h^3$  aus Abschnitt 4.2.2 für  $m = 1, \dots, N$  die zeitlich diskreten Funktionenfolgen

$$\begin{aligned} \zeta_h^m &:= \zeta_h(\cdot, t_m), & \delta_h^m &:= \delta_h(\cdot, t_m), & \Phi_h^m &:= \Phi_h(\cdot, t_m), \\ \psi_h^m &:= \psi_h(\cdot, t_m), & \chi_h^m &:= \chi_h(\cdot, t_m), & \mathbf{u}_h^m &:= \mathbf{u}_h(\cdot, t_m) \end{aligned}$$

ein. Damit können wir zur vollständig diskretisierten Formulierung von (4.2) kommen. Es seien  $(\zeta_{0h}, \delta_{0h}, \Phi_{0h}) \in H_h \times H_h \times U_h$  die diskreten Anfangsbedingungen aus Abschnitt 4.2.2. Betrachten wir das semidiskrete Gleichungssystem (4.4) nur für die

Zeiten  $t = t_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , und ersetzen gemäß der Beziehung (4.10) die totalen zeitlichen Ableitungen, so erhalten wir die folgende diskrete Aufgabenstellung: Es gelte  $\zeta_h^0 = \zeta_{0h}$ ,  $\delta_h^0 = \delta_{0h}$ ,  $\Phi_h^0 = \Phi_{0h}$  und  $(\psi_h^0, \chi_h^0, \mathbf{u}_h^0)$  seien Lösung der letzten drei Gleichungen für die Helmholtz-Zerlegung in System (4.15). Man finde für  $m = 0, \dots, M - 1$  Funktionen  $(\zeta_h^{m+1}, \delta_h^{m+1}, \Phi_h^{m+1}, \psi_h^{m+1}, \chi_h^{m+1}, \mathbf{u}_h^{m+1}) \in H_h \times H_h \times U_h \times V_h \times V_h \times W_h$  als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
& (d_t^h \zeta_h^{m+1}, \varphi_h)_{S_h} + \nu_1 (\nabla_{S_h} \zeta_h^{m+1}, \nabla_{S_h} \varphi_h)_{S_h} \\
& \quad + \frac{1}{2} (\zeta_h^m \delta_h^{m+1} + \zeta_h^{m+1} \delta_h^m, \varphi_h)_{S_h} + (f \delta_h^{m+1}, \varphi_h)_{S_h} = (F_1(\mathbf{u}_h^m), \varphi_h)_{S_h}, \\
& (d_t^h \delta_h^{m+1}, \varphi_h)_{S_h} + \nu_1 (\nabla_{S_h} \delta_h^{m+1}, \nabla_{S_h} \varphi_h)_{S_h} \\
& \quad - (\nabla_{S_h} \Phi_h^{m+1}, \nabla_{S_h} \varphi_h)_{S_h} - (f \zeta_h^{m+1}, \varphi_h)_{S_h} = (F_2(\mathbf{u}_h^m), \varphi_h)_{S_h}, \\
& (d_t^h \Phi_h^{m+1}, \Psi_h)_{S_h} + \nu_2 (\nabla_{S_h} \Phi_h^{m+1}, \nabla_{S_h} \Psi_h)_{S_h} \\
& \quad (\Phi_h^m \delta_h^{m+1} + \Phi_h^{m+1} \delta_h^m, \Psi_h)_{S_h} - (\Phi_0 \delta_h^{m+1}, \Psi_h)_{S_h} = (F_3(\mathbf{u}_h^m), \Psi_h)_{S_h}, \\
& \quad (\nabla_{S_h} \psi_h^{m+1}, \nabla_{S_h} \eta_h)_{S_h} - (\zeta_h^{m+1}, \eta_h)_{S_h} = 0, \\
& \quad (\nabla_{S_h} \chi_h^{m+1}, \nabla_{S_h} \eta_h)_{S_h} + (\delta_h^{m+1}, \eta_h)_{S_h} = 0, \\
& \quad (\mathbf{rot}_{S_h} \psi_h^{m+1} + \nabla_{S_h} \chi_h^{m+1}, \mathbf{v}_h)_{S_h} = (\mathbf{u}_h^{m+1}, \mathbf{v}_h)_{S_h}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

für alle Testfunktionen  $(\varphi_h, \Psi_h, \eta_h, \mathbf{v}_h) \in H_h \times U_h \times V_h \times W_h$ . Wir bezeichnen die Lösung  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m, \psi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m)_{m=0, \dots, M}$  der diskreten Formulierung (4.15) auch als die diskrete Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31). Vereinfachend nennen wir eine Funktion  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)_{m=0, \dots, M}$  die diskrete Lösung der Flachwassergleichungen, wenn es Funktionen  $(\psi_h^m)_{m=0, \dots, M}$ ,  $(\chi_h^m)_{m=0, \dots, M}$  und  $(\mathbf{u}_h^m)_{m=0, \dots, M}$  gibt, so dass die Funktion  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m, \psi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m)_{m=0, \dots, M}$  die diskrete Lösung ist.

Wie in Abschnitt 4.2.2 sind die Poissongleichungen für  $\psi_h^{m+1}$  und  $\chi_h^{m+1}$  im diskreten Gleichungssystem (4.15) nur für auf  $S_h$  mittelwertfreie rechten Seiten  $\zeta_h^{m+1}$  und  $\delta_h^{m+1}$  bis auf Konstanten eindeutig lösbar, siehe [Dzi88]. Deshalb führen wir eine Mittelwertkorrektur durch und nutzen als rechte Seiten in den Poissongleichungen im Gleichungssystem (4.15) die mittelwertfreien Funktionen

$$\zeta_h^{m+1} - \frac{1}{|S_h|} \int_{S_h} \zeta_h^{m+1} d\sigma, \quad \delta_h^{m+1} - \frac{1}{|S_h|} \int_{S_h} \delta_h^{m+1} d\sigma.$$

Aus Gründen der übersichtlicheren Darstellung lassen wir diese Mittelwertkorrektur für die Beschreibung des numerischen Verfahrens im Folgenden weg.

### 4.2.6 Quadraturformeln

Bei der Aufstellung der Matrizen im nächsten Abschnitt werden wir Integrale einer Funktion  $g : S_h \rightarrow \mathbb{R}$  über die Oberfläche des Polyeders  $S_h$  berechnen. Dazu zerlegen wir  $S_h$  in die Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h$  seiner Triangulierung. Auf einem Dreieck  $T$  berechnen

$i$	$x_i$	$y_i$	$w_i$
1	$1/3$	$1/3$	$9/80$
2	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(155 + \sqrt{15})/2400$
3	$(9 - 2\sqrt{15})/21$	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(155 + \sqrt{15})/2400$
4	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(9 - 2\sqrt{15})/21$	$(155 + \sqrt{15})/2400$
5	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(155 - \sqrt{15})/2400$
6	$(9 + 2\sqrt{15})/21$	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(155 - \sqrt{15})/2400$
7	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(9 + 2\sqrt{15})/21$	$(155 - \sqrt{15})/2400$

Tabelle 4.1: Stützstellen  $(x_i, y_i)$  und Gewichte  $w_i$  im Einheitsdreieck  $K$ 

wir das Oberflächenintegral mit Hilfe des zweidimensionalen Parameterbereichs  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0, x + y < 1\}$  (Einheitsdreieck) und der lokalen Kartenabbildung  $k : K \rightarrow T$ . Wir erhalten also

$$\int_{S_h} g(\mathbf{x}_h) d\sigma = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T g(\mathbf{x}_h) d\sigma = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_K g(k(x, y)) \sqrt{gr(k')} d(x, y).$$

Handelt es sich bei  $g$  um eine stückweise Polynomfunktion (natürlich bezüglich der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ ), ist die Integration der rechten Seite kein wesentliches Problem. Ist aber  $g$  auf einem Dreieck  $T \in \mathcal{T}_h$  nicht als Polynomfunktion gegeben, müssen wir das Integral mit einer geeigneten Quadraturformel approximieren. In unserem Fall haben wir eine Sieben-Punkte-Formel gewählt, die Polynome bis zum Grad fünf exakt integriert, siehe [Sch91] und [Str71]. Mit den Stützstellen und Gewichten aus Tabelle 4.1 ergibt sich dann die Quadraturformel

$$\int_K g(k(x, y)) \sqrt{gr(k')} d(x, y) \approx \sum_{i=1}^7 w_i g(k(x_i, y_i)) \sqrt{gr k'}.$$

### 4.2.7 Die Berechnung der Matrizen

In jedem Zeitschritt müssen wir die Lösung der endlichdimensionalen Formulierung (4.15) bestimmen. Dazu brauchen wir die Darstellung von (4.15) als Matrixgleichung, die in Programmcode umsetzbar ist und mit Hilfe von linearen Lösern gelöst werden kann. Die Aufstellung der Matrixgleichung beschreiben wir in diesem Abschnitt und folgen dabei der üblichen Vorgehensweise in der Literatur, siehe [GR94] und [Sch91].

Die Aufgabe besteht darin, für einen fixierten Zeitschritt  $m = 1, \dots, M$  aus den bekannten Ortsfunktionen

$$(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m, \psi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m) \in H_h \times H_h \times U_h \times V_h \times V_h \times W_h$$

ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Ortsfunktionen

$$(\zeta_h^{m+1}, \delta_h^{m+1}, \Phi_h^{m+1}, \psi_h^{m+1}, \chi_h^{m+1}, \mathbf{u}_h^{m+1}) \in H_h \times H_h \times U_h \times V_h \times V_h \times W_h$$

zu bestimmen. Dazu wählen wir Basen der Ansatzräume  $H_h, U_h, V_h, W_h$  und stellen die Ortsfunktionen durch ihre nicht mehr ortsabhängigen Koordinaten bzgl. dieser Basen dar. Genauer wählen wir zum Ansatzraum  $H_h$  die übliche lineare Lagrange-Basis  $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N_1}$  und zu den Ansatzräumen  $U_h = V_h$  die quadratische Lagrange-Basis  $(\Psi_i)_{i=1, \dots, N_2}$ . Die Basis  $(\mathbf{v}_i)_{i=1, \dots, N_3}$  ist ebenfalls eine lineare Lagrange-Basis, aber für Vektorfunktionen. Zur Definition betrachten wir nacheinander alle Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h$ . Auf dem Dreieck  $T \in \mathcal{T}_h$  fixieren wir eine zweidimensionale Basis  $(\mathbf{v}_{T1}, \mathbf{v}_{T2})$  des Tangentialraumes von  $T$ . Für  $T$  definieren wir die sechs neuen Basisvektorfunktionen als die auf  $T$  linearen Vektorfunktionen, die an einem Knoten den Wert  $\mathbf{v}_{T1}$  bzw.  $\mathbf{v}_{T2}$  haben und an den anderen beiden Knoten den Wert 0. Mit den Koordinaten  $\hat{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_{N_1})^T, \hat{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_{N_1})^T \in \mathbb{R}^{N_1}$  und  $\hat{\Phi} = (\Phi_1, \dots, \Phi_{N_2})^T, \hat{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_{N_2})^T, \hat{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_{N_2})^T \in \mathbb{R}^{N_2}, \hat{u} = (u_1, \dots, u_{N_3})^T \in \mathbb{R}^{N_3}$  ergeben sich dann die Darstellungen der zu bestimmenden Ortsfunktionen

$$\begin{aligned} \zeta_h^{m+1} &= \sum_{i=1}^{N_1} \zeta_i \varphi_i, & \delta_h^{m+1} &= \sum_{i=1}^{N_1} \delta_i \varphi_i, & \Phi_h^{m+1} &= \sum_{i=1}^{N_2} \Phi_i \Psi_i, \\ \psi_h^{m+1} &= \sum_{i=1}^{N_2} \psi_i \Psi_i, & \chi_h^{m+1} &= \sum_{i=1}^{N_2} \chi_i \Psi_i, & \mathbf{u}_h^{m+1} &= \sum_{i=1}^{N_3} u_i \mathbf{v}_i. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Herleitung der Matrixgleichung demonstrieren wir anhand der ersten Gleichung von System (4.15). Deren äquivalente Formulierung lautet

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_1} \zeta_i (\varphi_i, \varphi_j)_{S_h} + \Delta t \nu_1 \sum_{i=1}^{N_1} \zeta_i (\nabla_{S_h} \varphi_i, \nabla_{S_h} \varphi_j)_{S_h} \\ + \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \zeta_i (\varphi_i \delta_h^m, \varphi_j)_{S_h} + \Delta t \sum_{i=1}^{N_1} \delta_i \left( \left( \frac{\zeta_h^m}{2} + f \right) \varphi_i, \varphi_j \right)_{S_h} \\ = (\zeta_h^m (\mathbf{X}_h^m(\cdot, t_{m+1}, t_m)) + \Delta t F_1(\mathbf{u}_h^m), \varphi_j)_{S_h} \end{aligned} \quad (4.17)$$

für  $j = 1, \dots, N_1$ . Für die Matrixschreibweise dieses Gleichungssystems definieren wir nun Massenmatrix, Steifigkeitsmatrix, Coriolismatrix und zwei weitere Matrizen

$$\begin{aligned} M_1 &= (m_{ij})_{i,j=1, \dots, N_1}, & S_1 &= (s_{ij})_{i,j=1, \dots, N_1}, & C &= (c_{ij})_{i,j=1, \dots, N_1}, \\ B_1 &= (b_{ij}^{(1)})_{i,j=1, \dots, N_1}, & B_2 &= (b_{ij}^{(2)})_{i,j=1, \dots, N_1} \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} m_{ij} &:= (\varphi_j, \varphi_i)_{S_h}, & s_{ij} &:= (\nabla_{S_h} \varphi_j, \nabla_{S_h} \varphi_i)_{S_h}, & c_{ij} &:= (f \varphi_j, \varphi_i)_{S_h}, \\ b_{ij}^{(1)} &:= (\varphi_j \delta_h^m, \varphi_i)_{S_h}, & b_{ij}^{(2)} &:= (\zeta_h^m \varphi_j, \varphi_i)_{S_h} \end{aligned}$$

und den Vektor  $\mathbf{F}_1 = (f_i)_{i=1, \dots, N_1}$  der rechten Seite durch

$$f_i := (\zeta_h^m (\mathbf{X}_h^m(\cdot, t_{m+1}, t_m)) + \Delta t F_1(\mathbf{u}_h^m), \varphi_i)_{S_h}.$$

Damit lautet die Matrixschreibweise von Gleichungssystem (4.17) für die Vektoren  $\hat{\zeta}, \hat{\delta}$

$$\left( M_1 + \Delta t \nu_1 S_1 + \frac{\Delta t}{2} B_1 \right) \hat{\zeta} + \left( \Delta t C + \frac{\Delta t}{2} B_2 \right) \hat{\delta} = \mathbf{F}_1.$$

Analog können wir die anderen Gleichungen von System (4.15) in Matrixgleichungen umformen. Für die Notation der Matrixgleichungen des gesamten Systems (4.15) benötigen wir noch weitere Definitionen. Es seien die Matrizen

$$\begin{aligned} M_2 &= (m_{ij}^{(2)})_{i,j=1,\dots,N_2}, & M_{21} &= (m_{ij}^{(21)})_{i,j=1,\dots,N_2}, & S_2 &= (s_{ij}^{(2)})_{i,j=1,\dots,N_2}, \\ S_{12} &= (s_{ij}^{(12)})_{i=1,\dots,N_1;j=1,\dots,N_2}, & B_3 &= (b_{ij}^{(3)})_{i,j=1,\dots,N_2}, & B_4 &= (b_{ij}^{(4)})_{i=1,\dots,N_2;j=1,\dots,N_1}, \\ R &= (r_{ij})_{i=1,\dots,N_3;j=1,\dots,N_2}, & G &= (g_{ij})_{i=1,\dots,N_3;j=1,\dots,N_2}, & M_3 &= (m_{ij}^{(3)})_{i=1,\dots,N_3;j=1,\dots,N_3} \end{aligned}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} m_{ij}^{(2)} &:= (\Psi_j, \Psi_i)_{S_h}, & m_{ij}^{(21)} &:= (\varphi_j, \Psi_i)_{S_h}, & s_{ij}^{(2)} &:= (\nabla_{S_h} \Psi_j, \nabla_{S_h} \Psi_i)_{S_h}, \\ s_{ij}^{(12)} &:= (\nabla_{S_h} \Psi_j, \nabla_{S_h} \varphi_i)_{S_h}, & b_{ij}^{(3)} &:= (\Psi_j \delta_h^m, \Psi_i)_{S_h}, & b_{ij}^{(4)} &:= (\Phi_h^m \varphi_j, \Psi_i)_{S_h}, \\ r_{ij} &:= (\mathbf{rot}_{S_h} \Psi_j, \mathbf{v}_i)_{S_h}, & g_{ij} &:= (\nabla_{S_h} \Psi_j, \mathbf{v}_i)_{S_h}, & m_{ij}^{(3)} &:= (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i)_{S_h}. \end{aligned}$$

Weiter seien die Vektoren der rechten Seiten definiert durch

$$\mathbf{F}_2 = (f_i^{(2)})_{i=1,\dots,N_1}, \quad \mathbf{F}_3 = (f_i^{(3)})_{i=1,\dots,N_2}$$

mit

$$\begin{aligned} f_i^{(2)} &:= (\delta_h^m(\mathbf{X}_h^m(\cdot, t_{m+1}, t_m)) + \Delta t F_2(\mathbf{u}_h^m), \varphi_i)_{S_h}, \\ f_i^{(3)} &:= (\Phi_h^m(\mathbf{X}_h^m(\cdot, t_{m+1}, t_m)) + \Delta t F_3(\mathbf{u}_h^m), \Psi_i)_{S_h}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Matrixgleichungen

$$\begin{pmatrix} M_1 + \Delta t \nu_1 S_1 + \frac{\Delta t}{2} B_1 & \Delta t C + \frac{\Delta t}{2} B_2 & 0 \\ -\Delta t C & M_1 + \Delta t \nu_1 S_1 & -\Delta t S_{12} \\ 0 & \frac{\Delta t}{2} B_4 & M_2 + \Delta t \nu_2 S_2 + \frac{\Delta t}{2} B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\delta} \\ \hat{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\left. \begin{aligned} S_2 \hat{\psi} &= M_{21} \hat{\zeta}, \\ S_2 \hat{\chi} &= -M_{21} \hat{\delta}, \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

$$R \hat{\psi} + G \hat{\chi} = M_3 \hat{u} \quad (4.20)$$

für die unbekanntenen Koordinaten  $\hat{\zeta}, \hat{\delta}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\chi}$  und  $\hat{u}$ . Es gilt nun die folgende Aussage. Die Koordinaten  $\hat{\zeta}, \hat{\delta}, \hat{\Phi}, \hat{\psi}, \hat{\chi}$  und  $\hat{u}$  lösen genau dann die Matrixgleichungen (4.18) – (4.20), wenn die Funktion  $(\zeta_h^{m+1}, \delta_h^{m+1}, \Phi_h^{m+1}, \psi_h^{m+1}, \chi_h^{m+1}, \mathbf{u}_h^{m+1})$ , definiert durch die Gleichung (4.16) eine Lösung der endlichdimensionalen Formulierung (4.15) ist.

