

# Zwei-Momenten-Verfahren zur Sedimentation

Corinna Ziemer

Bremerhaven, 23./24. März 2010

- 1 Grundlagen der Zwei-Momenten-Methode
- 2 Ergebnisse: Variation von  $D_{max}$
- 3 Andere Parametrisierungen

## Spektrale Bilanzgleichung für Sedimentation

$$\frac{\partial}{\partial t} f(D) - \frac{\partial}{\partial z} (v_T(D) f(D)) = 0$$

Durch Integration folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M_j - \frac{\partial}{\partial z} F_j &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} M_k - \frac{\partial}{\partial z} F_k &= 0 \end{aligned}$$

mit  $j, k \in \mathbb{N}_0$ ,  $j < k$  und

$$M_j = \int_0^{D_{max}} D^j f(D) dD$$

$$F_j = \int_0^{D_{max}} v_T(D) D^j f(D) dD$$

# Parametrisierungs-Annahmen

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

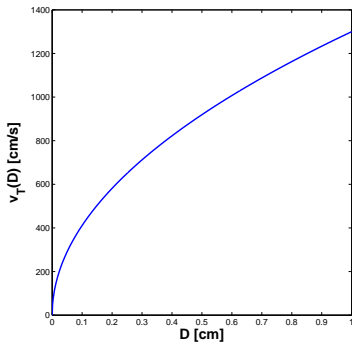
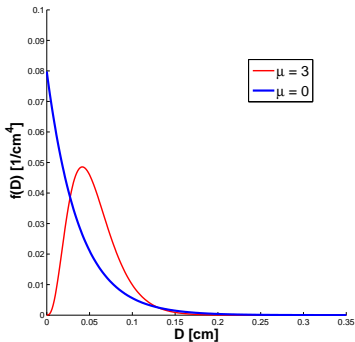
Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

$$f(D) = n_0 D^\mu e^{-\lambda D}$$
$$v_T(D) = \alpha D^{1/2}$$

$\lambda, n_0 > 0$  var.,  $\mu \geq 0$  fest

$\alpha > 0$



# Parametrisierungs-Annahmen

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

$$f(D) = n_0 D^\mu e^{-\lambda D} \quad \lambda, n_0 > 0 \text{ var.}, \mu \geq 0 \text{ fest}$$
$$v_T(D) = \alpha D^{1/2} \quad \alpha > 0$$

Damit:

$$M_j = \int_0^{D_{max}} D^j f(D) dD = n_0 P(\lambda D_{max}, j + \mu + 1) \Gamma(j + \mu + 1) \lambda^{-(j+\mu+1)}$$

$$F_j = \int_0^{D_{max}} v_T(D) D^j f(D) dD$$
$$= \alpha n_0 P(\lambda D_{max}, j + \mu + 3/2) \Gamma(j + \mu + 3/2) \lambda^{-(j+\mu+3/2)}$$

mit

$$P(x, a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x D^{a-1} e^{-D} dD$$

unvollständige Gammafunktion.

# Analytische Lösungsstruktur

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

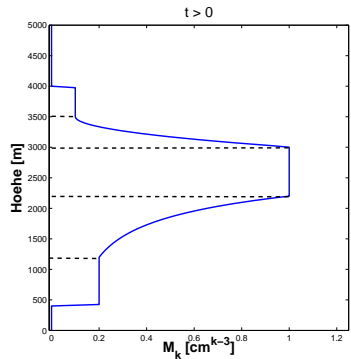
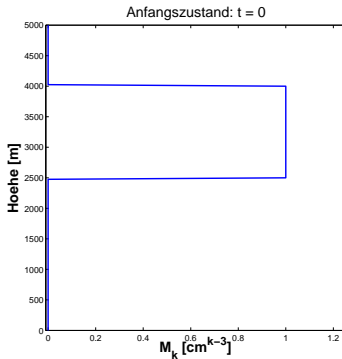
Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

... für  $D_{max} = \infty$  einfach zu berechnen.



Als Vergleich: Lösung der spektralen Bilanzgleichung verfügbar.

