

**Numerische Modellierung der Übergangszone
zwischen Eisschild und Schelfeis**

**Numerical modelling of the transition zone
between an ice sheet and an ice shelf**

Christoph Mayer

**Ber. Polarforsch. 214 (1996)
ISSN 0176 - 5027**

Christoph Mayer

Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung
Columbusstraße
27568 Bremerhaven

Die vorliegende Arbeit ist die inhaltlich unveränderte Fassung einer
Dissertation, die 1996 im Fachbereich Geowissenschaften an der
Universität Bremen vorgelegt wurde.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	3
Summary	5
1 Zerfall oder Stabilität, die Übergangszone als Schlüssel zur Weisheit?	7
2 Der Westantarktische Eisschild in der Diskussion	13
2.1 Die Lage des Eisschildes und seine Glazialformen	13
2.2 Die Stabilitätsdiskussion im Wandel der Modelle	18
3 Aufsetzlinie - Übergangszone, eine Nahtstelle entwickelt sich	27
3.1 Massenbilanz und Kontinuität vom Eisschild zum Schelfeis	28
3.2 Die Einführung deviatorischer Longitudinalspannungen	29
3.3 Parametrisierte Flächenmodelle	31
3.4 Lösung der vollständigen Gleichungen	33
4 Mathematische Formulierung	37
4.1 Das Kräftegleichgewicht in einem Eiskörper	37
4.2 Das Fließgesetz für isotropes Eis	39
4.3 Vertikale Skalierung	40
4.4 Die Bewegungsgleichung	42
4.4.1 Die Behandlung des vertikalen resistiven Anteils	43
4.4.2 Die effektive Deformationsrate	44
4.5 Die Kontinuitätsgleichung für den Massenfluß	44
5 Randbedingungen des Modells	47
5.1 Die Schelfeisfront	47
5.1.1 Spezialfälle	50
5.2 Einströmgebiete und Eisscheiden	51
5.3 Eisober- und Eisunterseite	52
5.3.1 Die Kontaktfläche Eis - Luft	52
5.3.2 Der Eis - Wasser - Übergang an der Schelfeisunterseite	53
5.3.3 Die untere Grenzfläche in einem Eisschild	55
5.4 Der Randübergang für die Eismächtigkeit	56
6 Formulierung in Finiten Differenzen	57
6.1 Das Diskretisierungsschema	58
6.1.1 Taylorreihenentwicklung einer stetigen Funktion	58
6.1.2 Die diskreten Ableitungen	59

6.2	Die Lösung eines linearen Gleichungssystems	60
6.3	Anpassung an die Bewegungsgleichungen der Eisdynamik	63
6.4	Die numerische Lösung der Eisdickenevolution	64
7	Ein kleiner Einblick in die Realität: Feldstudie und 2D- Modell	67
7.1	Das Ekström '94-Projekt	67
7.1.1	Feldarbeit und ihre Ergebnisse	68
7.1.2	Ein Vorwärtsmodell in der vertikalen Ebene	76
8	Versuche mit dem EISMINT Schelfeismodell	85
8.1	Modellexperiment für das Schelfeis	85
8.2	Ergebnisse für das Geschwindigkeitsexperiment	86
8.3	Das Experiment für die Eismächtigkeiten	87
9	Modellierung der Übergangszone, schematische Studien	93
9.1	Das uniaxiale Plattenmodell	93
9.1.1	Gleichgewichtsgeometrie und Geschwindigkeitsfeld	95
9.1.2	Massenbilanzbetrachtungen	102
9.1.3	Der Spannungszustand im Eiskörper	106
9.1.4	Sensitivitätstest zur Gitterweite	109
9.2	Erweiterung des Plattenmodells zur Simulation eines Auslaßgletschers	111
9.3	Annäherung an die Realität: Das Buchtmodell	117
10	Ein Schritt in Richtung Verständnis	127
	Literatur	131
A	Die verwendeten Variablen	139
B	Die diskrete Schreibweise der Systemgleichungen	141
	Abbildungsverzeichnis	147
	Dank	151

Zusammenfassung

Die Übergangszone zwischen Eisschild und Schelfeis stellt bislang immer noch einen Bereich im glazialen System dar, dessen Prozesse wenig verstanden sind. Durch die Komplexität der Bewegungsgleichungen konnten auf analytischem Weg bisher nur sehr spezielle Fragestellungen untersucht werden. Die rasche Entwicklung der Computertechnologie hat es inzwischen möglich gemacht, auch auf dem numerischen Weg das Wissen über diese Nahtstelle zu erweitern.