Zur Aufstellung der Matrixgleichungen (4.18) und (4.19) müssen sowohl bei der Berechnung der Matrizen als auch der rechten Seiten  $L^2$ -Skalarprodukte, also Integrale, berechnet werden. In den meisten Fällen handelt es sich bei den Integranden um Funktionen aus den Ansatzräumen und damit um stückweise Polynomfunktionen. Die Integration bereitet mit Abschnitt 4.2.6 keine Probleme. Betrachten wir aber die Funktionen, die externe Daten liefern, wie z. B. den Coriolisparameter  $f$  oder die Orografiefunktion  $\Phi_B$ , so sind diese auf den Dreiecken  $T \in \mathcal{T}_h$  nicht polynomial gegeben. Weiterhin treten bei der Berechnung der rechten Seiten  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$  als Integranden die auf jedem Dreieck  $T$  polynomialen Funktionen  $\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m$  auf, deren Auswertung aber am jeweiligen stromaufwärts gelegenen Punkt  $\mathbf{X}_h^m(\cdot, t_{m+1}, t_m)$  erfolgt. Dies hat zur Folge, dass die Funktionen

$$\zeta_h^m(\mathbf{X}_h^m(\cdot, t_{m+1}, t_m)), \quad \delta_h^m(\mathbf{X}_h^m(\cdot, t_{m+1}, t_m)), \quad \Phi_h^m(\mathbf{X}_h^m(\cdot, t_{m+1}, t_m))$$

auf allen  $T$  im Allgemeinen dann keine Polynomfunktionen sein werden. Das bedeutet also, dass wir die Integrale, in denen externe Daten oder Funktionen mit stromaufwärts gelegenen Punkten auftreten, mit Hilfe der in Abschnitt 4.2.6 vorgestellten Quadraturformel näherungsweise berechnen.

Für die Verwendung der Lösung der Matrixgleichungen (4.18) – (4.20) im vorliegenden numerischen Verfahren müssen wir zunächst sicherstellen, dass das Gleichungssystem lösbar ist. Für die Matrix in der Matrixgleichung (4.18) können wir zur Lösbarkeit keine Aussage machen, da die Matrix das endlichdimensionale Analogon zu den prognostischen Gleichungen (3.30) darstellt. Für die Gleichung (3.30) haben wir aber bereits in den Abschnitten 4.2, 4.2.1 festgestellt, dass uns Existenz- und Eindeutigkeitsätze aus der Literatur nicht bekannt sind und diese Beweise auch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind.

Leider ist die Matrix  $S_2$  nicht invertierbar, da  $S_2$  eine symmetrische Steifigkeitsmatrix auf der randlosen Hyperfläche  $S_h$  und damit nur positiv semidefinit ist. Genauer besteht der Kern von  $S_2$  genau aus den konstanten Vektoren und das Bild von  $S_2$  aus allen Vektoren, deren Zeilensumme Null ist. Damit folgt, was wir bereits aus [Dzi88] und Abschnitt 4.2.5 wissen, dass die beiden Matrixgleichungen in System (4.19) für mittelwertfreie rechte Seiten bis auf Konstanten eindeutig lösbar sind. Für die Lösung dieser Gleichungen müssen wir in Abschnitt 5.1.2 daher ein Lösungsverfahren wählen, das nicht invertierbare Matrixgleichungen lösen kann.

Die Massenmatrix  $M_3$  in Gleichung (4.20) ist symmetrisch und positiv definit. Damit ist  $M_3$  invertierbar und es gibt keine weiteren Einschränkungen bei der Wahl des Löser.

### 4.2.8 Der Algorithmus

Für die Verwendung der Lagrange-Galerkin-Methode als numerisches Verfahren zur Lösung der sphärischen Flachwassergleichungen im idealisierten Atmosphärenmodell in Kapitel 5 fassen wir die Erkenntnisse der letzten Abschnitte in einem Algorithmus zusammen.

Die Lösung der endlichdimensionalen Formulierung (4.15) ist eine Funktionenfolge. Für deren Berechnung initialisieren wir den nullten Zeitschritt mit den Anfangsbedingungen und lösen dann für jeden Zeitschritt das lineare endlichdimensionale System (4.15). Das Lösen von Problem (4.15) ist wiederum äquivalent zum Lösen der Matrixgleichungen (4.18) – (4.20). Diese Vorgehensweise beschreibt der folgende Algorithmus.

Wir betrachten zur kontinuierlichen Anfangsbedingung  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  aus Abschnitt 4.2.1 die auf  $S_0$  diskrete Anfangsbedingung  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0) = (\zeta_{0h}, \delta_{0h}, \Phi_{0h})$  aus Abschnitt 4.2.2.

Es sei  $S_h$  ein Polyeder wie in Abschnitt 4.3.1,  $\Delta t > 0$  die Zeitschrittweite und  $I = (0, M \Delta t)$  das Integrationsintervall. Wir betrachten zur kontinuierlichen Anfangsbedingung  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  aus Abschnitt 4.2.1 die auf  $S_h$  diskrete Anfangsbedingung

$$(\zeta_{0h}, \delta_{0h}, \Phi_{0h}) \in H_h \times H_h \times U_h$$

aus Abschnitt 4.2.2.

#### Algorithmus 4.2.1 (Lagrange-Galerkin-Methode)

1. *Initialisierung: Definiere  $\zeta_h^0 = \zeta_{0h}$ ,  $\delta_h^0 = \delta_{0h}$ ,  $\Phi_h^0 = \Phi_{0h}$ . Berechne mit Helmholtz-Zerlegung in System (4.15) die diskreten Startwerte  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0, \psi_h^0, \chi_h^0, \mathbf{u}_h^0)$ . Setze  $m = 0$ .*
2. *Falls  $m=M$ , dann ENDE. Sonst gehe zu Schritt 3.*
3. *Berechne  $(\zeta_h^{m+1}, \delta_h^{m+1}, \Phi_h^{m+1}, \psi_h^{m+1}, \chi_h^{m+1}, \mathbf{u}_h^{m+1})$  als Lösung von System (4.15) durch Lösung der Matrixgleichungen (4.18) – (4.20). Setze  $m = m+1$ .*

### 4.3 Adaptivität

In Abschnitt 4.2 haben wir die Lagrange-Galerkin-Methode vorgestellt. Ausgehend von der schwachen Formulierung der Flachwassergleichungen auf  $S$  haben wir dort eine Diskretisierung auf einem Polyeder  $S_h$  angegeben. Um zeitlich veränderliche dynamische Strukturen angemessen auflösen zu können, erweitern wir in diesem Abschnitt diese Methode, indem wir vor jedem Zeitschritt das Polyeder  $S_h$  auf Grundlage der alten numerischen Lösung adaptieren.

Dazu beschreiben wir zunächst, wie ein Polyeder mit Hilfe der Bisektion von Dreiecken verfeinert und durch die Suche nach „auflösbaren Patches“ vergrößert werden kann. Danach versuchen wir den Diskretisierungsfehler ortsabhängig abzuschätzen, um diesen dann als Verfeinerungskriterium nutzen zu können. Schließlich beschreiben wir, wie aus der heuristischen Annahme, dass der Diskretisierungsfehler gleichverteilt sei, die Auswahl der zu verfeinernden/vergrößernden Dreiecke folgt. Mit diesen Ergebnissen kann dann der Algorithmus für die adaptive Lagrange-Galerkin-Methode formuliert werden.



### 4.3.1 Das Polyeder $S_h$

An dieser Stelle wollen wir das Polyeder  $S_h$ , das wir in Abschnitt 4.2.2 eingeführt haben, genauer beschreiben, siehe Abbildung 4.7. Für  $h > 0$  verstehen wir unter einem Polyeder  $S_h$  auf  $S$  ein aus ebenen Dreiecken zusammengesetztes Polyeder im  $\mathbb{R}^3$ , dessen Knoten auf der Sphäre  $S$  liegen. Wir bezeichnen  $S_h$  auch als Gitter auf  $S$ . Die Menge der Dreiecke von  $S_h$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}_h$ . Für den Diskretisierungsparameter  $h$ , den wir auch Gitterweite nennen, soll gelten

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T).$$

Die Betrachtung von  $h$  als Maß für ein Polyeder ist sinnvoll, wenn alle Dreiecke annähernd den gleichen Durchmesser haben.  $h$  ist dann ein Maß für die Feinheit der räumlichen Auflösung. Für die Definition eines uniformen Polyeders verweisen wir auf das Ende dieses Abschnitts. Unterscheiden sich die Durchmesser der Dreiecke in einem räumlich adaptiven Polyeder stark, dann gibt  $h$  nur die Feinheit der größten Stelle an, was für die Gesamtstruktur des Polyeders unter Umständen nicht sehr aussagekräftig sein wird. Trotzdem verwenden wir den Index  $h$  auch für ein adaptives Polyeder  $S_h$  als Bezeichnung.

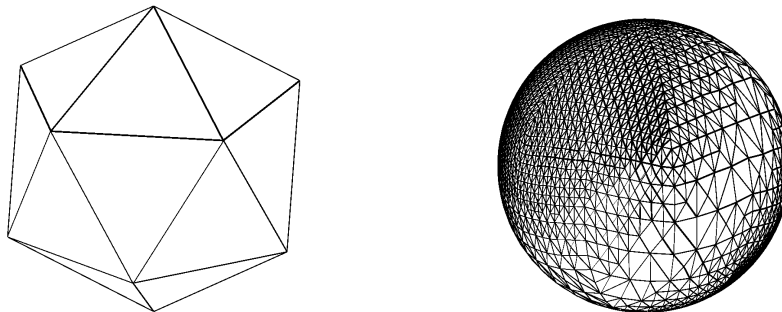


Abbildung 4.7: Ikosaeder und ein Polyeder  $S_h$

Wir wollen durch Verfeinern und/oder Vergröbern ein Polyeder auf  $S$  konstruieren. Dazu verwenden wir die Methode der Bisektion, die auch in [Bän91a], [Bän91b], [Bän93] [Sch93] und [Beh96] beschrieben wurde. Der Ausgangspunkt ist ein Makropolyeder. Für die numerische Umsetzung haben wir als Makropolyeder das Ikosaeder  $S_{Ico}$  gewählt, siehe Abbildung 4.7.

Es sei mit  $S_0$  ein Polyeder auf  $S$  mit der Triangulierung  $\mathcal{T}_0$  gegeben. Auf der Grundlage eines Fehlerschätzers, siehe Abschnitt 4.3.2, bestimmen wir die Teilmengen  $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_0$  bzw.  $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}_0$ , die die Dreiecke enthalten, die verfeinert bzw. vergrößert werden sollen. Zur Erzeugung des adaptierten Polyeders  $S_2$  führen wir nacheinander einen Verfeinerungsschritt und einen Vergrößerungsschritt durch.

Betrachten wir zunächst einen Verfeinerungsschritt. In jedem Dreieck  $T \in \mathcal{F}$  sei eine Verfeinerungskante markiert. Soll das Dreieck  $T$  verfeinert werden, dann wird  $T$  vom

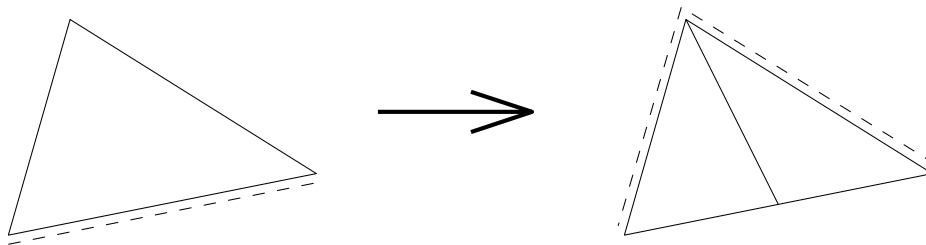


Abbildung 4.8: Bisektion eines Dreiecks an markierter Kante (---)

Mittelpunkt der markierten Kante zum gegenüberliegenden Eckpunkt durchgeschnitten. In den beiden neu entstandenen Dreiecken werden die nicht geteilten Kanten als neue Verfeinerungskanten markiert, siehe Abbildung 4.8. Nachdem alle Dreiecke  $T \in \mathcal{F}$  derartig verfeinert wurden, enthält die neue Triangulierung im Allgemeinen nicht konforme Knoten. Diese entstehen in den Dreiecken, die Nachbardreiecke von verfeinerten Dreiecken sind und selber nicht verfeinert wurden. Die nicht konformen Knoten müssen dann durch erneute Bisektion von Dreiecken beseitigt werden. Ein Verfeinerungsschritt erfolgt dann wie im folgenden Algorithmus.

#### Algorithmus 4.3.1 (Bisektion)

1. *Initialisierung: Betrachte Starttriangulierung  $\mathcal{T}^{(0)} = \mathcal{T}_0$ ,  $\mathcal{F}^{(0)} = \mathcal{F}$  und  $k:=0$ .*
2. *Verfeinere jedes Dreieck  $T \in \mathcal{F}^{(k)}$ . Projiziere alle neu entstandenen Knoten auf die Sphäre  $S$ . Erhalte Polyeder mit Triangulierung  $\mathcal{T}^{(k+1)}$ .*
3.  $\mathcal{F}^{(k+1)} := \{T \in \mathcal{T}^{(k+1)} \mid T \text{ enthält nicht konforme Knoten.}\}$
4. *Wenn  $\mathcal{F}^{(k+1)} \neq \emptyset$ , dann setze  $k := k + 1$  und gehe zu Schritt 2. Sonst ENDE.*

Für den zweidimensionalen Fall wird in [Bän91b] bewiesen, dass der Algorithmus terminiert und die Dreiecke nicht degenerieren. Als Ergebnis von Algorithmus 4.3.1 erhalten wir also ein aus  $S_0$  verfeinertes Polyeder  $S_1$  auf  $S$ .

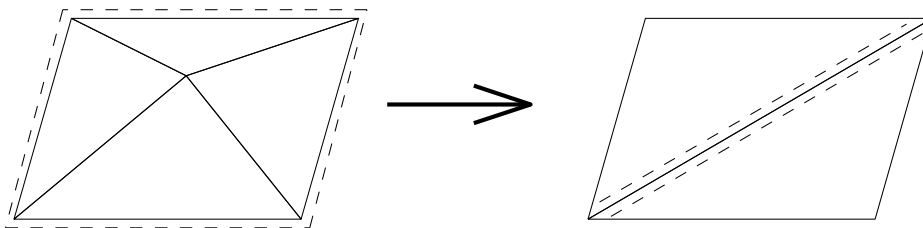


Abbildung 4.9: „Auflösbarer Patch“

Betrachten wir einen Vergrößerungsschritt. Es seien  $\mathcal{T}_1$  die Triangulierung des Polyeders  $S_1$  und  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{T}_1$  die Menge der Dreiecke aus  $\mathcal{G}$ , die nicht durch den Algorithmus

4.3.1 verfeinert wurden. Weiter sei  $T \in \mathcal{G}_1$ .  $T$  ist entweder in der Makrotriangulierung enthalten oder wurde durch eine Bisektion erzeugt. Im letzteren Fall könnten wir den Verfeinerungsschritt für  $T$  einfach umkehren und die Kante wieder weglassen. Im Allgemeinen entstehen dabei aber nicht konforme Knoten bzw. sogar Vierecke im Polyeder. Deshalb basiert der Vergrößerungsalgorithmus auf der Suche nach „auflösbaren Patches“, in denen  $T$  enthalten ist, siehe [Bän91a]. Ein „auflösbarer Patch“ besteht dabei aus vier Dreiecken, die zusammen ein Viereck bilden, mit einer geeigneten Anordnung der markierten Kanten. Das Weglassen einer inneren Kante kehrt die frühere Bisektion um, siehe Abbildung 4.9. Wir bezeichnen die Menge der „auflösbaren Patches“ in  $S_1$  mit  $\mathcal{P}_1$ .

#### Algorithmus 4.3.2 (Patchsuche)

*Für jeden „auflösbaren Patch“  $P \in \mathcal{P}_1$  betrachte die vier Dreiecke  $T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathcal{T}_1$  mit  $P = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ . Falls  $P \subset \mathcal{G}_1$ , dann lasse eine innere Kante von  $P$  weg und vergrößere  $P$ .*

Als Ergebnis von Algorithmus 4.3.2 erhalten wir also ein aus  $S_1$  vergrößertes Polyeder  $S_2$  auf  $S$ . Falls zu vergrößernde Dreiecke aus  $\mathcal{G}_1$  in  $S_1$  nicht in einem „auflösbaren Patch“ liegen, vergrößert unter Umständen der Algorithmus 4.3.2 das Polyeder  $S_1$  nicht, obwohl  $\mathcal{G}_1$  Dreiecke zur Vergrößerung enthielt.

Das Polyeder  $S_2$  auf  $S$  ist damit aus dem Polyeder  $S_0$  durch Verfeinerung der Dreiecke aus  $\mathcal{F}$  und durch Vergrößerung (falls möglich) der Dreiecke aus  $\mathcal{G}$  konstruiert worden.

Wir nennen das Polyeder  $S_h$  uniform, falls alle Dreiecke  $T \in \mathcal{T}_h$  von  $S_h$  durch dieselbe Anzahl von nacheinander ausgeführten Bisektionen der Dreiecke des Makropolyeders entstanden sind. Hatten die Dreiecke des Makropolyeders annähernd den gleichen Durchmesser, so können wir das auch für jedes uniforme Polyeder erwarten.

### 4.3.2 Der Diskretisierungsfehler

Die Zielstellung des numerischen Verfahrens ist die Approximation der kontinuierlichen Lösung  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  der schwachen Formulierung (4.2) durch die diskrete Lösung  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m, \psi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m)_{m=0, \dots, M}$  der diskreten Formulierung (4.15). Wir können die Abweichung der diskreten Lösung von der kontinuierlichen Lösung mit dem globalen Diskretisierungsfehler quantifizieren. Die räumliche Verteilung des Fehlers wird durch den lokalen Diskretisierungsfehler angegeben.

Wir wollen genauer den Diskretisierungsfehler des numerischen Verfahrens betrachten, der innerhalb eines Zeitschrittes entsteht. Dazu wählen wir  $M := 1$ . Zum Zeitpunkt  $t_1 = \Delta t$ , definieren wir den globalen Diskretisierungsfehler  $\eta$  über dem Gebiet  $S$  durch

$$\eta^D := \|(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})(\cdot, t_1) - (\zeta_h^1, \delta_h^1, \Phi_h^1, \psi_h^1, \chi_h^1, L_v \circ \mathbf{u}_h^1) \circ L^{-1}\|_S.$$

Dabei soll  $\|\cdot\|_S$  eine geeignete Norm für Funktionen auf  $S$  sein. Um die räumliche Verteilung von  $\eta$  berechnen zu können, betrachten wir zu  $\eta$  für jedes Dreieck  $T \in \mathcal{T}_h$

den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\eta_T^D := \|(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})(\cdot, t_1) - (\zeta_h^1, \delta_h^1, \Phi_h^1, \psi_h^1, \chi_h^1, L_v \circ \mathbf{u}_h^1) \circ L^{-1}\|_{L(T)}$$

Wir bemerken zunächst, dass für die Bestimmung des Diskretisierungsfehlers die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichungen (4.2) und (4.15) vorausgesetzt werden muss. Wie in den Abschnitten 4.2 und 4.2.7 bereits erwähnt, gehen wir ohne einen Beweis davon aus. Über die Struktur der kontinuierlichen Lösung  $(\zeta, \delta, \Phi, \psi, \chi, \mathbf{u})$  wissen wir trotzdem so wenig, dass die direkte Bestimmung des Diskretisierungsfehlers problematisch ist.