# Numerische Lösung

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

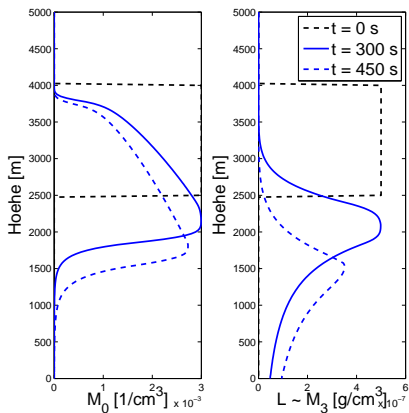
Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

## 1D Finite-Differenzen-Verfahren: MUSCL-Hancock



$$j = 0, k = 3, \mu = 0, D_{max} \gg 0.$$

# Ergebnisse

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

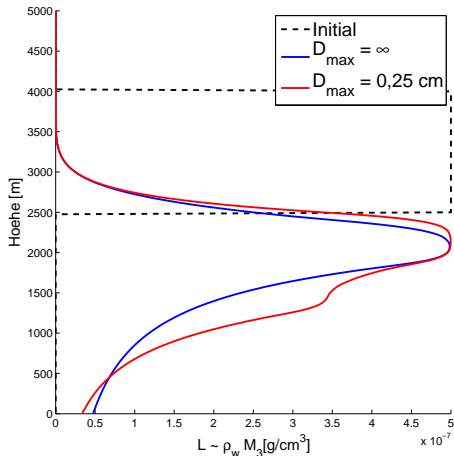
Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

- $D_{max}$  klein: Knick in unterer Verdünnungswelle.

$t = 300$  s



$j = 0, k = 3$



# Einfluss auf die Schockwelle

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

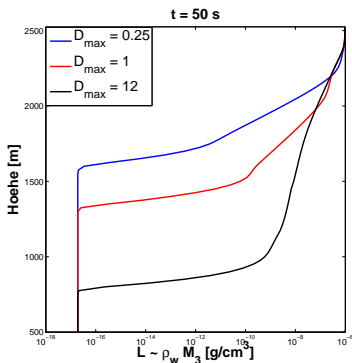
Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

Logarithmische Darstellung der Unterkante.



Kleineres  $D_{max}$ : - geringere Amplitude  
- geringere Geschwindigkeit

# Vergleich mit spektraler Lösung

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

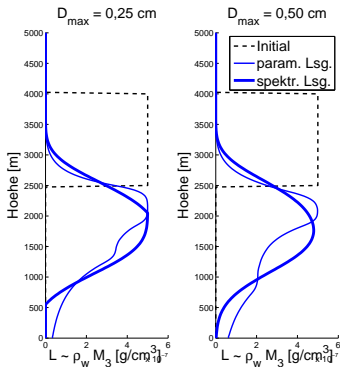
Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierung

Prognostische Momente für  $j = 0$ ,  $k = 3$ ,  $t = 300$  s:



Kleineres  $D_{max}$ : - progn. Momente tendenziell dichter an spektraler Lösung

# Ergebnisse

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

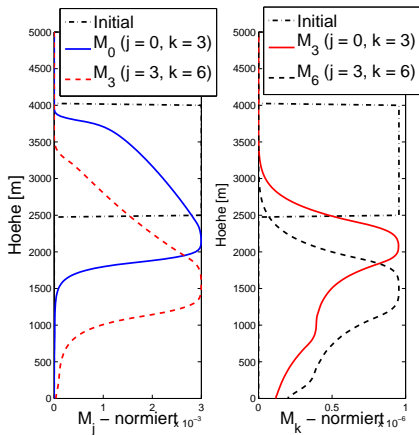
Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierung

- Mehrdeutigkeit:  $M_j$  und  $M_k$  haben für verschiedene  $j, k$  die selbe Struktur.