Anstatt den Fehler direkt auszurechnen, besteht die Lösung des Problems darin, den Fehler in Abhängigkeit von der diskreten Lösung zu schätzen. Dazu definieren wir für  $T \in \mathcal{T}_h$  einen lokalen Fehlerschätzer  $\eta_T$ , der von der diskreten Lösung  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m, \psi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m)$ , für  $m = 0, 1$ , abhängen darf und den Wert von  $\eta_T^D$  approximiert, also

$$\eta_T \approx \eta_T^D.$$

Zu  $\eta_T$  definieren wir den globalen Fehlerschätzer  $\eta$  durch

$$\eta = \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2}, \quad (4.21)$$

der den Wert von  $\eta^D$  approximieren soll, d. h.

$$\eta \approx \eta^D. \quad (4.22)$$

Für genauere Definitionen von Fehlerschätzern verweisen wir auf die Literatur, siehe z. B. [GR94], [Ver96]. Wir sprechen im Weiteren von einem mathematischen Fehlerschätzer, falls ein Beweis für die Beziehung (4.22) existiert. Gibt es hingegen nur heuristische Argumente für die Approximation (4.22), dann sprechen wir von einem physikalischen Fehlerschätzer.

Die Berechnung von mathematischen Fehlerschätzern ist ein Problem für sich. Für stationäre elliptische Probleme, instationäre parabolische Probleme bis hin zu konvektionsdominierten hyperbolischen Problemen gibt es dazu in der Literatur zahlreiche Beiträge, siehe z. B. [Ver96], [BR78], [KKO02], [EJ95], [JRB95], [BV96], [Dör96]. Leider sind uns für die Flachwassergleichungen bislang keine Ergebnisse bekannt, so dass wir in der vorliegenden Arbeit ausschließlich physikalische Fehlerschätzer betrachten.

### Physikalischer Fehlerschätzer

Für ein heuristisches Fehlerkriterium der numerischen Lösung gehen wir davon aus, dass sich bei einer fixierten Gitterweite  $h > 0$  turbulente Strömungszustände schlechter approximieren lassen als laminare Strömungszustände. Für turbulente Strömungen wollen wir also eine Erhöhung der Gitterweite erreichen. Um in erster Näherung eine turbulente Strömung zu charakterisieren, betrachten wir als Maß für Turbulenz

Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}$ . Daher wählen wir im Dreieck  $T \in \mathcal{T}_h$  als physikalischen Fehlerschätzer die  $L^2(T)$ -Norm der prognostischen Größen Vorticity und Divergenz

$$\eta_T := \left( \int_T (\zeta_h^0)^2 + (\delta_h^0)^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.23)$$

### Gitteradaption

Wir wollen mit der Kenntnis eines lokalen Fehlerschätzers zu einem Kriterium kommen, das uns angibt, welches Dreieck  $T \in \mathcal{T}_h$  verfeinert oder vergrößert werden soll. Dazu fordern wir, dass die lokalen Fehlerschätzer über den Dreiecken des Gitters gleichverteilt sein sollen, also

$$\eta_T = \eta_{T'}, \quad \forall T, T' \in \mathcal{T}_h.$$

Wollen wir den globalen Diskretisierungsfehler kleiner als die globale Fehlerschranke  $\epsilon > 0$  zwingen, so bedeutet das für den globalen Fehlerschätzer

$$\eta \leq \epsilon.$$

Dies ist dann mit Gleichung (4.21) äquivalent zu der Forderung

$$\eta_T \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{N}}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

für die lokalen Fehlerschätzer, wobei  $N \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Dreiecke sein soll. Praktisch orientieren wir uns innerhalb eines Zeitschrittes für  $\epsilon$  an dem aktuell berechneten Wert  $\eta$  auf dem alten Gitter und geben den lokalen Schätzern einen Toleranzkorridor mit  $0 < \underline{\epsilon} < \epsilon < \bar{\epsilon}$  und

$$\frac{\underline{\epsilon}}{\sqrt{N}} \leq \eta_T \leq \frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{N}}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

vor. Die Dreiecke, die diese Bedingung verletzen, müssen verfeinert bzw. vergrößert werden. Wir definieren also die Mengen der Dreiecke, die verfeinert bzw. vergrößert werden sollen durch

$$\mathcal{F} := \left\{ T \in \mathcal{T}_h \mid \eta_T < \frac{\underline{\epsilon}}{\sqrt{N}} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G} := \left\{ T \in \mathcal{T}_h \mid \eta_T > \frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{N}} \right\}.$$

Für die Anwendung des folgenden Algorithmus sei die Funktion  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0, \psi_h^0, \chi_h^0, \mathbf{u}_h^0)$  auf einem Polyeder  $S_h$  mit der Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  gegeben. Wir berechnen zur Funktion  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0, \psi_h^0, \chi_h^0, \mathbf{u}_h^0)$  den globalen Fehlerschätzer  $\eta$  und definieren dazu die globale Fehlerschranke  $\epsilon := \eta$ . Für die auf  $S_h$  diskrete Funktion  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0, \psi_h^0, \chi_h^0, \mathbf{u}_h^0)$  berechnen wir in Schritt 2 von Algorithmus 4.3.3 den lokalen Fehlerschätzer  $\eta_T$  auf einem möglicherweise anderen Polyeder  $S'_h$ . In diesem Fall meinen wir dann die Funktion  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0, \psi_h^0, \chi_h^0, \mathbf{u}_h^0)$ , projiziert auf  $S'_h$  mit Hilfe der Liftfunktionen der Polyeder  $S_h$  und  $S'_h$  aus Abschnitt 4.2.2.

**Algorithmus 4.3.3 (Gitteradaption)**

1. *Initialisierung: Betrachte Starttriangulierung  $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_h$ ,  $k := 0$ .*
2. *Berechne für alle  $T \in \mathcal{T}_k$  für Funktion  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0, \psi_h^0, \chi_h^0, \mathbf{u}_h^0)$  den lokalen Fehlerschätzer  $\eta_T$  aus Gleichung (4.23) und konstruiere  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ .*
3. *Falls  $\mathcal{F} = \emptyset$ , dann ENDE.  
Sonst weiter mit Schritt 4.*
4. *Führe mit  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  nacheinander eine Verfeinerung und eine Vergrößerung mit den Algorithmen 4.3.1 und 4.3.2 durch. Erhalte neues Polyeder  $S_{k+1}$  mit Triangulierung  $\mathcal{T}_{k+1}$ , setze  $k := k + 1$ .  
Weiter mit Schritt 2.*

Mit diesem Algorithmus können wir ausgehend von einem Polyeder mit dazugehöriger diskreter Lösung ein adaptiertes Polyeder berechnen, auf dem der lokale Fehlerschätzer in guter Näherung gleichverteilt ist. Abweichungen von der Gleichverteilung können sich zum einen dadurch ergeben, dass im Algorithmus 4.3.1 wegen nicht konformer Knoten zusätzlich verfeinert werden muss und zum anderen dadurch, dass im Algorithmus 4.3.2 für ein zu verfeinerndes Dreieck kein „auflösbarer Patch“ gefunden werden kann.

**4.3.3 Der adaptive Algorithmus**

Für die Verwendung der adaptiven Lagrange-Galerkin-Methode als numerisches Verfahren zur Lösung der sphärischen Flachwassergleichungen im idealisierten Atmosphärenmodell in Kapitel 5 fassen wir die Adaptionstrategie der letzten beiden Abschnitte in einem Algorithmus zusammen.

Ausgehend vom im Abschnitt 4.3.1 ausgewählten Makropolyeder, dem Ikosaeder  $S_{Ico}$ , berechnen wir ein uniformes Startpolyeder  $S_0$ . Dazu geben wir eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  vor und verfeinern mit dem Algorithmus 4.3.1 nacheinander  $n$  Mal die Dreiecke des Makropolyeders und erhalten das Polyeder  $S_0$ . Wir betrachten zur kontinuierlichen Anfangsbedingung  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  aus Abschnitt 4.2.1 die auf  $S_0$  diskrete Anfangsbedingung  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0) = (\zeta_{0h}, \delta_{0h}, \Phi_{0h})$  aus Abschnitt 4.2.2. Dazu berechnen wir mit den Gleichungen der Helmholtz-Zerlegung in System (4.15) die diskreten diagnostischen Funktionen  $\psi_h^0, \chi_h^0$  und  $\mathbf{u}_h^0$ . Auf der Grundlage der Funktion  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0, \psi_h^0, \chi_h^0, \mathbf{u}_h^0)$  konstruieren wir mit dem Algorithmus 4.3.3 das adaptierte Polyeder  $S_1$ . Auf  $S_1$  kann dann mit der Lagrange-Galerkin-Methode ein Zeitschritt der Flachwassergleichungen mit dem Algorithmus 4.2.1 berechnet werden. Wir erhalten eine numerische Lösung auf  $S_1$ , die Grundlage einer neuen adaptiven Anpassung des Polyeders  $S_1$  ist. So fahren wir zeitschrittweise fort, bis die Endzeit  $T > 0$  der Simulation erreicht ist.

Es seien  $\Delta t > 0$  ein fixierter Zeitschritt,  $M \in \mathbb{N}$  die Anzahl der zu berechnenden Zeitschritte und die maximale Verfeinerung  $n \in \mathbb{N}$  gegeben. Dazu definieren wir die Gesamtzeit  $T := M \Delta t$ .

**Algorithmus 4.3.4 (Adaptive Lagrange-Galerkin-Methode)**

1. *Initialisierung: Berechne  $S_0$  aus  $S_{Ico}$  durch  $n$ -maliges Anwenden des Algorithmus 4.3.1 mit der Wahl  $\mathcal{F} = \mathcal{T}_h$ . Berechne diskrete Anfangsbedingung  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0)$  durch Projektion der kontinuierlichen Anfangsbedingungen  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  auf  $S_0$  wie in Abschnitt 4.2.2. Berechne mit Helmholtz-Zerlegung in System (4.15) die diskreten Startwerte  $(\zeta_h^0, \delta_h^0, \Phi_h^0, \psi_h^0, \chi_h^0, \mathbf{u}_h^0)$ .  
Setze  $m := 0$ .*
2. *Falls  $m = M$ , dann ENDE.  
Sonst berechne aus diskreter Lösung  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m, \psi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m)$  auf Polyeder  $S_m$  mit Algorithmus 4.3.3 das Polyeder  $S_{m+1}$ .*
3. *Löse mit Algorithmus 4.2.1 auf  $S_{m+1}$  für einen Zeitschritt das System (4.15).  
Erhalte diskrete Lösung  $(\zeta_h^{m+1}, \delta_h^{m+1}, \Phi_h^{m+1}, \psi_h^{m+1}, \chi_h^{m+1}, \mathbf{u}_h^{m+1})$  auf  $S_{m+1}$ .  
Setze  $m := m + 1$ . Gehe zu Schritt 2.*

# Kapitel 5

## Simulationsergebnisse

Das in Kapitel 4 vorgestellte numerische Verfahren haben wir innerhalb eines idealisierten Atmosphärenmodells implementiert. Wir nutzen in diesem Kapitel die Modellsimulationen, um das numerische Verfahren zu validieren. Die Validierung erfolgt in zwei Schritten. Der erste Schritt besteht in einem Vergleich von numerischen Lösungen des Modells mit analytischen Lösungen der Flachwassergleichungen. Im zweiten Schritt betrachten wir eine Modellsimulation, mit der der Einfluss einer kleinräumigen orografischen Störung auf ein vorgegebenes Strömungsfeld modelliert wird.

Wir zeigen, dass im idealisierten Atmosphärenmodell sowohl analytische Lösungen durch numerische Lösungen gut approximiert werden als auch planetare Rossbywellen durch eine orografische Störung angeregt werden. Damit ist das Ergebnis der Validierung, dass das numerische Verfahren aus Kapitel 4 numerisch konvergent ist und dass atmosphärische Multiskalenprozesse mit dem Atmosphärenmodell modelliert werden können, siehe Abschnitt 2.3. Der numerische Fehler des Atmosphärenmodells bei der Modellierung regional begrenzter dynamischer Prozesse ist wesentlich von der Gitterweite in dieser Region abhängig, siehe Abschnitt 5.2.2. Bei gleicher Qualität der numerischen Lösungen können wir daher mit einem räumlich adaptiven Polyeder im Vergleich zu einem uniformen Polyeder Rechenzeit einsparen. Die Modellierung atmosphärischer Multiskalenprozesse ist sowohl mit dem uniformen als auch mit dem zeitlich adaptiven Atmosphärenmodell möglich. Die Ergebnisse sind qualitativ vergleichbar und weisen Unterschiede sowohl in der Herausprägung lokaler Strömungsmuster wie auch für das zonal gemittelte Geopotenzial auf, siehe Abschnitt 5.3.

In Abschnitt 5.1 stellen wir das idealisierte Atmosphärenmodell und die Umsetzung des numerischen Verfahrens auf dem Computer vor. Anschließend zeigen wir in Abschnitt 5.2 anhand von analytischen Lösungen der Flachwassergleichungen die numerische Konvergenz des numerischen Verfahrens aus Kapitel 4. Die Simulationsergebnisse in Abschnitt 5.3 zeigen, dass das Modell geeignet ist, physikalisch relevante Multiskalenprozesse zu modellieren.



## 5.1 Das idealisierte Atmosphärenmodell

Auf der Grundlage des Algorithmus 4.3.4, der das numerische Verfahren in Kapitel 4 beschreibt, haben wir ein idealisiertes Atmosphärenmodell in der Programmiersprache Fortran 90 implementiert.

### 5.1.1 Die Programmstruktur des Atmosphärenmodells

Das Atmosphärenmodell berechnet für  $M \in \mathbb{N}$  Zeitschritte und einen gegebenen Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0) \in (L^2(S))^3$  mit  $\int_S \zeta_0 d\sigma = \int_S \delta_0 d\sigma = 0$  die numerische Lösung der sphärischen Flachwassergleichungen (3.30), (3.31)

$$(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m, \psi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m)_{m=0, \dots, M}$$

entsprechend des Algorithmus 4.3.4. Die numerische Lösung ist also eine Approximation der Lösung der endlichdimensionalen Formulierung (4.15). Vereinfachend sprechen wir auch von der numerischen Lösung  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)_{m=0, \dots, M}$  des Atmosphärenmodells, wenn es eine Folge von diagnostischen Funktionen  $(\psi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m)_{m=0, \dots, M}$  gibt, so dass  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m, \psi_h^m, \chi_h^m, \mathbf{u}_h^m)_{m=0, \dots, M}$  eine numerische Lösung des Atmosphärenmodells ist.

Der generelle Programmablauf folgt dem adaptiven Lagrange-Galerkin-Algorithmus 4.3.4. Im Initialisierungsschritt des Algorithmus wird das uniforme Polyeder  $S_0$  mit dem Algorithmus 4.3.1 und die Anfangswerte auf  $S_0$  berechnet. Wir setzen  $m := 0$ . Der  $m + 1$ -te Zeitschritt besteht aus zwei Teilschritten. Der erste Schritt ist die Berechnung des Polyeders  $S_{m+1}$  mit dem Algorithmus 4.3.3.  $S_{m+1}$  ist das Rechengebiet für den Zeitschritt  $m + 1$ . Im zweiten Schritt berechnen wir dann mit dem Lagrange-Galerkin-Algorithmus 4.2.1 die diskrete Lösung  $(\zeta_h^{m+1}, \delta_h^{m+1}, \Phi_h^{m+1}, \psi_h^{m+1}, \chi_h^{m+1}, \mathbf{u}_h^{m+1})$  auf  $S_{m+1}$ . Dazu werden die Matrixgleichungen (4.18) – (4.20) aufgestellt und anschließend gelöst. Wir erhöhen dann  $m$  um Eins und fahren mit dem nächsten Zeitschritt fort bis alle Zeitschritte abgearbeitet sind.

Wird das Polyeder  $S_h$  in jedem Zeitschritt von Algorithmus 4.3.4 durch den Algorithmus 4.3.3 aufgrund des physikalischen Fehlerschätzers aus Abschnitt 4.3.2 adaptiert, dann nennen wir das Atmosphärenmodell adaptiv. Bleibt hingegen, z. B. durch die Verwendung eines trivialen Fehlerschätzers, das Polyeder  $S_h$  in jedem Zeitschritt von Algorithmus 4.3.4 konstant, dann nennen wir das Atmosphärenmodell statisch.

### 5.1.2 Gittergenerator und parallele Löserchnittstelle

Die Gittergenerierung im vorliegenden Atmosphärenmodell erfolgt durch den Gittergenerator `amatos`, siehe [BRH<sup>+</sup>04]. `amatos` ist ein Fortran 90-Programmpaket und stellt über Prozeduraufrufe die geometrischen Koordinaten der Knotenpunkte des Polyeders, die Daten der Modellvariablen in den Knoten und die Nachbarschaftsbeziehungen der Dreiecke zur Verfügung. Gibt man an, welche Dreiecke des Polyeders  $S_m$  verfeinert oder vergrößert werden sollen, berechnet `amatos` das Polyeder  $S_{m+1}$  gemäß den Algorithmen 4.3.1 und 4.3.2.

Die Lösung der Matrixgleichungen (4.18) – (4.20) in Algorithmus 4.2.1 erfolgt mit der parallelen Löserschnittstelle FoSSI, siehe [FHB04]. Das Programmpaket FoSSI besitzt eine Fortran 90-Schnittstelle, stellt Datenstrukturen für dünn besetzte Matrizen bereit und löst lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von parallelen Löserpaketen. Für die Lösung der Matrixgleichung (4.18) haben wir ein Bi-CGSTAB-Verfahren (Bi-Conjugate Gradient STABILized) und für die Lösung der Matrixgleichungen (4.19) ein GMRES-Verfahren (Generalized Minimal RESidual) verwendet, siehe [QV97]. Damit konnte der zeitlich aufwendigste Teil des Modells, das Lösen der Gleichungssysteme, durch das parallele Lösen auf vier Prozessoren wesentlich beschleunigt werden, siehe [FHB04].

Die Modellläufe wurden auf der SunFire 15000 mit 56 900MHz-UltraSPARCIIC CPUs und 112 GB Hauptspeicher am Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung in Bremerhaven durchgeführt.

### 5.1.3 Numerische Stabilität des Atmosphärenmodells

Der Begriff der Stabilität eines numerischen Verfahrens für die Lösung einer Differenzialgleichung wird in der Literatur nicht einheitlich benutzt, siehe [GR94], [DB02], [Mae88]. In Anlehnung an [QV97] nennen wir das idealisierte Atmosphärenmodell numerisch stabil, wenn Konstanten  $\delta_t, c_1 > 0, \lambda \in \mathbb{R}$  existieren, so dass für alle  $h, \Delta t > 0$  mit  $0 < \Delta t \leq \delta_t$ , für alle numerischen Lösungen  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)_{m=0, \dots, M}$  und für alle  $m = 0, \dots, M$

$$\|\zeta_h^m\| + \|\delta_h^m\| + \|\Phi_h^m\| \leq c_1 \exp^{\lambda t_m} (\|\zeta_h^0\| + \|\delta_h^0\| + \|\Phi_h^0\|) \quad (5.1)$$

gilt. Ist  $\delta_t$  unabhängig vom Diskretisierungsparameter  $h$ , dann nennen wir das idealisierte Atmosphärenmodell unbedingt stabil, andernfalls bedingt stabil. Als Norm  $\|\cdot\|$  können wir z. B. die Maximumnorm auf  $S_h$  wählen.

Die intuitive Vorstellung von Instabilität einer numerischen Lösung ist die Explosion (durch starkes Anwachsen) der Lösung zu einem Zeitpunkt  $t_E$  durch das Anwachsen von räumlichen Wellen. Die Norm der Lösung wächst dann unbeschränkt, wenn sich das System dem Zeitpunkt  $t_E$  nähert. Damit könnten wir die Ungleichung (5.1) für keine Wahl der Konstanten erfüllen. Die physikalische Aussagekraft der Stabilitätsdefinition hängt wesentlich von den Werten der Konstanten  $\delta_t, c_1 > 0, \lambda \in \mathbb{R}$  ab. Gehen wir von physikalisch kleinen Werten für  $c_1, \lambda$  aus, so bedeutet die Ungleichung (5.1), dass die numerische Lösung durch die Anfangswerte beschränkt wird. Falls  $\delta_t$  mit kleiner werdendem  $h$  gegen Null geht, ist das die bekannte Zeitschrittbegrenzung nach der Courant-Friedrichs-Levi-Bedingung (CLF). Im Übrigen ist die praktische Überprüfung der Stabilität des Modells nicht möglich, da wir nur endlich viele Simulationen mit dem Atmosphärenmodell durchführen können. Wir haben daher die Stabilität nur anhand von einigen Modellsimulationen überprüft.