# Geschwindigkeit der Momente

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

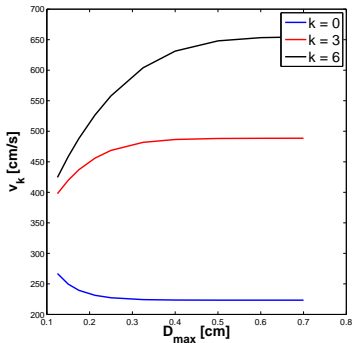
Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

Mittlere momentengewichtete Fallgeschwindigkeit

$$\bar{v}_k(D_{max}) := \frac{F_k(D_{max})}{M_k(D_{max})} = \frac{\int_0^{D_{max}} v_T(D) D^k f(D) dD}{\int_0^{D_{max}} D^k f(D) dD}$$



# Diagnose von Momenten

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

Zwei Momente - zwei Parameter:

$$\forall t, z : M_j(t, z), M_k(t, z) \longleftrightarrow n_0(t, z), \lambda(t, z)$$

- Implizite Gleichung für  $\lambda$

$$\lambda = \left( \frac{M_j P(\lambda D_{max}, k + \mu + 1) \Gamma(k + \mu + 1)}{M_k P(\lambda D_{max}, j + \mu + 1) \Gamma(j + \mu + 1)} \right)^{\frac{1}{k-j}}$$

- $\lambda > 0$  nicht immer gegeben.
  - unvollständige Gammafunktion nicht mehr definiert.
  - Abhilfe: manuelles Setzen von  $\lambda = 10^{-2}$ .
  - Konsequenzen für Lösungsverlauf noch unklar.

# Diagnose von Momenten

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

Zwei Momente - zwei Parameter:

$$\forall t, z : M_j(t, z), M_k(t, z) \longleftrightarrow n_0(t, z), \lambda(t, z)$$

Daher

$$\begin{aligned} \forall t, z : M_l &= n_0 P(\lambda D_{max}, l + \mu + 1) \Gamma(l + \mu + 1) \lambda^{-(l + \mu + 1)} \\ &= \text{fct}(M_j^{\frac{k-l}{k-j}}, M_k^{\frac{l-j}{k-j}}) \end{aligned}$$

# Diagnostische Effekte - Überschiessen

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

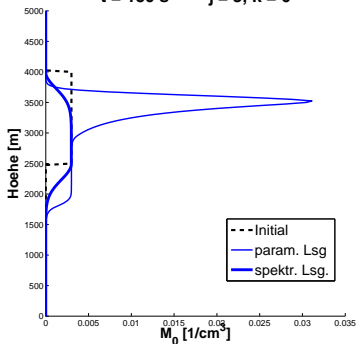
Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

$$l < j, k$$

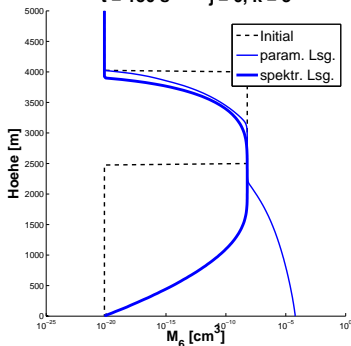
$$t = 150 \text{ s} \quad \text{--- } j = 3, k = 6$$



$$M_0 \sim M_3^2 M_6^{-1}$$

$$j, k < l$$

$$t = 150 \text{ s} \quad \text{--- } j = 0, k = 3$$



$$M_6 \sim M_0^{-2} M_3^2$$

Ursache: unterschiedliche mittlere Geschwindigkeiten der Momente

# Diagnostische Effekte - Dämpfen

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

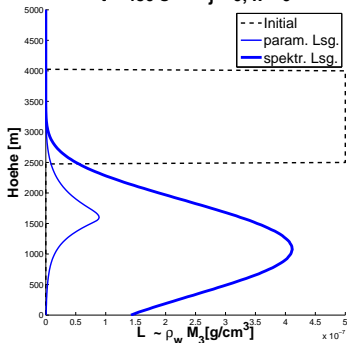
Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierung

$$j < l < k$$

$t = 450 \text{ s}$  --  $j = 0, k = 6$



$$M_3 \sim M_0^{\frac{1}{2}} M_6^{\frac{1}{2}}$$

Diagn. Effekte nehmen für kleineres  $D_{max}$  ab.