Betrachten wir das Modell ohne künstliche Diffusion, d. h.  $\nu_1 = \nu_2 = 0$  in Abschnitt 4.1, dann zeigt sich, dass das Modell für eine Simulationszeit von bis zu zwei Tagen für

die analytischen Lösungen aus Abschnitt 3.5 stabile Lösungen berechnet. Für längere Simulationszeiten wachsen dann, ausgehend von Schwingungen mit der Wellenlänge der Gitterauflösung  $h$ , die Maximumnormen von Vorticity, Divergenz und Geopotenzialfeld sehr schnell an. Wir gehen jetzt heuristisch davon aus, dass Stabilitätsaussagen für andere Lagrange-Galerkin-Methoden qualitativ auf die in Kapitel 4 vorgestellte Lagrange-Galerkin-Methode übertragen werden können. In diesem Fall ist das instabile Verhalten der obigen Simulationen überraschend, da die in [MPS88] vorgestellte Lagrange-Galerkin-Methode für die lineare Advektionsgleichung ohne Zeitschrittbeschränkung stabil ist. In [MPS88] wird aber auch gezeigt, dass durch die Verwendung von Quadraturformeln für die Berechnung der Gebietsintegrale in der Finite-Elemente-Methode die Lagrange-Galerkin-Methode instabil wird. Durch die Übertragung dieses Erkenntnis auf das numerische Verfahren in Kapitel 4, können wir die Entstehung von Instabilitäten im Atmosphärenmodell ohne künstliche Diffusion erklären. Zur Stabilisierung der Lagrange-Galerkin-Methode beschreiben [MPS88] und [Pri93] eine Gebietsmittelungsmethode zur exakten Berechnung der fraglichen Gebietsintegrale. Alternativ können [Pir82] und [Sül88] für inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen mit künstlicher Diffusion zeigen, dass deren Lagrange-Galerkin-Methoden stabil sind.

Als Schlussfolgerung aus den Stabilitätsüberlegungen ist die Verwendung von künstlicher Diffusion zur Stabilisierung des Atmosphärenmodells sinnvoll. Für Simulationszeiten von mehr als zwei Tagen betrachten wir daher das Modell mit den Diffusionsparametern

$$\nu_1 := \frac{10^5 \text{ m}^2}{R_0^2 \text{ s}} \approx 2.5 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}, \quad \nu_2 := \frac{4 \cdot 10^5 \text{ m}^2}{R_0^2 \text{ s}} \approx 9.9 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1} \quad (5.2)$$

aus Abschnitt 4.1, wobei  $R_0 > 0$  der Erdradius aus Anhang D ist. Die Diffusionsparameter  $\nu_1$  und  $\nu_2$  für die Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) auf der Einheitssphäre  $S$  entsprechen dabei den physikalisch interpretierbaren Diffusionsparametern  $10^5 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  und  $4 \cdot 10^5 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  für die auf die Sphäre  $S_{R_0}$  transformierten Flachwassergleichungen, siehe Abschnitt 3.3. Mit dieser Wahl für  $\nu_1$  und  $\nu_2$  bleiben sowohl die numerischen Lösungen der analytischen Beispiele aus Abschnitt 3.5 als auch die realitätsnähere numerische Simulation in Abschnitt 5.3 stabil.

## 5.2 Konvergenz des numerischen Verfahrens

Dieser Abschnitt dient neben Abschnitt 5.3 der Validierung des numerischen Verfahrens aus Kapitel 4. Dazu betrachten wir Simulationsergebnisse des idealisierten Atmosphärenmodells für stationäre und instationäre analytische Lösungen der Flachwassergleichungen aus Abschnitt 3.5. Wir können zeigen, dass sich für kleiner werdende Gitterweiten und für kürzer werdende Zeitschritte die numerische Lösung der analytischen Lösung annähert.

Da die analytischen Lösungen in Abschnitt 3.5 für die Flachwassergleichungen ohne Diffusion gelten, betrachten wir zum Nachweis der numerischen Konvergenz das Atmo-

sphärenmodell ohne künstliche Diffusion, siehe Abschnitt 4.1. Nach Abschnitt 5.1.3 ist damit die Simulationszeit des Modells aus Stabilitätsgründen beschränkt. Wir wählen daher als Simulationszeit in diesem Abschnitt  $T = 8\text{h}$  und betrachten das Zeitintervall  $I = (0, T)$ . Es sei

$$(\zeta, \delta, \Phi) \quad (5.3)$$

eine analytische Lösung der Flachwassergleichungen (3.30), (3.31) und wir definieren zu  $(\zeta, \delta, \Phi)$  auf  $S$  die Anfangswerte

$$\zeta_0 := \zeta(\cdot, 0), \quad \delta_0 := \delta(\cdot, 0), \quad \Phi_0 := \Phi(\cdot, 0). \quad (5.4)$$

Damit ist  $(\zeta, \delta, \Phi)$  die kontinuierliche Lösung der Anfangswertaufgabe in der schwachen Formulierung (4.2) zum Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ . Weiter seien  $\Delta t > 0$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $t_m = m\Delta t$  für  $m = 0, \dots, M$  mit  $T = t_M$  vorgegeben. Mit dem Atmosphärenmodell aus Abschnitt 5.1 berechnen wir zum Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  die numerische Lösung

$$(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)_{m=0, \dots, M} \quad (5.5)$$

der Flachwassergleichungen. Für die Simulationszeit von acht Stunden setzen wir im Atmosphärenmodell die Parameter für die künstliche Diffusion aus Abschnitt 4.1 auf Null, d. h.  $\nu_1, \nu_2 = 0$ .

Während für die Anfangswertaufgabe die zeitliche Entwicklung der kontinuierlichen Lösung  $(\zeta, \delta, \Phi)$  durch analytische Gleichungen beschrieben wird, ist die zeitliche Entwicklung der numerischen Lösung  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)_{m=0, \dots, M}$  durch die Ausgabedaten des Atmosphärenmodells definiert. Wir können damit die Qualität von  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)_{m=0, \dots, M}$  durch die Berechnung des numerischen Fehlers aus der Differenz zu  $(\zeta, \delta, \Phi)$  ermitteln.

Nachdem wir in Abschnitt 5.2.1 zur numerischen Lösung in Gleichung (5.5) den numerischen Fehler  $\eta$  definiert haben, zeigen wir in den Abschnitten 5.2.2 und 5.2.3 die numerische Konvergenz des numerischen Verfahrens anhand ausgewählter analytischer Lösungen aus Abschnitt 3.5.

### 5.2.1 Der numerische Fehler

Während der Diskretisierungsfehler des numerischen Verfahrens, siehe Abschnitt 4.3.2, die Differenz von der diskreten Lösung aus Algorithmus 4.3.4 zur kontinuierlichen Lösung aus Abschnitt 4.2.1 quantifiziert, definieren wir für die Abweichung der numerischen Lösung aus Abschnitt 5.1 von der kontinuierlichen Lösung den numerischen Fehler. Genauer definieren wir den numerischen Fehler  $\eta$  als die  $L^2$ -Norm der Differenz von numerischer und kontinuierlicher Lösung.

Stellvertretend für die Funktionen  $\zeta, \delta$  bzw.  $\Phi$  der kontinuierlichen Lösung aus Gleichung (5.3) betrachten wir die Funktion  $g : S \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Analog schreiben wir anstelle der Funktionen  $(\zeta_h^m)_{m=1, \dots, M}$ ,  $(\delta_h^m)_{m=1, \dots, M}$  bzw.  $(\Phi_h^m)_{m=1, \dots, M}$  der numerischen Lösung aus Gleichung (5.5) die Folge  $(g_h^m)_{m=1, \dots, M}$ , mit  $g_h^m : S_{hm} \rightarrow \mathbb{R}$ , als numerische Approximation von  $g$ .  $S_{hm}$  sei dabei das Polyeder im  $m$ -ten Zeitschritt von Algorithmus 4.3.4.

Den numerischen Fehler  $\eta(g_h^m)$  der Funktion  $g_h^m$  definieren wir durch die flächennormierte  $L^2(S)$ -Norm der Differenz von numerischer und kontinuierlicher Lösung, d. h. wir definieren mit der Liftfunktion  $L$  aus Abschnitt 4.2.2 für die Zeitpunkte  $t_m$  mit  $m = 0, \dots, M$

$$\begin{aligned} \eta(g_h^m) &:= \|g(\cdot, t_m) - g_h^m\|_S := \frac{1}{\sqrt{|S|}} \|g(\cdot, t_m) - g_h^m \circ L^{-1}\|_{L^2(S)} \\ &= \left( \frac{1}{|S|} \int_S |g(\cdot, t_m) - g_h^m \circ L^{-1}|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da wir die numerische Integration auf dem Polyeder  $S_{hm}$  durchführen, definieren wir die flächennormierte  $L^2(S_{hm})$ -Norm durch

$$\|g(\cdot, t_m) - g_h^m\|_{S_{hm}} := \frac{1}{\sqrt{|S_{hm}|}} \|g(L(\cdot), t_m) - g_h^m\|_{L^2(S_{hm})}. \quad (5.6)$$

Wegen [Dzi88, Lemma 3] gibt es eine Konstante  $c > 0$ , so dass

$$\left( \frac{c-h}{c} \right)^2 \|g(\cdot, t_m) - g_h^m\|_{S_{hm}} \leq \|g(\cdot, t_m) - g_h^m\|_S \leq \left( \frac{c}{c-h} \right)^2 \|g(\cdot, t_m) - g_h^m\|_{S_{hm}}$$

gilt. Für kleine Diskretisierungsparameter  $h > 0$ , siehe Abschnitt 4.3.1, ist es damit gerechtfertigt,  $\eta(g_h^m)$  durch Gleichung (5.6) zu approximieren, also

$$\eta(g_h^m) \approx \|g(\cdot, t_m) - g_h^m\|_{S_{hm}}.$$

Die Integration in der letzten Gleichung führen wir analog zu Abschnitt 4.2.7 mit Hilfe der Quadraturformel in Abschnitt 4.2.6 durch.

Der gesamte numerische Fehler  $\eta(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)$  der numerischen Lösung  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)$  ergibt sich aus der Summe der einzelnen Komponenten, also

$$\eta(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m) := \left( \eta(\zeta_h^m)^2 + \eta(\delta_h^m)^2 + \eta(\Phi_h^m)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.7)$$

## 5.2.2 Stationäre Lösungen

In diesem Abschnitt zeigen wir die numerische Konvergenz des idealisierten Atmosphärenmodells aus Abschnitt 5.1 mit Hilfe von stationären analytischen Lösungen der Flachwassergleichungen aus Abschnitt 3.5.2.

Wir betrachten die Entwicklung des numerischen Fehlers  $\eta(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)$  in Abhängigkeit von der Simulationszeit, der Zeitschrittweite  $\Delta t$  und der Gitterweite  $h$ . Dazu betrachten wir Simulationen des Atmosphärenmodells aus Abschnitt 5.1 auf einem zeitlich nicht veränderlichen Polyeder  $S_h$ , siehe Abschnitt 4.3.1. Die Simulationen werden wir zum einen mit einem uniformen Polyeder  $S_h$  und zum anderen mit einem räumlich adaptierten Polyeder  $S_h$  durchführen. Die Dreiecke der Triangulierung dieses Polyeders haben sehr verschiedene Größen.

### Festkörperrotation

Als erste analytische Lösung betrachten wir das Beispiel 3.5.2 der Festkörperrotation. Für die Maximalgeschwindigkeit  $u_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  der Strömung definieren wir die Konstante  $c_0 = \frac{u_0}{R_0}$ , siehe Abschnitt 3.3. Wir definieren mit den Funktionen Vorticity  $\zeta$ , Divergenz  $\delta$  und Geopotenzialfeld  $\Phi$  aus Beispiel 3.5.2 mit der Gleichung (5.4) den Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ . Wegen Beispiel 3.5.2 ist  $(\zeta, \delta, \Phi)$  die kontinuierliche Lösung der Flachwassergleichungen zum Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ .  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)_{m=0, \dots, M}$  aus der Gleichung (5.5) sei die numerische Lösung zum Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  für ein uniform aufgelöstes Polyeder  $S_h$ , siehe Abbildung 5.1(a).

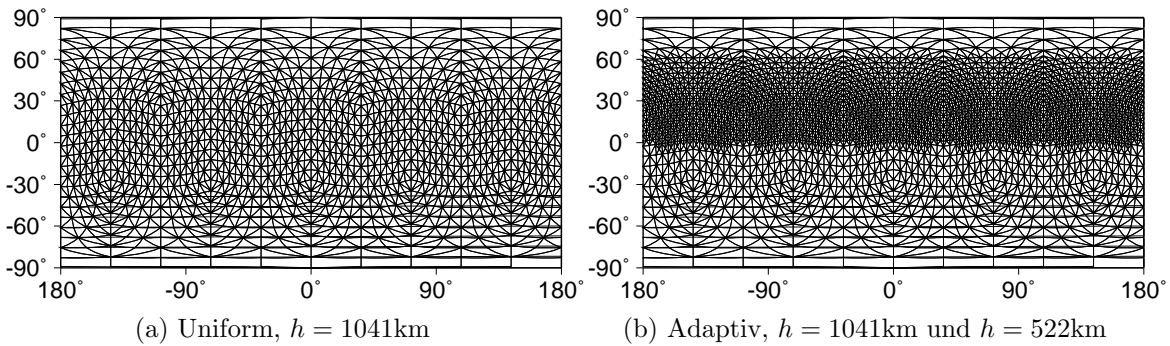


Abbildung 5.1: Polyeder  $S_h$ , Achsen: geografische Länge und Breite

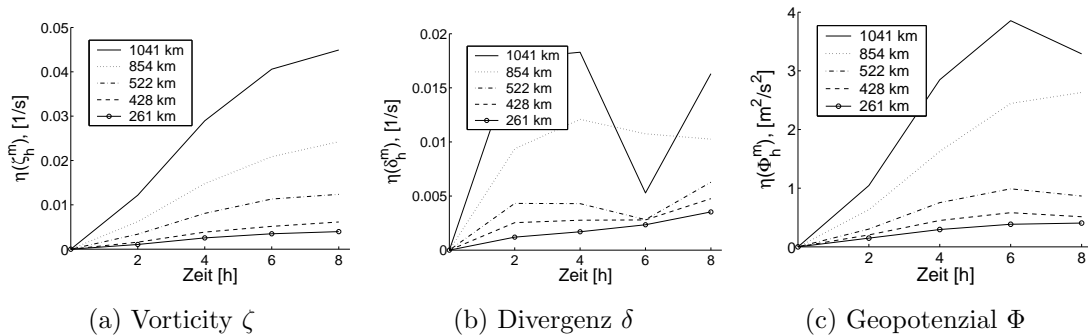


Abbildung 5.2: Festkörperrotation, zeitliche Entwicklung von  $\eta$ , Zeitschritt  $\Delta t = 7.5 \text{min}$

In Abbildung 5.2 ist die zeitliche Entwicklung des numerischen Fehlers für den Zeitschritt  $\Delta t = 7.5 \text{min}$  getrennt für  $\zeta$ ,  $\delta$  und  $\Phi$  dargestellt. Wir erkennen, dass der numerische Fehler mit fortschreitender Simulationszeit anwächst und mit feiner werdendem Gitter abnimmt.

In Abbildung 5.3 ist der numerische Fehler zum Zeitpunkt  $T = 8 \text{h}$  für verschiedene Gitterauflösungen  $h$  und Zeitschrittweiten  $\Delta t$  dargestellt. Der numerische Fehler für  $\zeta$  und  $\Phi$  in den Abbildungen 5.3(a) und 5.3(c) nimmt mit feiner werdendem Gitter und kürzer werdendem Zeitschritt ab. Der numerische Fehler für  $\delta$  in Abbildung

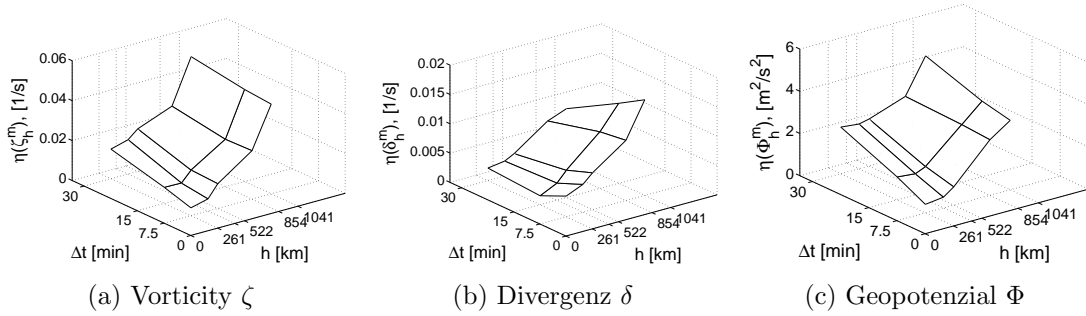


Abbildung 5.3: Festkörperrotation,  $\eta$  in Abhängigkeit von Gitterweite  $h$  und Zeitschritt  $\Delta t$ , Simulationszeit  $T = 8h$

5.3(b) wird für feiner werdendes Gitter zwar kleiner, stagniert aber für kürzer werdende Zeitschritte.

In allen drei Fehlerdarstellungen ist die Abhängigkeit von der Gitterweite bedeutender als von der Zeitschrittweite. Dies erklären wir damit, dass für die stationäre Lösung die Trajekorienberechnung in der Semi-Lagrange-Methode unabhängig von der Zeitschrittweite eine gute Approximation der stromaufwärts liegenden Punkte liefert.

### Isolierter zonaler Strahlstrom

Wir betrachten das Beispiel 3.5.5 des isolierten zonalen Strahlstroms. Für die Maximalgeschwindigkeit  $u_0 = 30 \frac{m}{s}$  der Strömung definieren wir die Konstante  $c_0 = \frac{u_0}{R_0}$ , siehe Abschnitt 3.3, und fixieren die Parameter  $\gamma = \frac{\pi}{18}$  und  $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ . Dann definieren wir mit den Funktionen Vorticity  $\zeta$ , Divergenz  $\delta$  und Geopotenzialfeld  $\Phi$  aus Beispiel 3.5.5 mit der Gleichung (5.4) den Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ . Wegen Beispiel 3.5.5 ist  $(\zeta, \delta, \Phi)$  die kontinuierliche Lösung der Flachwassergleichungen zum Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ .  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)_{m=0, \dots, M}$  aus der Gleichung (5.5) sei die numerische Lösung zum Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ . Zunächst betrachten wir Simulationen des Atmosphärenmodells für ein uniform aufgelöstes Polyeder  $S_h$ .

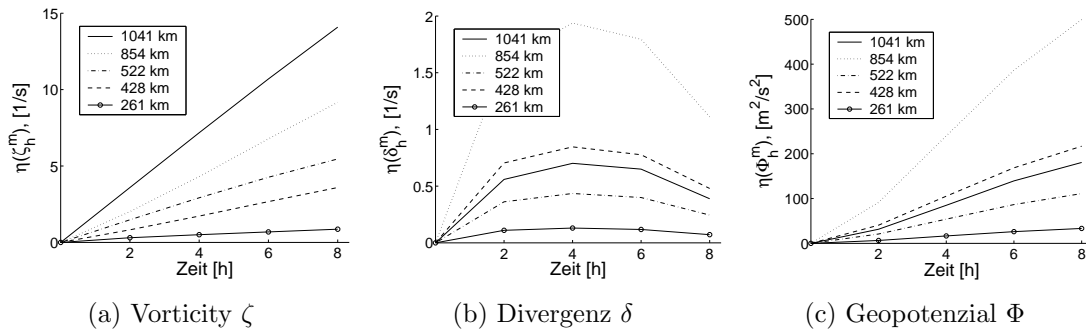


Abbildung 5.4: Isolierter zonaler Strahlstrom, zeitliche Entwicklung von  $\eta$ , uniformes Polyeder, Zeitschritt  $\Delta t = 7.5min$

In den Abbildungen 5.4 bzw. 5.5 ist die zeitliche Entwicklung des numerischen Fehlers für den Zeitschritt  $\Delta t = 7.5\text{min}$  bzw. ist der numerische Fehler zum Zeitpunkt  $T = 8\text{h}$  für verschiedene Gitterauflösungen  $h$  und Zeitschrittweiten  $\Delta t$  dargestellt.

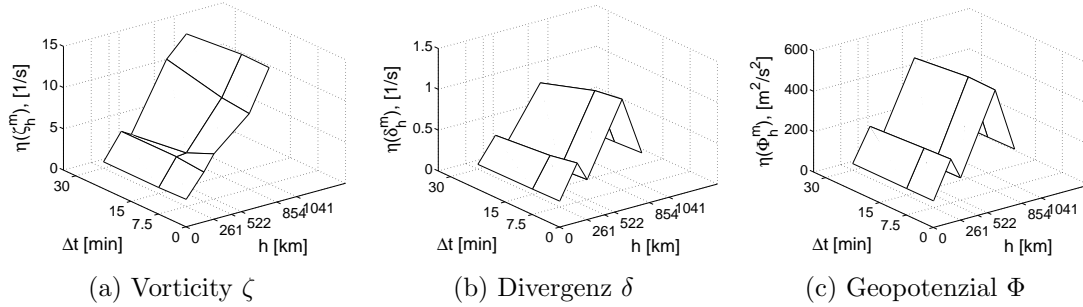


Abbildung 5.5: Isolierter zonaler Strahlstrom,  $\eta$  in Abhängigkeit von Gitterweite  $h$  und Zeitschritt  $\Delta t$ , uniformes Polyeder, Simulationszeit  $T = 8\text{h}$

Die numerischen Fehler für  $\zeta$  und  $\Phi$  in den Abbildungen 5.4(a) und 5.4(c), wachsen mit fortschreitender Simulationszeit an. Im Gegensatz dazu stagniert der Fehler von  $\delta$  in Abbildung 5.4(b).

In den Abbildungen 5.4 und 5.5 erkennen wir, dass mit feiner werdendem Gitter der Fehler von  $\zeta$  kleiner wird. Für  $\delta$  und  $\Phi$  gilt dies nur für jede zweite Gitterauflösung. Das nicht monotone Fallen der Fehler von  $\delta$  und  $\Phi$  in Abhängigkeit von der Gitterweite in den Abbildungen 5.5(b) und 5.5(c) führen wir auf die Ausrichtung der Dreieckskanten in der laminaren Strömung zurück. Währenddessen für die Gitterweiten  $h = 854\text{km}$  und  $h = 428\text{km}$  viele Kanten quer zur Strömung liegen, sind die meisten Kanten für  $h = 1041\text{km}$ ,  $522\text{km}$ ,  $262\text{km}$  parallel zur Strömung ausgerichtet. Diese verschiedenen geometrischen Orientierungen der Dreieckskanten scheinen sich insbesondere auf die Fehler von  $\delta$  und  $\Phi$  auszuwirken.

Wie bei der Festkörperrotation ist die Abhängigkeit des Fehlers von der Zeitschrittweite gegenüber der Abhängigkeit von der Gitterweite klein.

Die gleichen Simulationen mit dem Atmosphärenmodell haben wir mit einem räumlich adaptiven Polyeder  $S_h$  durchgeführt. Die Dreiecke von  $S_h$  haben im Bereich der geografischen Breite  $\phi \in (0^\circ, 60^\circ)$  eine variable Auflösung, die durch den Diskretisierungsparameter  $h$  angegeben wird, und für  $\phi \in (-90^\circ, 0^\circ) \cup (60^\circ, 90^\circ)$  die fixierte Auflösung von  $h = 1041\text{km}$ . Das Polyeder ist also zeitlich konstant und räumlich adaptiv, siehe Abbildung 5.1(b).

Analog zum uniformen Polyeder weiter oben ist in den Abbildungen 5.6 bzw. 5.7 die zeitliche Entwicklung des numerischen Fehlers für den Zeitschritt  $\Delta t = 7.5\text{min}$  bzw. der numerischen Fehler zum Zeitpunkt  $T = 8\text{h}$  für verschiedene Gitterauflösungen  $h$  und Zeitschrittweiten  $\Delta t$  dargestellt.

Alle numerischen Fehler sind so nahe an den Fehlern des uniformen Falls, dass kaum Unterschiede zu den Abbildungen 5.4 und 5.5 zu erkennen sind. Durch die Rechenzeiterparnis konnten wir allerdings lokal eine noch höhere räumliche Auflösung



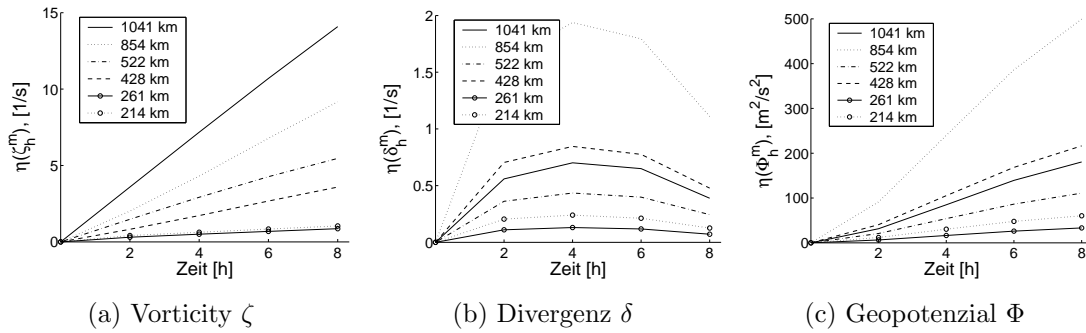


Abbildung 5.6: Isolierter zonaler Strahlstrom, zeitliche Entwicklung von  $\eta$ , räumlich adaptives Polyeder, Zeitschritt  $\Delta t = 7.5min$

von  $h = 214km$  für das Polyeder wählen. Die nicht monotone Abhängigkeit des Fehler von der Gitterweite auch für diese Auflösung kann wie oben für das uniforme Polyeder erklärt werden.

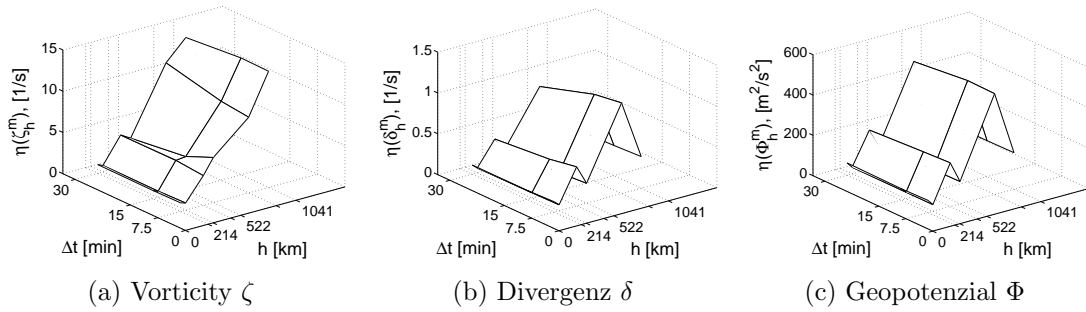


Abbildung 5.7: Isolierter zonaler Strahlstrom,  $\eta$  in Abhängigkeit von Gitterweite  $h$  und Zeitschritt  $\Delta t$ , räumlich adaptives Polyeder, Simulationszeit  $T = 8h$

Wir erkennen, dass die Simulationen für das uniforme Polyeder und das räumlich adaptive Polyeder sehr ähnliche Ergebnisse für den numerischen Fehler erbringen. Dies können wir damit erklären, dass die dynamischen Prozesse in diesem analytischen Beispiel gerade regional in den Breiten  $\phi \in (0^\circ, 60^\circ)$  von Bedeutung sind. Damit ist der numerische Fehler vor allem von der lokalen räumlichen Auflösung des Polyeders in diesen Breiten abhängig. Durch die Anwendung des Atmosphärenmodells mit einem räumlich adaptiven Polyeder kann bei gleicher Qualität der numerischen Ergebnisse Rechenzeit gegenüber Simulationen mit einem uniformen Polyeder eingespart werden.

### 5.2.3 Instationäre Lösungen

In diesem Abschnitt zeigen wir die numerische Konvergenz des idealisierten Atmosphärenmodells aus Abschnitt 5.1 mit Hilfe einer instationären analytischen Lösung der Flachwassergleichungen aus Abschnitt 3.5.2.

Wir betrachten die Entwicklung des numerischen Fehlers  $\eta(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)$  in Abhängigkeit von der Simulationszeit, der Zeitschrittweite  $\Delta t$  und der Gitterweite  $h$ . Die Simulationen des Atmosphärenmodells aus Abschnitt 5.1 wurden mit einem räumlich uniform aufgelösten und zeitlich nicht veränderlichen Polyeder  $S_h$  durchgeführt, siehe Abschnitt 4.3.1.

Als analytische Lösung betrachten wir das Beispiel 3.5.9 der instationären Festkörperrotation. Für die Maximalgeschwindigkeit  $u_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  der Strömung definieren wir die Konstante  $d_0 = \frac{u_0}{R_0}$ , siehe Abschnitt 3.3. Wir definieren mit den Funktionen Vorticity  $\zeta$ , Divergenz  $\delta$  und Geopotenzialfeld  $\Phi$  aus Beispiel 3.5.9 mit der Gleichung (5.4) den Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ . Wegen Beispiel 3.5.9 ist  $(\zeta, \delta, \Phi)$  die kontinuierliche Lösung der Flachwassergleichungen zum Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ .  $(\zeta_h^m, \delta_h^m, \Phi_h^m)_{m=0, \dots, M}$  aus der Gleichung (5.5) sei die numerische Lösung zum Anfangswert  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ .

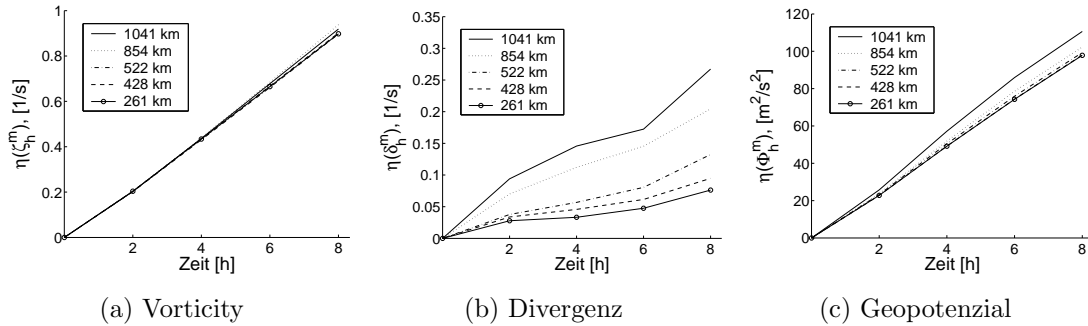


Abbildung 5.8: Instationäre Festkörperrotation, zeitliche Entwicklung von  $\eta$ , Zeitschritt  $\Delta t = 7.5$  min

In Abbildung 5.8 ist die zeitliche Entwicklung des numerischen Fehlers für den Zeitschritt  $\Delta t = 7.5$  min getrennt für  $\zeta$ ,  $\delta$  und  $\Phi$  dargestellt. Wir erkennen, dass der numerische Fehler mit fortschreitender Simulationszeit anwächst. Mit feiner werdendem Gitter nimmt der Fehler von  $\delta$  ab. Für  $\zeta$  und  $\Phi$  stagniert diese Entwicklung allerdings für die feineren Gitterweiten.

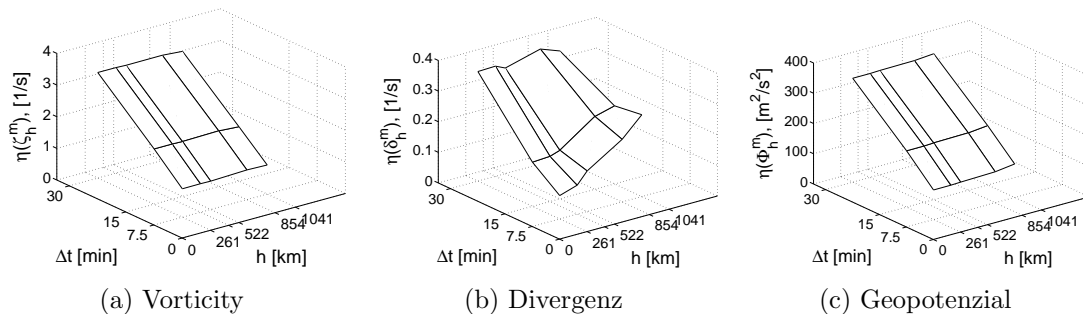


Abbildung 5.9: Instationäre Festkörperrotation,  $\eta$  in Abhängigkeit von Gitterweite  $h$  und Zeitschritt  $\Delta t$ , Simulationszeit  $T = 8$  h

In Abbildung 5.9 ist der numerische Fehler zum Zeitpunkt  $T = 8h$  für verschiedene Gitterauflösungen  $h$  und Zeitschrittweiten  $\Delta t$  dargestellt. Im Gegensatz zu den stationären Beispielen in Abschnitt 5.2.2 ist in allen drei Fehlerdarstellungen die Abhängigkeit von der Zeitschrittweite bedeutender als von der Gitterweite. Dies erklären wir damit, dass für die instationäre Lösung die Trajektorienberechnung in der Semi-Lagrange-Methode stark von der Zeitschrittweite abhängt und damit für einen längeren Zeitschritt eine schlechtere Approximation der stromaufwärts liegenden Punkte liefert.

### 5.2.4 Zusammenfassung der Konvergenzuntersuchungen

In den Abschnitten 5.2.2 und 5.2.3 haben wir die numerische Konvergenz von numerischen Lösungen des idealisierten Atmosphärenmodells gegen analytische Lösungen für die drei folgenden Beispiele analytischer Lösungen untersucht:

- Stationäre Festkörperrotation
- Isolierter zonaler Strahlstrom
- Instationäre Festkörperrotation

Wir haben für diese Beispiele gezeigt, dass der numerische Fehler für kleiner werdende Gitterweiten und kürzer werdende Zeitschritte abnimmt.

Im Fall der stationären Lösungen ist der numerische Fehler vor allem von der Gitterweite abhängig. Dies erklären wir damit, dass die Trajektorienberechnung in der Semi-Lagrange-Methode für ein stationäres Strömungsfeld nur wenig von der Zeitschrittweite abhängt. Die gleiche Erklärung begründet auch im Fall der instationären Lösung die stärkere Abhängigkeit des numerischen Fehlers von der Zeitschrittweite.

Wir konnten schließlich im Fall des isolierten zonalen Strahlstromes zeigen, dass ein nur in den Breiten des Strahlstromes hoch aufgelöstes Polyeder die gleichen Ergebnisse erbringt wie ein uniform hoch aufgelöstes Polyeder.

## 5.3 Rossbywellen im globalen Modell

Neben Abschnitt 5.2 dient dieser Abschnitt der Validierung des numerischen Verfahrens aus Kapitel 4. Wir betrachten dazu Modellergebnisse des Atmosphärenmodells aus Abschnitt 5.1 für eine Simulationszeit von 20 Tagen, mit denen atmosphärische Multiskalenprozesse aus Abschnitt 2.3 modelliert werden. Zum einen werden wir die Anregung von planetaren Wellen durch orografische Störungen und damit zusammenhängende regionale Strömungsmuster (Antizyklonen und Zyklonen) modellieren. Zum anderen werden wir globale Auswirkungen bis auf die Südhalbkugel im Modell der Flachwasseratmosphäre beobachten können.

In Abschnitt 5.2 haben wir das Atmosphärenmodell für die Simulationszeit von acht Stunden ohne künstliche Diffusion betrieben. Um auch stabile Lösungen für die

Simulationszeit von 20 Tagen zu erhalten, führen wir eine künstliche Diffusion mit den Diffusionsparametern in Gleichung (5.2) ein, siehe die Abschnitte 5.1.3 und 4.1.

Wir betrachten für die Flachwassergleichungen die Anfangswertaufgabe (4.2) mit der Anfangsbedingung  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  und den durch die Daten der Bodenorografie  $\Phi_B$  gegebenen Randbedingungen. Als Startzustand wählen wir  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  so, dass das Strömungsfeld für das Orografiefeld  $\Phi_B = 0$  stationär wäre. Als wirkliches Orografiefeld  $\Phi_B$  für die numerische Simulation nutzen wir aber nicht  $\Phi_B = 0$ , sondern eine kleinräumige Abweichung davon.

### 5.3.1 Die Randbedingungen

Um komplexe dynamische Phänomene im vorliegenden Atmosphärenmodell modellieren zu können, betrachten wir für die Anfangsbedingung  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  und die Bodenorografie  $\Phi_B$  idealisierte Strömungszustände der realen Atmosphäre.

Dazu wählen wir für  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  die Werte aus dem Beispiel 3.5.5 für einen isolierten zonalen Strahlstrom. Sowohl die geografische Breite bei  $30^\circ$  als auch das Maximum der Windgeschwindigkeit  $u_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  der Anfangsströmung entsprechen den Werten im troposphärischen Strahlstrom, siehe Abschnitt 2.1.2. Würden wir als Orografiefeld  $\Phi_B = \text{konst.}$  wählen, wäre der Strömungszustand nach Beispiel 3.5.5 stationär.

Als Störung dieses Gleichgewichtszustandes betrachten wir für das Orografiefeld  $\Phi_B$  einen einzeln stehenden Berg mit einer Höhe von 2000m. Wir definieren dazu das Maximum des Geopotenzials  $\Phi_{max} > 0$ , die geografische Länge  $-180^\circ < \lambda_0 \leq 180^\circ$ , die geografische Breite  $-90^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$  des Berggipfels und die Streckungsfaktoren  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  durch

$$\Phi_{max} := 2000\text{m} \frac{g}{R_0^2}, \quad \lambda_0 := 0^\circ, \quad \varphi_0 := 30^\circ, \quad \gamma_1 = \frac{3\pi}{180^\circ}, \quad \gamma_2 = \frac{6\pi}{180^\circ}.$$

Bestimmen wir für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in S$  die geografische Länge und Breite durch

$$\lambda(\mathbf{x}) = \arcsin\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right), \quad \varphi(\mathbf{x}) = \arcsin x_3,$$

dann definieren wir das Bodenorografiefeld für alle  $\mathbf{x} \in S$  durch

$$\Phi_B(\mathbf{x}) := \Phi_{max} \frac{1}{\cosh^2(\gamma_1(\lambda(\mathbf{x}) - \lambda_0))} \frac{1}{\cosh^2(\gamma_2(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_0))}.$$

In einer Entfernung von  $\approx 34.7^\circ$  Länge bzw. von  $\approx 17.4^\circ$  Breite vom Berggipfel hat der Berg damit noch die Höhe  $\frac{1}{10} \Phi_{max}$ . Dies entspricht einer horizontalen Ausdehnung des Berges von  $\approx 6700\text{km}$  in zentraler und von  $\approx 3900\text{km}$  in meridionaler Richtung.