# Wahl von $D_{max}$

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

- Bisherige Ergebnisse für kleines  $D_{max}$ 
  - Schockwelle ist geringer ausgeprägt
  - progn. Momente sind tendenziell näher an der spektralen Lösung
  - diagn. Effekte sind schwächer.

→  $D_{max}$  möglichst klein.
- Physik/Natur:  $D_{max} \approx 0,7$  cm, grössere Tropfen sind instabil.

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

**Ergebnisse**

Andere Parame-  
trisierungen

# Vergleich mit $\mu = 3$

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

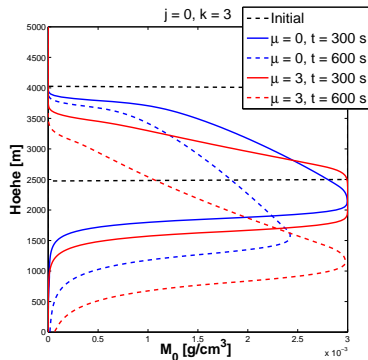
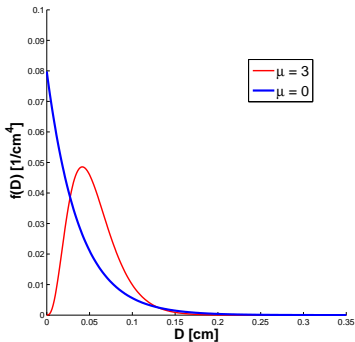
Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

Verwende Verteilungsfunktion:  $f(D) = n_0 D^3 e^{-\lambda D}$



# Vergleich mit $\mu = 3$

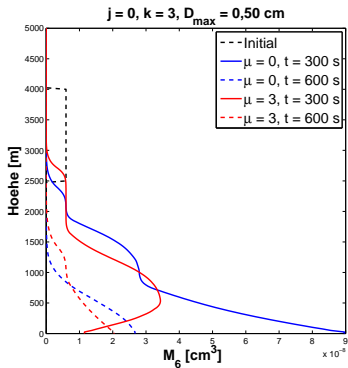
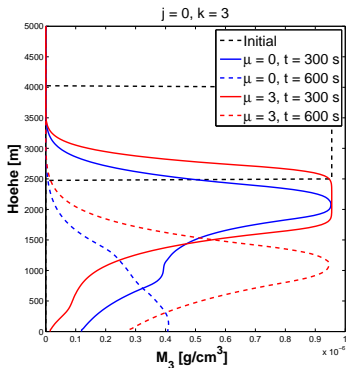
Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen



Links: progn. Moment  $M_3$

Rechts: diagn. Moment  $M_6$

# Sedimentationsparametrisierung

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

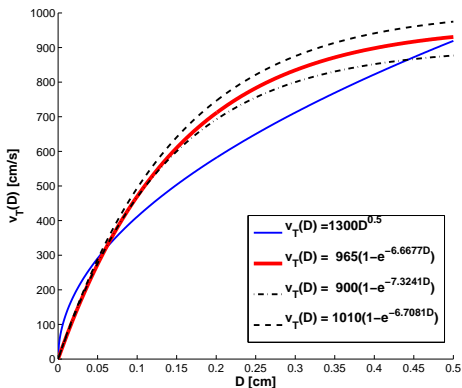
Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

... anderer Ansatz:

$$v_T(D) = c(1 - e^{-bD}) \quad \text{mit } b, c > 0.$$



# Ergebnisse

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

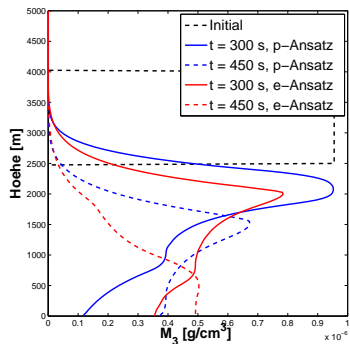
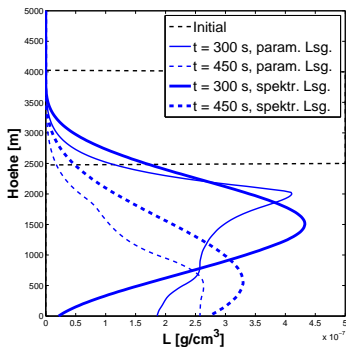
Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

$$D_{max} = 0,50 \text{ cm}, j = 0, k = 3$$



Links: Vergleich von Exponentialansatz und spektraler Lösung  
Rechts: Vergleich von Exponentialansatz und Potenzansatz