### 5.3.2 20-Tage-Simulation, statisch

Wir betrachten die Simulation mit dem Atmosphärenmodell für die Anfangswerte  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$  und die Bodenorografie  $\Phi_B$  aus Abschnitt 5.3.1 mit der Simulationszeit

$T = 20$ d. Dabei nutzen wir das Atmosphärenmodell statisch, d. h. nach Abschnitt 5.1.1, dass das uniforme Polyeder  $S_h$  mit der Gitterweite  $h = 522$ km in Abbildung 5.10(a) zeitlich nicht verändert wird.

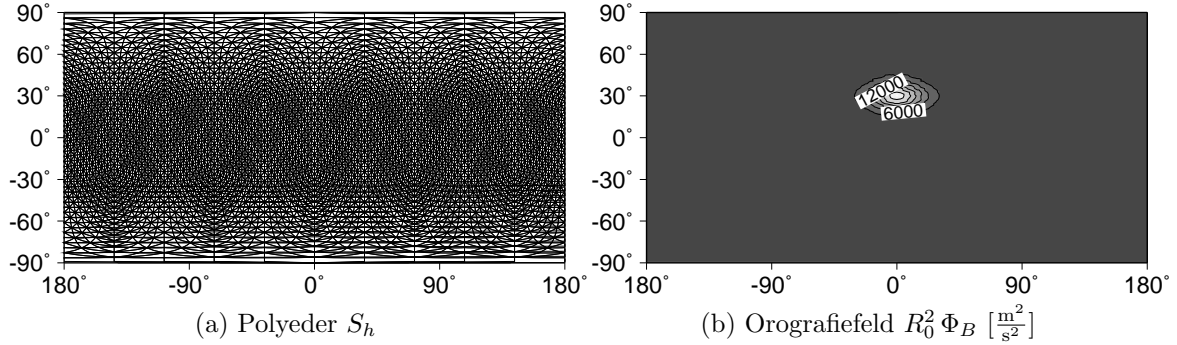


Abbildung 5.10: 20-Tage-Simulation, uniform, Achsen: geografische Länge und Breite

Der Anfangszustand des Modells ist in Abschnitt 3.5.2 in Abbildung 3.6(b) und das Orografiefeld  $\Phi_B$  in Abbildung 5.10(b) dargestellt. Der Zustand des Modells nach fünf, zehn, 15 und 20 Tagen ist in Abbildung 5.11 zu erkennen. Analog zum Orografiefeld  $\Phi_B$  stellen wir die auf  $S_{R_0}$  transformierten Werte  $R_0^2 \Phi$  des Geopotenzialfeldes  $\Phi$  dar. Die großräumige Struktur des Strömungsfeldes bleibt für diese Zeiten erhalten. Der Strahlstrom befindet sich bei  $30^\circ$  und das Geopotenzial  $\Phi$  hat dort die größten Gradienten.

In der Abbildung 5.12, die die gleichen Daten wie Abbildung 5.11 für den Ausschnitt  $(\lambda, \varphi) \in (-180^\circ, 180^\circ) \times (0^\circ, 60^\circ)$  darstellt, erkennen wir, dass sich die meridionale Störung des Strahlstroms, ausgehend vom orografischen Hindernis bei  $(\lambda, \varphi) = (0^\circ, 30^\circ)$ , zonal in Ostrichtung ausbreitet. Nach fünf bzw. zehn Tagen sind in den Abbildungen 5.12(a) bzw. 5.12(b) meridionale Strömungsanteile bereits bei  $\lambda = 120^\circ$  östlicher Länge bzw. bei  $\lambda = -150^\circ$  westlicher Länge zu erkennen. Nach 15 Tagen ist die meridionale Störung wieder bei  $\lambda = 0^\circ$  angekommen, siehe Abbildung 5.12(c). Durch das orografische Hindernis entsteht eine planetare Rossbywelle. Diese Entwicklung können wir mit der Störung des zonalen Grundstromes und dem  $\beta$ -Effekt wie in Abschnitt 2.2.2 erklären. Die Wellenlänge beträgt rund  $\approx 5000$ km. Damit stimmt dieser Wert mit dem theoretischen Wert der Wellenlänge einer stationären Rossbywelle von  $\approx 6300$ km für eine Grundströmung mit der Zonalgeschwindigkeit von  $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  qualitativ überein, siehe Abschnitt 2.2.2.

Abbildung 5.13 ist der Ausschnitt für  $(\lambda, \varphi) \in (0^\circ, 120^\circ) \times (0^\circ, 60^\circ)$  von Abbildung 5.11(d). Wir erkennen vergrößert den Strahlstrom und bei  $(\lambda, \varphi) = (45^\circ, 15^\circ)$  ein lokales Maximum im Geopotenzialfeld  $\Phi$  mit dem Wert von ca.  $75000 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} R_0^{-2}$ . Gleichzeitig ist dies eine schwach ausgeprägte Antizyklone im Windfeld  $\mathbf{u}$ , so dass  $\mathbf{u}$  annähernd in Richtung des geostrophischen Windes strömt. Bei  $(\lambda, \varphi) = (100^\circ, 15^\circ)$  erkennen wir eine weitere Antizyklone und bei  $(\lambda, \varphi) = (30^\circ, 60^\circ) \times \{45^\circ\}$  nördlich des Strahlstromes eine Zyklone. Die räumliche Verteilung dieser Wirbelstrukturen orientiert sich deutlich an

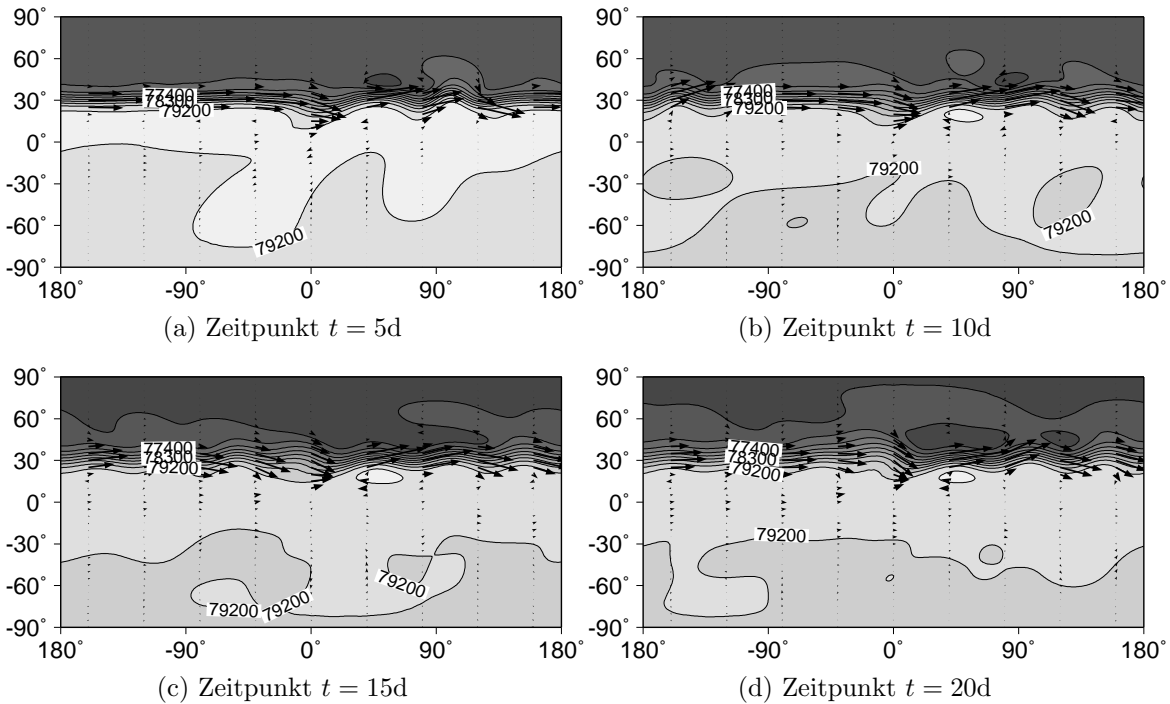


Abbildung 5.11: 20-Tage-Simulation, uniform, Windfeld  $\mathbf{u}$ , Geopotenzialfeld  $R_0^2 \Phi$  [ $\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ ], globale zeitliche Entwicklung, Achsen: geografische Länge und Breite

der räumlichen Struktur der Rossbywelle. In diesem Sinne können wir die Entstehung der Zyklonen und Antizyklonen auf die planetare Rossbywelle zurückführen.

Die Auswirkung der orografischen Störung beschränkt sich nicht auf den meridional begrenzten Strahlstrom, siehe Abbildung 5.11. Der Maximalwert von  $\Phi$  im Anfangszustand von  $\max_{\mathbf{x} \in S} \Phi(\mathbf{x}, 0) \approx 79100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} R_0^{-2}$  wird für jeden Zwischenzustand in den niederen Breiten  $\varphi \in (-30^\circ, 20^\circ)$  großräumig überschritten. Diese Störung im Geopotenzialfeld  $\Phi$  ist meridional abhängig. Insbesondere erkennen wir in Abbildung 5.11(a) nach fünf Tagen auf der Südhalbkugel bei  $\lambda = -45^\circ$  bzw.  $\lambda = 90^\circ$  Störungen in  $\Phi$ , die mit den meridionalen Störungen des Strahlstromes bei  $\lambda = 0^\circ$  bzw.  $\lambda = 90^\circ$  zusammenhängen könnten.

Die 20-Tage-Simulation mit einem isolierten Strahlstrom bei  $30^\circ$  und einem orografischen Hindernis zeigt neben der Entstehung von planetaren Rossbywellen die Entstehung von Zyklonen und Antizyklonen in räumlicher Nähe zum Strahlstrom. Meridional abhängige Störungen des Geopotenzialfeldes können wir global, auch auf der Südhalbkugel in großer Entfernung zum Strahlstrom, beobachten.

### 5.3.3 20-Tage-Simulation, adaptiv

In diesem Abschnitt betrachten wir die Simulation aus Abschnitt 5.3.2 mit den gleichen Anfangswerten  $(\zeta_0, \delta_0, \Phi_0)$ , dargestellt in Abbildung 3.6(b), und der gleichen Bodeno-

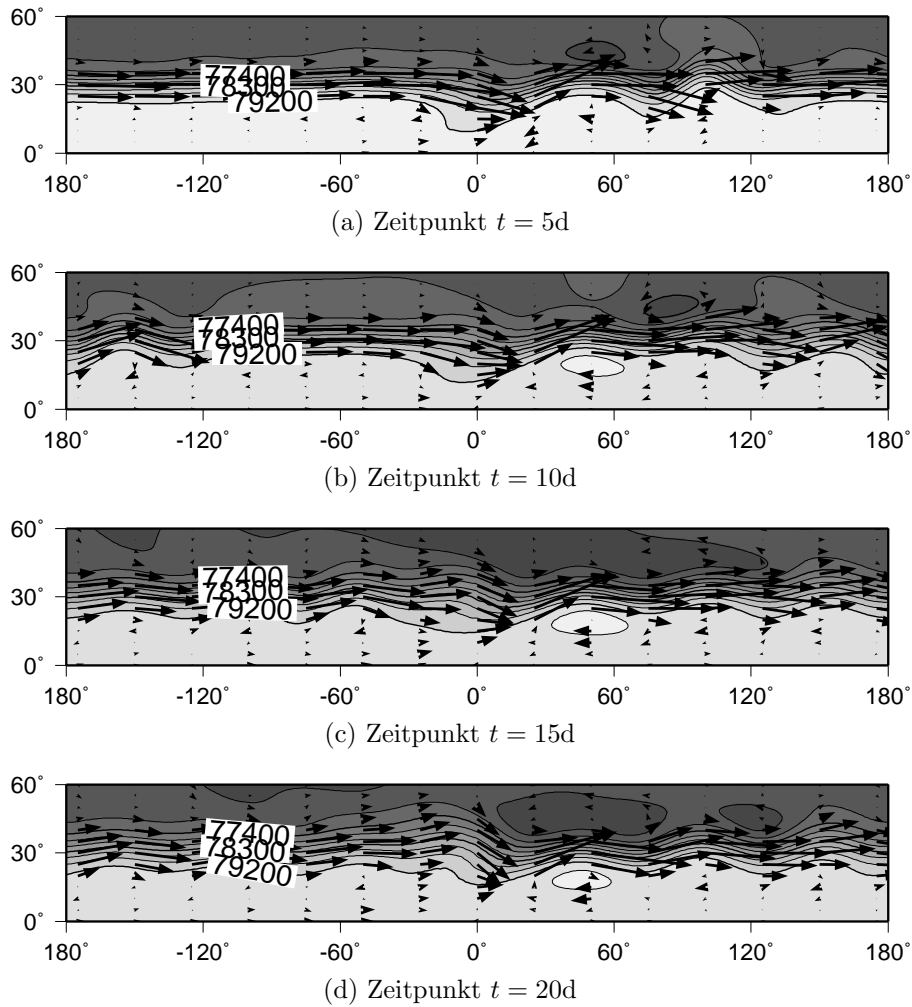


Abbildung 5.12: 20-Tage-Simulation, uniform, Windfeld  $\mathbf{u}$ , Geopotentialfeld  $R_0^2 \Phi [\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}]$ , zeitliche Entwicklung, Ausschnitt  $(\lambda, \varphi) \in (-180^\circ, 180^\circ) \times (0^\circ, 60^\circ)$ , Achsen: geografische Länge und Breite

rografie  $\Phi_B$ , dargestellt in Abbildung 5.10(b), für die Simulationszeit  $T = 20\text{d}$ . Abweichend von Abschnitt 5.3.2 nutzen wir aber das Atmosphärenmodell adaptiv, d. h. nach Abschnitt 5.1.1, dass das Polyeder in jedem Zeitschritt mit dem Algorithmus 4.3.3 aufgrund des physikalischen Fehlerschätzers in Abschnitt 4.3.2 adaptiert wird. Das Polyeder für den Anfangszustand hat eine räumlich uniforme Auflösung von  $h = 428\text{km}$ , siehe Abbildung 5.14(a). Für die gesamte Simulationszeit ist  $h = 428\text{km}$  gleichzeitig auch die feinste räumliche Auflösung für die zeitlich veränderlichen Polyeder. Das Polyeder am Ende der Simulation nach 20 Tagen ist in Abbildung 5.14(b) dargestellt. Wir erkennen, dass die Auflösung entlang des Strahlstromes besonders hoch ist. Dies ist nachvollziehbar, da hier auch die lokalen Maxima der dynamischen Größen Vorticity und Divergenz zu finden sind.

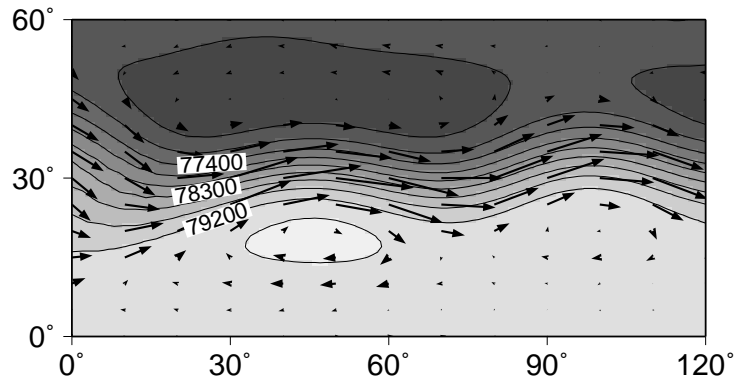


Abbildung 5.13: 20-Tage-Simulation, uniform, Windfeld  $\mathbf{u}(\cdot, 20d)$ , Geopotenzialfeld  $R_0^2 \Phi(\cdot, 20d)$  [ $\frac{m^2}{s^2}$ ], Ausschnitt  $(\lambda, \varphi) \in (0^\circ, 120^\circ) \times (0^\circ, 60^\circ)$ , Achsen: geografische Länge und Breite

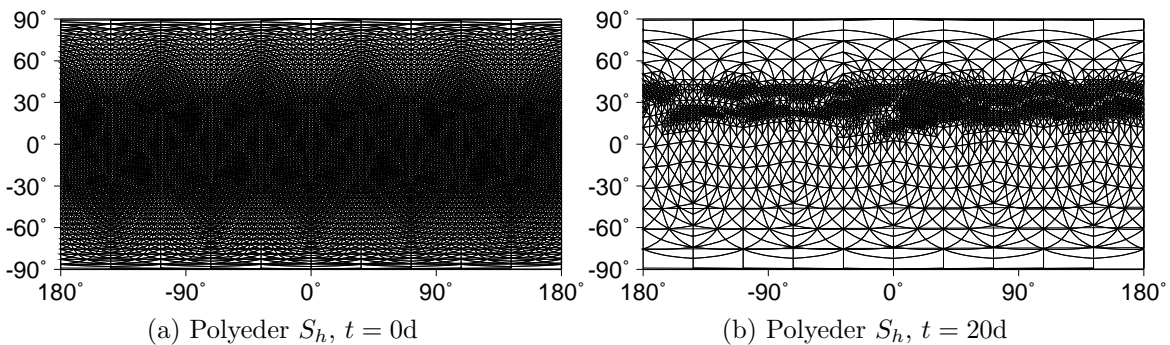


Abbildung 5.14: 20-Tage-Simulation, adaptiv, Achsen: geografische Länge und Breite

Der Zustand des Modells nach fünf, zehn, 15 und 20 Tagen ist in Abbildung 5.15 zu erkennen.

Das adaptive Modell zeigt die gleichen qualitativen Ergebnisse, wie das statische Modell. In den Abbildungen 5.11 und 5.15 erkennen wir die gleiche großräumige Struktur des Strömungsfeldes, die durch den Strahlstrom bei  $30^\circ$  nördlicher Breite geprägt ist. Durch das orografische Hindernis bei  $(\lambda, \varphi) = (0^\circ, 30^\circ)$  entwickelt sich in beiden Modellvarianten im Bereich des Strahlstromes eine planetare Rossbywelle mit einer Wellenlänge von  $\approx 5000\text{km}$ . In räumlicher Nähe zum Strahlstrom beobachten wir Zyklogen und Antizyklogen, und die Auswirkungen der orografischen Störung können wir im Geopotenzialfeld global, auch auf der Südhalbkugel in großer Entfernung vom Strahlstrom, beobachten.

Wir beobachten quantitative Unterschiede zwischen dem statischen und dem adaptiven Modell. Betrachten wir zunächst den Strahlstrom. In den Abbildungen 5.11 und 5.15 erkennen wir, dass die Gradienten des Geopotenzialfeldes im adaptiven Modell steiler sind als im statischen Modell. Weiterhin sind auch die meridionalen Auslenkungen des Strahlstromes im adaptiven Fall besser aufgelöst zu erkennen, als im statischen



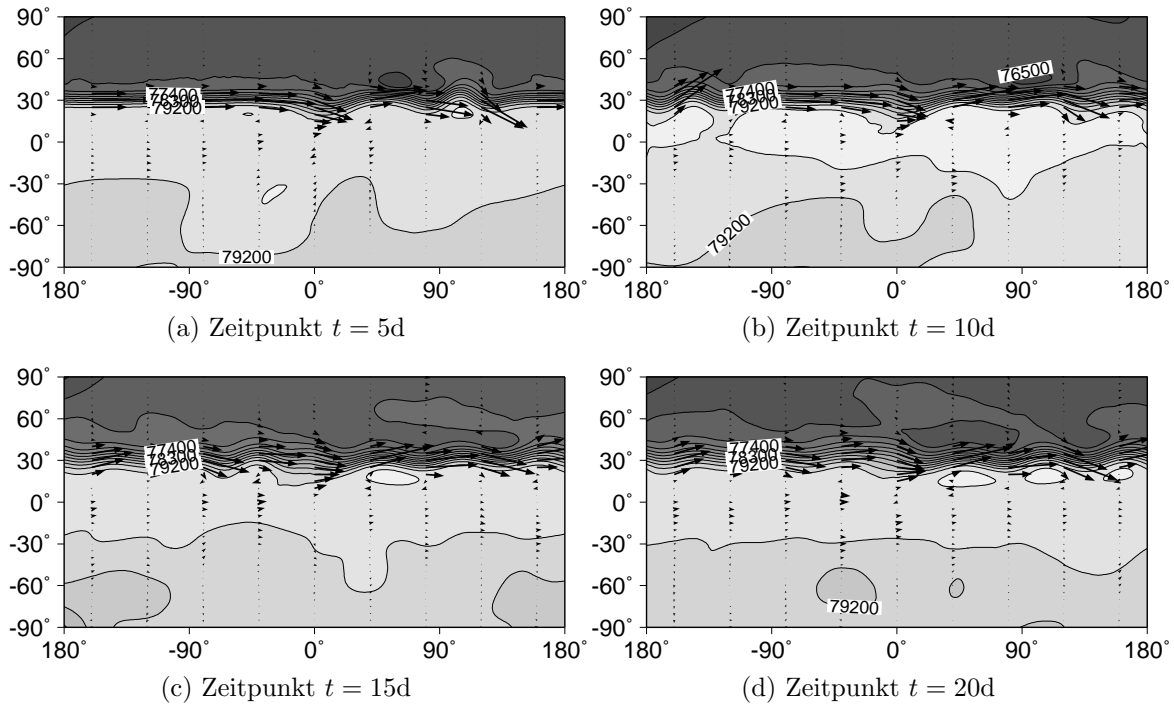


Abbildung 5.15: 20-Tage-Simulation, adaptiv, Windfeld  $\mathbf{u}$ , Geopotenzialfeld  $R_0^2 \Phi \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$ , globale zeitliche Entwicklung, Achsen: geografische Länge und Breite

Fall. Hier scheint durch die höhere räumliche Auflösung des adaptiven Modells, die gitterbedingte numerische Diffusion kleiner zu sein. Außerhalb des Strahlstromes, wo das adaptive Gitter nur sehr grob aufgelöst ist, erkennen wir sowohl Unterschiede der Modellvarianten in der Form der geopotenziellen Höhenlinien als auch vom Betrage her. Der mittlere Wert von  $\Phi$  im Bereich der Breiten von  $\varphi \in (-90^\circ, 20^\circ)$  liegt in Abbildung 5.15(d) für das adaptive Modell um rund  $300 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$  höher als in Abbildung 5.11(d).

Zusammenfassend stellen wir fest, dass das adaptive Atmosphärenmodell im Fall des isolierten Strahlstromes mit orografischer Anregung qualitativ die gleichen Ergebnisse liefert wie das statische Atmosphärenmodell in Abschnitt 5.3.2. Offensichtliche Unterschiede treten in den Werten des Geopotenzialfeldes auf. Beide Modellvarianten können die Entstehung von planetaren Rossbywellen, die Bildung von Zyklonen und Antizyklonen als Folge der planetaren Welle und globale Auswirkungen der orografischen Störung modellieren.

# Kapitel 6

## Ausblick

Das in dieser Arbeit vorgestellte idealisierte Atmosphärenmodell stellt die Realisierung eines globalen Atmosphärenmodells dar, mit dem man in der Lage ist, barotrope atmosphärische Multiskalenwechselwirkungen zu modellieren. Das Modell verfügt über ein zeitlich veränderliches und räumlich adaptives Gitter und kann sowohl analytische Lösungen der Flachwassergleichungen approximieren als auch die orografische Anregung von planetaren Rossbywellen modellieren.

Das nächste Ziel besteht in der Fortsetzung des Validierungsprozesses für das Atmosphärenmodell aus Kapitel 5. Dieser Prozess umfasst zum einen physikalisch motivierte Simulationen über längere Klimazeiträume von Monaten bis zu Jahrzehnten. Zum anderen gehört dazu die vollständige Durchführung der Testfälle in [WDH<sup>+</sup>92], die in der Vergangenheit zum Quasi-Standard für die Validierung von Flachwassermodellen geworden sind. Für Langzeitsimulationen und spätere Ankopplungen von chemischen Modellkomponenten ist die exakte Modellierung des Massen- und Energietransportes wesentlich. Daher muss die Weiterentwicklung des Modells lokale und globale Erhaltungseigenschaften gewährleisten können.

Für die langfristige Weiterentwicklung des Atmosphärenmodells sind die folgenden Entwicklungsschritte denkbar. Die Weiterführung der physikalischen Modellbildung könnte im Aufbau eines hydrostatischen baroklinen Mehrschichtenmodells auf der Grundlage der dreidimensionalen primitiven Bewegungsgleichungen bestehen, mit dem auch vertikal abhängige Atmosphärenprozesse modelliert werden könnten. Die diagnostische Vertikalgeschwindigkeit könnte mit der Kontinuitätsgleichung berechnet werden, und physikalische Prozesse, wie z. B. turbulente Flüsse in der Grenzschicht und Strahlungsprozesse, würden durch vereinfachte Parametrisierungen einbezogen sein.

Das barokline atmosphärische Mehrschichtenmodell, das Erhaltungseigenschaften in Langzeitsimulationen gewährleistet, könnte dann an Meereis- und Ozeanmodelle gekoppelt werden. Mit dem gekoppelten Modell könnten die Atmosphärendynamik, die Ozeandynamik und deren Wechselwirkungsmechanismen studiert werden, die für die Dynamik des Klimasystems auf der Zeitskala bis zu Jahrhunderten eine wesentliche Rolle spielen.

# Anhang A

## Funktionsräume

Die Definitionen der Funktionsräume, die in der vorliegenden Arbeit benutzt wurden, wollen wir im Folgenden zusammenfassen. Da die genaue Struktur der Funktionsräume für die Arbeit aber nicht von zentraler Bedeutung ist, zitieren wir die Definitionen aus [Alt99], [Dzi88], [Sch93] und [Aub98].

Zunächst definieren wir Polynomräume und Räume stetiger Funktionen im  $\mathbb{R}^n$ . Dazu sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene beschränkte Menge.

**Definition A.1 (Polynomräume)** Für  $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$  definieren wir den Polynomraum

$$P_k(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist ein Polynom, dessen Grad} \leq k \text{ ist.}\}.$$

**Definition A.2 (Räume stetiger Funktionen im  $\mathbb{R}^n$ )** Für  $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$  definieren wir den Raum der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen durch

$$C^k(\overline{\Omega}) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k \text{ mal stetig differenzierbar auf } \Omega \\ \text{und für alle Multiindizes } |\alpha| \leq k \text{ ist } \partial^\alpha f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar.}\}$$

Zur Beschreibung der schwachen Lösung in Kapitel 4 benötigen wir Funktionsräume, die auch Funktionen mit zeitlicher Abhängigkeit enthalten. Dazu führen wir zeitlich abhängige Funktionen mit Werten in einem Banachraum ein. Ein Element aus dem Banachraum ist dann eine ortsabhängige Funktion. Es seien  $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $X$  ein reeller Banachraum.

**Definition A.3 (Sobolevräume auf  $X$ )** Wir definieren den Raum der integrierbaren Funktionen

$$L^2(I, X) := \{f : I \rightarrow X \mid f \text{ ist messbar, } \int_I \|f\|_X^2 < \infty\}$$

und den Sobolevraum

$$H^1(I, X) := \{f \in L^2(I, X) \mid \text{Es existiert die schwache Ableitung } \partial_t f \in L^2(I, X)\}.$$

**Bemerkung A.1** *Eine typische Wahl für  $X$  wäre dann etwa der Ortsfunktionenraum  $X = L^2(S)$ .*

**Definition A.4 (Räume stetiger Funktionen auf  $X$ )** *Wir definieren den Raum der auf  $X$  stetigen Funktionen durch*

$$C(\bar{I}, X) := \{f : \bar{I} \rightarrow X \mid f \text{ ist stetig auf } \bar{I}.\}$$

Schließlich wollen wir die Regularität von Funktionen auf der Sphäre  $S$  beschreiben. Dazu interpretieren wir  $S$  als eine Mannigfaltigkeit  $\Gamma$ .

**Bemerkung A.2** *Die Sphäre  $S$  ist für jedes  $k \geq 0$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit und das Polyeder  $S_h$  aus Kapitel 4 ist eine  $C^{0,1}$ -Mannigfaltigkeit.*

Auf  $\Gamma$  benötigen wir die folgenden Funktionenräume.

**Definition A.5 (Räume differenzierbarer Funktionen)** *Für die  $C^k$ -Mannigfaltigkeit bezeichnen wir mit  $C^k(\Gamma)$  den Raum der auf  $\Gamma$   $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen.*

**Definition A.6 (Lebesgue-Räume)** *Für die  $C^0$ -Mannigfaltigkeit  $\Gamma$  bezeichnen wir mit  $L^2(\Gamma)$  den Raum der auf  $\Gamma$  quadratisch integrierbaren Funktionen.*

**Definition A.7 (Sobolevräume)** *Für die  $C^{k,1}$ -Mannigfaltigkeit  $\Gamma$  bezeichnen wir mit  $H^{k+1}(\Gamma)$  den Raum der Funktionen auf  $\Gamma$ , die  $k+1$ -mal schwach differenzierbar sind mit Ableitungen in  $L^2(\Gamma)$ .*

**Bemerkung A.3** *Auf  $S$  können wir also für jedes  $k \geq 0$  den Raum  $H^k(S)$  sinnvoll definieren.*

**Bemerkung A.4** *Auf dem Polyeder  $S_h$  können wir den Raum  $H^1(S_h)$  definieren. Die Funktionen aus  $H^1(S_h)$  sind aus  $L^2(S_h)$  und besitzen eine schwache Ableitung in  $L^2(S_h)$ .*

# Anhang B

## Tangentiale Differentialoperatoren

In Anlehnung an die Arbeiten [Dzi88], [Sch93], [Sie90] bzw. [HH02] definieren wir die tangentialen Differentialoperatoren auf  $S_R$ . Es handelt sich dabei um die gleichen Differentialoperatoren auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $S_R$ , die üblicherweise mit Hilfe von lokalen Karten eingeführt werden. Die Technik der tangentialen Differentialoperatoren nutzt die Struktur des umgebenden  $\mathbb{R}^3$  und ist dafür unabhängig von der konkreten Wahl der lokalen Karte.

Es sei  $S_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = R\}$ , für  $R > 0$ , die Sphäre und  $\mathbf{n} : S_R \rightarrow \mathbb{R}^3$  der auswärtige Einheitsnormalenvektor an  $S_R$ . Zu  $S_R$  sei  $G \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  eine offene Umgebung von  $S_R$ . Wir gehen davon aus, dass die verwendeten Funktionen hinreichend glatt sind und damit die verwendeten Ableitungen und Integrale existieren.

**Definition B.1 (Tangentialgradient)** *Es sei  $f : S_R \rightarrow \mathbb{R}$  eine skalare Funktion auf  $S_R$ . Zu  $f$  betrachten wir eine beliebige glatte Fortsetzung  $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $\tilde{f}|_{S_R} = f$ . Dann definieren wir den Tangentialgradienten von  $f$  auf  $S_R$  durch*

$$\nabla_s f := \nabla \tilde{f} - (\mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{f}) \mathbf{n}.$$

**Bemerkung B.1** *Die Definition des Tangentialgradienten  $\nabla_s$  ist unabhängig von der Wahl der Fortsetzung. Um das zu sehen, nehmen wir an, es gäbe zwei Fortsetzungen  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ . Dazu definieren wir  $g := \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$  auf  $G$ , so dass  $g|_{S_R} = 0$  gilt. Wir fixieren den Punkt  $\mathbf{x} \in S_R$  und es seien  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  Einheitsvektoren, so dass  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{n}(\mathbf{x}))$  in  $\mathbb{R}^3$  eine Orthonormalbasis ist. Es gilt dann*

$$\nabla g - (\mathbf{n} \cdot \nabla g) \mathbf{n} = (\mathbf{p}_1 \cdot \nabla g) \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_2 \cdot \nabla g) \mathbf{p}_2.$$

*Wählen wir zu  $\mathbf{p}_i$ , für  $i = 1, 2$ , eine differenzierbare Kurve  $\varphi_i : (-1, 1) \rightarrow S_R$  mit  $\varphi_i(0) = \mathbf{x}$  und  $\partial_t \varphi_i(0) = \mathbf{p}_i$ , so folgt mit der Kettenregel*

$$0 = \partial_t g(\varphi_i(t)) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_j} \frac{\partial (\varphi_i)_j(t)}{\partial t} = \mathbf{p}_i \cdot \nabla g.$$

*Daraus folgt aber  $\nabla g - (\mathbf{n} \cdot \nabla g) \mathbf{n} = 0$  und damit die Korrektheit der Definition.*

Wir können nun mit den Definitionen der weiteren Differentialoperatoren fortfahren.

**Definition B.2 (Tangentialrotation (skalar))** *Es sei  $f : S_R \rightarrow \mathbb{R}$  eine skalare Funktion. Wir definieren durch*

$$\mathbf{rot}_s f := -\mathbf{n} \times \nabla_s f$$

die Tangentialrotation von  $f$ .

**Bemerkung B.2** *Wir können  $\mathbf{rot}_s f$  alternativ auch berechnen durch*

$$(\mathbf{rot}_s f)_i = -(\mathbf{n} \times \nabla f)_i = -\epsilon_{ijk} n_j \partial_k f = \epsilon_{ijk} \partial_j (n_k f) = (\mathbf{rot}(f \mathbf{n}))_i.$$

Zu diesen beiden auf  $S_R$  definierten Differentialoperatoren für skalare Funktionen definieren wir die adjungierten Operatoren, die dann auf vektorwertige Funktionen wirken. Dazu stellen wir fest, dass für Funktionen  $\mathbf{u} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $f : S_R \rightarrow \mathbb{R}$  die Identitäten

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \mathbf{u} \cdot \nabla_s f \, d\sigma &= - \int_{S_R} \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) f \, d\sigma, \\ \int_{S_R} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}_s f \, d\sigma &= \int_{S_R} \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} f \, d\sigma \end{aligned}$$

gelten. Dies kann man mit Hilfe der partiellen Integration über das Gebiet  $G$  erkennen. Da die linken Seiten der Gleichungen nur von den Werten von  $\mathbf{u}$  auf  $S_R$  abhängig sind, sind die Funktionen  $\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n})$  und  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u}$  nur von den Werten von  $\mathbf{u}$  auf  $S_R$  abhängig. Damit ist aber auch die folgende Definition korrekt.

**Definition B.3 (Tangentialdivergenz, Tangentialrotation (vektoriell))**

*Es sei  $\mathbf{u} : S_R \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Vektorfunktion auf  $S_R$ . Zu  $\mathbf{u}$  betrachten wir eine beliebige Fortsetzung  $\tilde{\mathbf{u}} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit der Eigenschaft  $\tilde{\mathbf{u}}|_{S_R} = \mathbf{u}$ . Dann definieren wir die Tangentialdivergenz und die Tangentialrotation von  $\mathbf{u}$  auf  $S_R$  durch*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_s \mathbf{u} &:= \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}), \\ \mathbf{rot}_s \mathbf{u} &:= \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

**Bemerkung B.3** *Es gelten die Formeln für die partielle Integration.*

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \mathbf{u} \cdot \nabla_s f \, d\sigma &= - \int_{S_R} \operatorname{div}_s \mathbf{u} f \, d\sigma, \\ \int_{S_R} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}_s f \, d\sigma &= \int_{S_R} \mathbf{rot}_s \mathbf{u} f \, d\sigma \end{aligned}$$

Abschließend definieren wir auf  $S_R$  den Laplace-Beltrami-Operator.

**Definition B.4 (Laplace-Beltrami-Operator)** *Es sei  $f : S_R \rightarrow \mathbb{R}$  eine skalare Funktion. Der Laplace-Beltrami-Operator von  $f$  ist auf  $S_R$  definiert durch*

$$\Delta_s f := \operatorname{div}_s \nabla_s f.$$

# Anhang C

## Die Helmholtz-Zerlegung

Die Helmholtz-Zerlegung eines Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}$  ist die eindeutige Zerlegung von  $\mathbf{u}$  in einen divergenzfreien und rotationsfreien Anteil. Für Geschwindigkeitsfelder im  $\mathbb{R}^n$ , für  $n = 2, 3$ , ist diese Tatsache sehr gut bekannt und vielfach bewiesen worden, siehe z. B. [Bat67], [Tem84], [GR86], [Pir89] oder [QV97]. Leider gibt es kaum Aussagen für den Fall eines Strömungsfeldes auf der Sphäre  $S_R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = R\}$ , für  $R > 0$ . Deshalb wollen wir für diesen Fall nun einen Beweis skizzieren, der auf Ideen in [Bat67] basiert.

Wir gehen davon aus, dass die verwendeten Funktionen hinreichend glatt sind und damit die verwendeten Ableitungen und Integrale existieren.

**Satz C.1 (Helmholtz-Zerlegung)** *Für jede Vektorfunktion  $\mathbf{u} : S_R \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit der Eigenschaft  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  auf  $S_R$  gibt es skalare Funktionen  $\psi, \chi : S_R \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass auf  $S_R$  gilt*

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}_s \psi + \nabla_s \chi.$$

*Die Funktionen  $\psi, \chi$  sind bis auf Konstanten eindeutig bestimmt und genügen auf  $S_R$  den Gleichungen*

$$-\Delta_s \psi = \mathbf{rot}_s \mathbf{u}, \quad \Delta_s \chi = \mathbf{div}_s \mathbf{u}.$$

*Beweis:*

Es sei  $\mathbf{u} : S_R \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  auf  $S_R$  gegeben. Mit den Formeln für die partielle Integration B.3 folgt sofort

$$\int_{S_R} \mathbf{rot}_s \mathbf{u} \, d\sigma = 0, \quad \int_{S_R} \mathbf{div}_s \mathbf{u} \, d\sigma = 0.$$

Nach Theorem 4.7 in [Aub98] existieren damit Funktionen  $\psi, \chi : S_R \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft auf  $S_R$

$$-\Delta_s \psi = \mathbf{rot}_s \mathbf{u}, \quad \Delta_s \chi = \mathbf{div}_s \mathbf{u}.$$



Nun definieren wir auf  $S_R$  die Vektorfunktion  $\mathbf{v} : S_R \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$\mathbf{v} := \mathbf{u} - \mathbf{rot}_s \psi - \nabla_s \chi.$$

Mit Hilfssatz 3.2.4 und den Gleichungen (3.32) gilt in  $S_R$  dann

$$\mathbf{rot}_s \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}_s \mathbf{v} = 0. \quad (\text{C.1})$$

Damit wissen wir nach dem Stokesschen Satz, siehe [Wal95], dass für stückweise glatt berandete Flächenstücke  $S' \subset S_R$  gilt

$$\int_{\partial S'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{S'} \mathbf{rot}_s \mathbf{v} \, d\sigma = 0$$

Da  $S_R$  einfach zusammenhängend ist, können wir für  $\mathbf{x}_0 \in S_R$  damit die Funktion  $\phi : S_R \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $S_R$  mit

$$\phi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

definieren. Das Wegintegral ist nämlich nun unabhängig vom gewählten Integrationsweg zwischen  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}$ . Da nun  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  gilt, folgt auf  $S_R$  auch

$$\nabla_s \phi = \mathbf{v}.$$

Mit der zweiten Gleichung in (C.1) bedeutet das aber auf  $S_R$

$$\Delta_s \phi = 0.$$

Nach Theorem 4.7 in [Aub98] ist die Lösung der Poissongleichung bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt, woraus aber auf  $S_R$  folgt

$$\mathbf{v} = \nabla_s \phi = 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $\psi, \chi$  die geforderte Zerlegung von  $\mathbf{u}$  realisieren.