# Mittlere Geschwindigkeiten

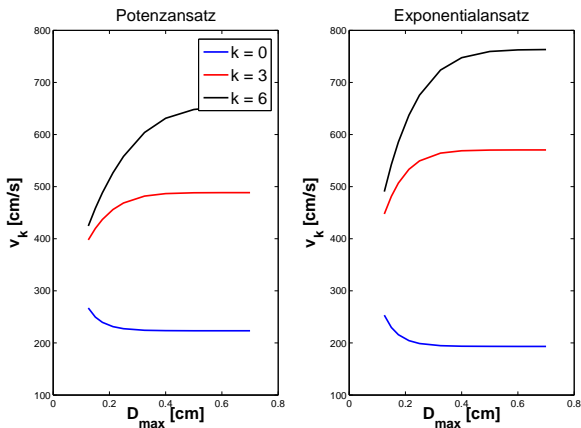
Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierung



→ Diagnostische Effekte nehmen zu

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen



# $f(D)$ für variierendes $D_{max}$

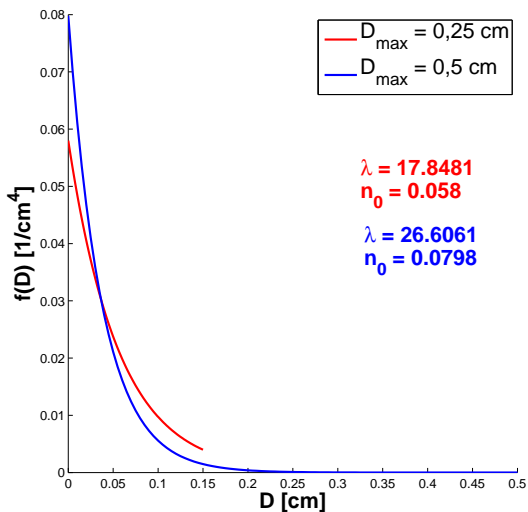
Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierung



# Problem: $\lambda \leq 0$

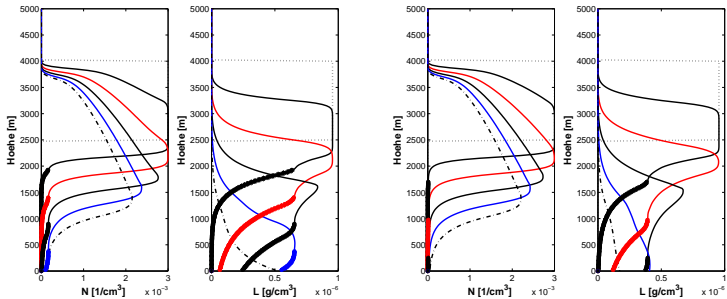
Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen



Links:  $D_{max} = 0,25$  cm, rechts:  $D_{max} = 0,50$  cm, jeweils  $j = 0, k = 3$

# Diagn. Effekte - Überschossen bei $M_0$

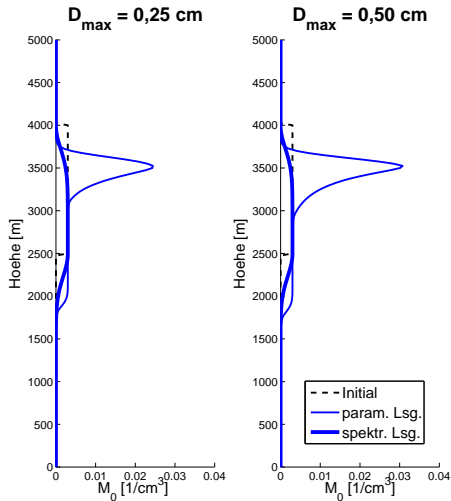
Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen



$$j = 3, k = 6, t = 150 \text{ s}$$

# Diagn. Effekte - Überschossen bei $M_6$

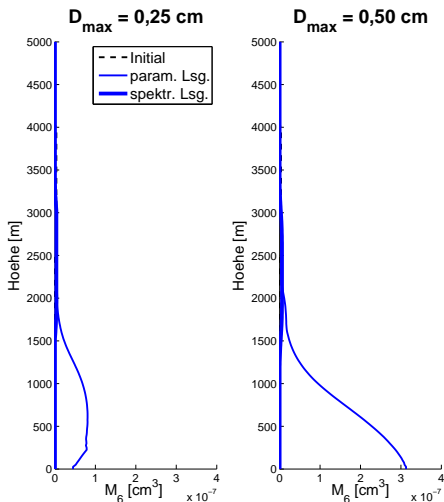
Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierung



$$j = 0, k = 3, t = 150 \text{ s}$$

# Diagn. Effekte - Dämpfen bei $M_3$

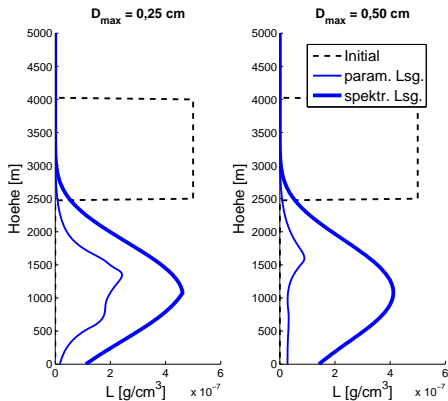
Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierung



$$j = 0, k = 6, t = 450 \text{ s}$$

Kleineres  $D_{\max}$ : - diagnostische Effekte nehmen ab

# Fallgeschwindigkeiten für $\mu = 0$ und $\mu = 3$

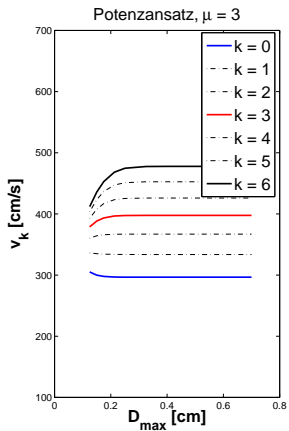
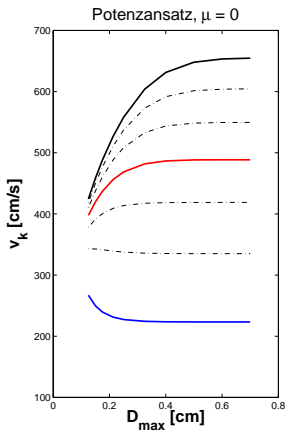
Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen



# Mittlere Tropfenmasse - Potenzansatz

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

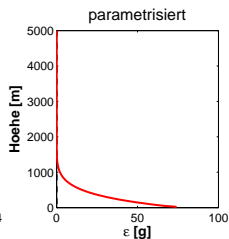
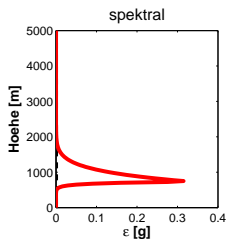
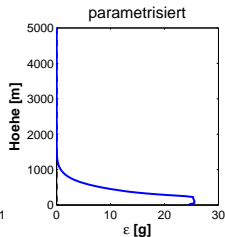
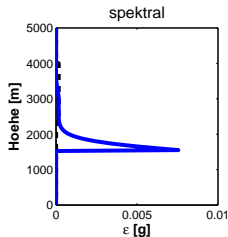
Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

$t = 150 \text{ s}$  – Oben:  $D_{max} = 0,25 \text{ cm}$  – unten:  $D_{max} = \infty$



# Mittlere Tropfenmasse - Exponentialansatz

Zwei-Momenten-  
Verfahren zur  
Sedimentation

Corinna Ziemer

Grundlagen

Ergebnisse

Andere Parame-  
trisierungen

$t = 150 \text{ s}$  – Oben:  $D_{max} = 0,25 \text{ cm}$  – unten:  $D_{max} = \infty$