Wir kommen zum Nachweis der Eindeutigkeit und nehmen an, dass es Funktionen  $\psi, \chi, \psi_1, \chi_1 : S_R \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}_s \psi + \nabla_s \chi = \mathbf{rot}_s \psi_1 + \nabla_s \chi_1$$

auf  $S_R$ . Damit folgt auf  $S_R$

$$\Delta_s(\psi - \psi_1) = 0, \quad \Delta_s(\chi - \chi_1) = 0.$$

Nach Theorem 4.7 in [Aub98] unterscheiden sich damit  $\psi$  und  $\psi_1$  bzw.  $\chi$  und  $\chi_1$  nur durch eine Konstante, was der zweite Teil der Behauptung war.

□

**Bemerkung C.1** Die Funktionen  $\psi$  und  $\chi$  heißen auch *Stromfunktion* und *Geschwindigkeitspotenzial*.

# Anhang D

## Naturkonstanten

Die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  der Erde bestimmt sich nach [Dut95] durch die Formel

$$\begin{aligned}\Omega &:= \frac{2\pi}{1 \text{ siderischer Tag}} \frac{366.25 \text{ siderischer Tag}}{365.25 \text{ solarer Tag}} = \frac{2\pi}{86400} \frac{366.25}{365.25} \text{ s}^{-1} \\ &\approx 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.\end{aligned}$$

Daraus leiten wir den Winkelgeschwindigkeitsvektor der Erde  $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)^T$  ab. Weiter definieren wir den Coriolisparameter  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  als ortsabhängige Funktion durch

$$f(\mathbf{x}) := 2\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 2\Omega \frac{x_3}{|\mathbf{x}|} = 2\Omega \sin \varphi, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

wobei der Winkel  $\varphi$  die geografische Breite am Ort  $\mathbf{x}$  angibt.

Nach [GKHK86] beträgt der mittlere Erdradius  $R_0$

$$R_0 \approx 6.371221 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Für die mittlere Erdbeschleunigung  $g$  gilt nach [Tip94]

$$g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}.$$

Damit definieren wir das Potenzialfeld  $\Phi_E$  der Erde in der Nähe der Erdoberfläche durch

$$\Phi_E(\mathbf{x}) := g|\mathbf{x}|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

# Literaturverzeichnis

- [AG01] P. Azérad und F. Guillén. Mathematical justification of the hydrostatic approximation in the primitive equations of geophysical fluid dynamics. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(4):847–859, 2001.
- [Alt99] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, 1999.
- [Aub98] T. Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer, Berlin, 1998.
- [BAB<sup>+</sup>00] D. P. Bacon, N. N. Ahmad, Z. Boybeyi, T. J. Dunn, M. S. Hall, P. C. S. Lee u. a. A dynamically adapting weather and dispersion model: The operational multiscale environment model with grid adaptivity (OMEGA). *Mon. Wea. Rev.*, 128:2044–2076, 2000.
- [Bän91a] E. Bänsch. An adaptive finite-element-strategy for the three-dimensional time-dependent Navier-Stokes equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 36:3–28, 1991.
- [Bän91b] E. Bänsch. Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions. *IMPACT of Computing in Science and Engineering*, 3:181–191, 1991.
- [Bän93] E. Bänsch. Adaptive finite element techniques for the Navier-Stokes equations and other transient problems. In C. A. Brebbia und M. H. Aliabadi (Hrsg.), *Adaptive finite and boundary element methods*, Seiten 47–76. Computational Mechanics Publication, Southampton Boston, 1993.
- [Bat67] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [BDHR00] J. Behrens, K. Dethloff, W. Hiller und A. Rinke. Evolution of small-scale filaments in an adaptive model for idealized tracer transport. *Mon. Wea. Rev.*, 128:2976–2982, 2000.
- [Beh96] J. Behrens. *Adaptive Semi-Lagrange-Finite-Elemente-Methode zur Lösung der Flachwassergleichungen: Implementierung und Parallelisierung*. Berichte zur Polarforschung 217, Universität Bremen, Alfred-Wegener-

- Institut für Polar- und Meeresforschung, 27568 Bremerhaven, Germany, 1996.
- [BG04] S. R. M. Barros und C. I. Garcia. A global semi-implicit semi-Lagrangian shallow-water model on locally refined grids. *Mon. Wea. Rev.*, 132:53–65, 2004.
- [BH03] E. Bauer und D. Handorf. Holocene climate variability from model simulations – state of the art. In H. Fischer, T. Kumke, G. Lohmann, G. Flöser, H. Miller, H. von Storch und J. F. W. Negendank (Hrsg.), *The KIHZ project: towards a synthesis of Holocene proxy data and climate models*. Springer Verlag, Berlin, 2003. in Druck.
- [BHS89] G. L. Browning, J. J. Hack und P. N. Swarztrauber. A comparison of three numerical methods for solving differential equations on the sphere. *Mon. Wea. Rev.*, 117:1058–1075, 1989.
- [BR78] I. Babuška und W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(4):736–754, 1978.
- [BRH<sup>+</sup>04] J. Behrens, N. Rakowsky, W. Hiller, D. Handorf, M. Läuter, J. Pöpke und K. Dethloff. amatos: parallel adaptive mesh generator for atmospheric and oceanic simulation. *Ocean Modelling*, 2004. eingereicht.
- [BSH90] J. R. Bates, F. H. M. Semazzi und R. W. Higgins. Integration of the shallow water equations on the sphere using a vector semi-Lagrangian scheme with multigrid solver. *Mon. Wea. Rev.*, 118:1615–1627, 1990.
- [BV96] D. Braess und R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Raviart-Thomas element. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33:2431–2444, 1996.
- [CDG<sup>+</sup>98] J. Côté, J.-G. Desmarais, S. Gravel, A. Méhot, A. Patoine, M. Roch und A. Staniforth. The operational CMC-MRB global environmental multiscale (GEM) model. Part II: Results. *Mon. Wea. Rev.*, 126:1397–1418, 1998.
- [CGM<sup>+</sup>98] J. Côté, S. Gravel, A. Méhot, A. Patoine, M. Roch und A. Staniforth. The operational CMC-MRB global environmental multiscale (GEM) model. Part I: Design considerations and formulation. *Mon. Wea. Rev.*, 126:1373–1395, 1998.
- [CM93] A. J. Chorin und J. E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, New York, 1993.
- [Côt88] J. Côté. A Lagrange multiplier approach for the metric terms of semi-Lagrangian models on the sphere. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 114:1347–1352, 1988.

- [CRS<sup>+</sup>93] J. Côté, M. Roch, A. Staniforth, L. Fillion u. a. A variable-resolution semi-Lagrangian finite-element global model of the shallow-water-equations. *Mon. Wea. Rev.*, 121:231–243, 1993.
- [CS90] J. Côté und A. Staniforth. An accurate and efficient finite-element global model of the shallow-water equations. *Mon. Wea. Rev.*, 118:2707–2717, 1990.
- [CSH95] U. Cubasch, B. D. Santer und G. C. Hegerl. Klimamodelle - wo stehen wir? *Phys. Bl.*, 51:269–276, 1995.
- [DB02] P. Deuffhard und F. Bornemann. *Numerische Mathematik II*. Walter de Gruyter, Berlin, 2002.
- [Det93] K. Dethloff. *Modellierung und Diagnostik großräumiger Klimaprozesse der Atmosphäre auf der Grundlage einer Hierarchie von einfachen Klimamodellen und von Analysen globaler Datensätze*. Habilitationsschrift. Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, 1993.
- [Dör96] W. Dörfler. A convergent adaptive algorithm for poisson’s equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33:1106–1124, 1996.
- [DRH<sup>+</sup>03] K. Dethloff, A. Rinke, D. Handorf, A. Weisheimer und W. Dorn. Nonlinear dynamics of the climate system. In H. Fischer, T. Kumke, G. Lohmann, G. Flöser, H. Miller, H. von Storch und J. F. W. Negendank (Hrsg.), *The KIHZ project: towards a synthesis of Holocene proxy data and climate models*. Springer Verlag, Berlin, 2003. in Druck.
- [DRL<sup>+</sup>96] K. Dethloff, A. Rinke, R. Lehmann, J. H. Christensen, M. Botzet und B. Machenhauer. Regional climate model of the arctic atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 101:23401–23422, 1996.
- [DS82] K. Dethloff und G. Schmitz. On determining the tropo- and stratospheric zonal circulation on the basis of momentum and heat sources in a quasi-geostrophic model. *Gerl. Beitr. Geophysik*, 91:25–34, 1982.
- [Dut95] J. A. Dutton. *Dynamics of atmospheric motion*. Dover Publications, New York, 1995.
- [Dzi88] G. Dziuk. Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces. In S. Hildebrandt und R. Leis (Hrsg.), *Partial Differential Equations and Calculus of Variations*, Seiten 142–155. Springer, 1988.
- [EJ95] K. Eriksson und C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. V: Long-time integration. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:1750–1763, 1995.

- [Et196] D. Etling. *Theoretische Meteorologie*. Vieweg, Braunschweig, 1996.
- [FF98] M. Falcone und R. Ferretti. Convergence analysis for a class of high-order semi-Lagrangian advection schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(3):909–940, 1998.
- [FHB04] S. Frickenhaus, W. Hiller und M. Best. FoSSI: Family of simplified solver interfaces for parallel sparse solvers in numerical atmosphere and ocean modeling. *Ocean Modelling*, 2004. eingereicht.
- [GKHK86] W. Gellert, H. Küstner, M. Hellwich und H. Kästner (Hrsg.). *Kleine Enzyklopädie, Mathematik*. Bibliografisches Institut, Leipzig, 1986.
- [GPF03] F. X. Giraldo, J. B. Perot und P. F. Fischer. A spectral element semi-Lagrangian (SESL) method for the spherical shallow water equations. *J. Comput. Phys.*, 190:623–650, 2003.
- [GPS03] J. Galewsky, L. M. Polvani und R.K. Scott. An initial-value problem to test numerical models of the shallow water equations. *Mon. Wea. Rev.*, 2003. in review.
- [GR86] V. Girault und P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer, Berlin, 1986.
- [GR94] C. Großmann und H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [Gro93] R. Grotjahn. *Global Atmospheric Circulations, Observations and Theories*. Oxford University Press, New York, 1993.
- [H<sup>+</sup>01] J. T. Houghton u. a. (Hrsg.). *IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) 2001: Climate Change 2001: The Scientific Basis. Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [HH02] T. Heinze und A. Hense. The shallow water equations on the sphere and their Lagrange-Galerkin solution. *Meteorol. Atmos. Phys.*, 81:129–137, 2002.
- [Hol92] J. R. Holton. *Dynamic Meteorology*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [Jam94] I. N. James. *Introduction to Circulating Atmospheres*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [JRB95] C. Johnson, R. Rannacher und M. Boman. Numerics and hydrodynamic stability: toward error control in computational fluid dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:1058–1079, 1995.

- [KKO02] R. Klöfkorn, D. Kröner und M. Ohlberger. Local adaptive methods for convection dominated problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 40:79–91, 2002.
- [Lan02] H.-J. Lange. *Die Physik des Wetters und des Klimas*. Dietrich Reimer Verlag, Berlin, 2002.
- [Läu03] M. Läuter. An adaptive Lagrange-Galerkin method for the shallow-water equations on the sphere. *PAMM - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 3:48–51, 2003.
- [LBV01] D. Lanser, J. G. Blom und J. G. Verwer. Time integration of the shallow water equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.*, 171:373–393, 2001.
- [LCFP03] R. Laprise, D. Caya, A. Frigon und D. Paquin. Current and perturbed climate as simulated by the second-generation Canadian Regional Climate Model (CRCM-II) over northwestern North America. *Clim. Dyn.*, 21:405–421, 2003.
- [LHD<sup>+</sup>03] M. Läuter, D. Handorf, K. Dethloff, S. Frickenhaus, N. Rakowsky und W. Hiller. An adaptive Lagrange-Galerkin shallow-water model in the sphere. In T. Heinze, A. Layton und D. Lanser (Hrsg.), *Workshop Proceedings "Current Development in Shallow Water Models on the Sphere"*, Munich University of Technology, Germany, 2003.
- [LM72] J. L. Lions und E. Magenes. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Band 1. Springer, Berlin, 1972.
- [Lor63] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
- [Mac79] B. Machenhauer. The spectral method. In *Numerical methods used in atmospheric models*, Band II, Seiten 124–275. GARP Publication Series, 1979.
- [Mae88] G. Maess. *Vorlesungen über numerische Mathematik II*. Birkhäuser, Basel, 1988.
- [MO87] Y. Masuda und H. Ohnishi. An intergration scheme of the primitve equation model with an icosahedral-hexagonal grid system and its application to the shallow water eqations. In T. Matsumo (Hrsg.), *Proceedings of Short- and Medium-Range Numerical Weather Prediction*, Seiten 317–326. Japan Meteorological Society, 1987.

- [MPS88] K. W. Morton, A. Priestley und E. Süli. Stability of the Lagrange-Galerkin method with non-exact integration. *Math. Mod. Num. Anal.*, 22:625–653, 1988.
- [OV82] J. D. Opsteegh und A. D. Vernekar. A simulation of January standing wave pattern including the effects of transient eddies. *J. Atmos. Sci.*, 39:734–744, 1982.
- [Ped87] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, New York, 1987.
- [Pir82] O. Pironneau. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 38:309–332, 1982.
- [Pir89] O. Pironneau. *Finite element methods for fluids*. Masson, Paris, 1989.
- [Pri93] A. Priestley. Evaluating the spatial integrals in the Lagrange-Galerkin method. In K. Morgan, E. Oñate, J. Periaux, J. Peraire und O. C. Zienkiewicz (Hrsg.), *Finite Elements in Fluids*, Seiten 146–155. Pineridge Press, 1993.
- [QV97] A. Quarteroni und A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, Berlin, 1997.
- [RFH<sup>+</sup>03] N. Rakowsky, S. Frickenhaus, W. Hiller, M. Läuter, D. Handorf und K. Dethloff. A self-adaptive finite element model of the atmosphere. In W. Zwiefelhofer und N. Kreitz (Hrsg.), *ECMWF Workshop on the Use of High Performance Computing in Meteorology: Realizing TeraComputing*, Seiten 279–293, Reading, UK, 4–8 November 2003. ECMWF, World Scientific, Singapore.
- [RR02] T. D. Ringler und D. A. Randall. A potential enstrophy and energy conserving numerical scheme for solution of the shallow-water equations on a geodesic grid. *Mon. Wea. Rev.*, 130(5):1397–1410, 2002.
- [Sal78] B. Saltzman. *Advances in Geophysics*. Academic Press, New York, 1978.
- [Sch91] H. R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente*. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [Sch93] A. Schmidt. *Die Berechnung dreidimensionaler Dendriten mit Finiten Elementen*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Institut für Angewandte Mathematik, Wegelerstr. 6, 53115 Bonn, 1993.
- [Sie90] K. Siebert. *Ein Finite-Elemente-Verfahren zur Lösung der inkompressiblen Euler-Gleichungen auf der Sphäre mit der Stromlinien-Diffusions-Methode*. Diplomarbeit. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Institut für Angewandte Mathematik, Wegelerstr. 6, 53115 Bonn, 1990.



- [SP99] G. R. Stuhne und W. R. Peltier. New icosahedral grid-point discretizations of the shallow water equations on the sphere. *J. Comput. Phys.*, 148:23–58, 1999.
- [Str71] A. H. Stroud. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall, London, 1971.
- [Sül88] E. Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 53:459–483, 1988.
- [SWD97] P. N. Swarztrauber, D. L. Williamson und J. B. Drake. The cartesian method for solving partial differential equations in spherical geometry. *Dyn. Atmos. Oceans*, 27:679–706, 1997.
- [Tem84] R. Temam. *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [Tip94] P. A. Tipler. *Physik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994.
- [Tol02] M. A. Tolstykh. Vorticity-divergence semi-Lagrangian shallow-water model of the sphere based on compact finite differences. *J. Comput. Phys.*, 179:180–200, 2002.
- [TTSG01] H. Tomita, M. Tsugawa, M. Satoh und K. Goto. Shallow water model on a modified icosahedral geodesic grid by using spring dynamics. *J. Comput. Phys.*, 174:579–613, 2001.
- [Ver96] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques*. Wiley Teubner, Chichester, 1996.
- [Wal95] W. Walter. *Analysis 2*. Springer, Berlin, 1995.
- [WDH<sup>+</sup>92] D. L. Williamson, J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob und P. N. Swarztrauber. A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry. *J. Comput. Phys.*, 102:211–224, 1992.

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde am Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung (AWI) in Potsdam durchgeführt und im Rahmen des deutschen Klimaforschungsprogramms (DEKLIM) vom Bundesministerium für Bildung und Forschung finanziert.

Mein besonderer Dank gilt meinen wissenschaftlichen Betreuern Herrn Prof. Dr. Klaus Dethloff und Frau Dr. Dörthe Handorf, denen ich für die Anregung zur Bearbeitung des Themas, für ihre fachliche Anleitung und Unterstützung und die sehr gute Zusammenarbeit herzlich danke.

Herrn Prof. Dr. Eberhard Bänsch danke ich für die regelmäßigen ausgesprochen fruchtbaren wissenschaftlichen Gespräche, in denen ich viele wertvolle Anregungen für die Erstellung der Arbeit erhielt.

Die Zusammenarbeit mit meinen Kollegen im Projekt Parallel LArge Scale Model of the Atmosphere (PLASMA), mit Herrn Dr. Stephan Frickenhaus, Frau Dr. Natalja Rakowsky, Herrn Dr. Jörn Behrens und Herrn Prof. Dr. Wolfgang Hiller war immer angenehm und produktiv. Insbesondere die freundliche Bereitstellung der parallelen Löser im Softwarepaket Family of Simplified Solver Interfaces (FoSSI) bzw. des Adaptive Mesh generator for ATmospheric and Oceanic Simulation (amatos) durch Herrn Dr. Stephan Frickenhaus bzw. durch Herrn Dr. Jörn Behrens war für die Arbeit von Nutzen. Vielen Dank dafür.

Das gute Arbeitsklima und die freundliche Atmosphäre in der Arbeitsgruppe „Physik der Atmosphäre“, insbesondere in der Modellierungsgruppe, am AWI in Potsdam waren immer eine Unterstützung für mich. So stand Herr Dr. Wolfgang Dorn jederzeit für Fragen zum Programm  $\LaTeX$  zur Verfügung. Vielen Dank an alle Kolleginnen und Kollegen.

Für das sorgfältige Korrekturlesen der Arbeit möchte ich mich bei meinem Vater, Frau Dr. Dörthe Handorf und Frau Dr. Annette Rinke bedanken.

Schließlich gilt mein Dank meiner lieben Familie, besonders Sylke, durch deren Unterstützung die Fertigstellung der Arbeit ganz wesentlich ermöglicht wurde.

# Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit an keiner anderen Hochschule eingereicht sowie selbständig und nur mit den angegebenen Mitteln angefertigt wurde.

Potsdam, den 14. Februar 2004

Matthias Läuter