Nach einem kurzen Überblick der Rahmenproblematik wird im zweiten Kapitel näher auf den Westantarktischen Eisschild eingegangen. Dieser Teil des Antarktischen Eisschildes war lange Zeit Mittelpunkt einer Diskussion um die grundsätzliche Stabilität mariner Eisschilde. Die größtenteils weit unter dem Meeresspiegel gegründeten Eismassen sind in ihrer Existenz in besonderer Weise von den dynamischen Prozessen im Übergang vom aufliegenden Eis zu den schwimmenden Schelfeisen abhängig. Es hat sich gezeigt, daß die anfänglichen Theorien einer prinzipiellen Instabilität dieses Eisschildes nicht zutreffen können. Die Möglichkeit eines dramatischen Rückzugs bei entsprechenden klimatischen Bedingungen wird nach wie vor diskutiert.

Bei all diesen Diskussionen kam es immer wieder zu der entscheidenden Frage, wie sich die Änderung der basalen Verhältnisse vom aufliegenden Eisschild zum schwimmenden Schelfeis in der Eisdynamik bemerkbar macht. Die allmähliche Entwicklung der Theorien und speziell der numerischen Modelle zu dieser Problematik wird in Kapitel drei beschrieben, bevor anschließend die physikalischen Grundlagen viskoplastischer Verformung zu einem neuen dreidimensionalen Modell der Eisdeformation entwickelt werden. Mit einem Ansatz zur Aufspaltung der Spannungen in einen lithostatischen und einen resistiven Teil (Van der Veen und Whillans, 1989a) wird ein Gleichungssystem aufgestellt, das numerisch zu lösen ist. Die erforderlichen Randbedingungen werden in Kapitel fünf definiert, in Kapitel sechs der Aufbau des numerischen Modells beschrieben. Die Anwendung der Gleichungen auf ein den wahren Eiskörper simulierendes, regelmäßiges Gitter wird mit Hilfe der Methode der Finiten Differenzen verwirklicht. Die Lösung des daraus hervorgehenden Gleichungssystems erfolgt mit einem Relaxationsverfahren, während die ebenfalls auf dem Gitter definierte prognostische Massenbilanzgleichung direkt gelöst werden kann.

Nach den theoretischen Exkursionen der vorangegangenen Kapitel sorgt Kapitel sieben für den entsprechenden Realitätsbezug. In einem mehrwöchigen Feldexperiment wurden die Verhältnisse in einer Übergangszone im südlichen Ekströmschelfeis untersucht. Mit Hilfe eines zweidimensionalen numerischen Modells ließen sich aus den an der Oberfläche gemessenen Daten Aussagen über die Spannungszustände im Eiskörper und an dessen Unterseite treffen. Es zeigte sich, daß der Wechsel vom

gegründeten zum schwimmenden Bereich in allen betrachteten Größen kontinuierlich verläuft. Der Übergang an der Eisunterseite erfolgt mit hoher Wahrscheinlichkeit in einer allmählichen Zunahme basalen Gleitens, bis an einem gut zu definierenden Punkt die endgültige Ablösung des Eiskörpers vom Untergrund stattfindet.

Ein Test des Modells auf die Vergleichbarkeit mit der Theorie und anderen Modellen wurde im Rahmen eines EISMINT Experiments für einen einfachen Schelfeisfall durchgeführt und ist in Kapitel acht beschrieben. Damit beginnt die Beschreibung der ersten Modellergebnisse, die im anschließenden Kapitel fortgeführt wird. Die Ergebnisse aus einfachen Modellkonfigurationen ermöglichen erste Aussagen über die Verhältnisse in der Übergangszone. Gleichzeitig wird die Zuverlässigkeit des Modells überprüft und Verbesserungen für die Formulierung der Randbedingungen, speziell im Einstrombereich vorgeschlagen.

Für den Fall eines auch an den seitlichen Rändern frei gleitenden Schelfeises beweisen die Ergebnisse eine Entkopplung der beiden Systeme Eisschild und Schelfeis, während für die Existenz seitlicher Scherkräfte eine starke Wechselwirkung in der Übergangszone gezeigt werden konnte. Die Ausdehnung der Übergangszone bewegt sich für das erste Modellexperiment in der Größenordnung von wenigen Eisdicken. In den aufwendigeren Modellen mit seitlicher Reibung können noch keine endgültigen Aussagen getroffen werden. Es hat sich jedoch gezeigt, daß das numerische Modell in der Lage ist, realitätsnahe Konfigurationen stabil darzustellen und bis in den Gleichgewichtszustand zu entwickeln.

Abschließend erfolgt eine kritische Bewertung des bisher Erreichten, wobei vor allem die Problematik des numerischen Aufwandes deutlich wird. Die erzielten Ergebnisse und die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten des entwickelten Modells rechtfertigen jedoch den Aufwand, der durch gezielte Analysen weiter reduziert werden kann.

Summary

The governing processes in the transition zone between an ice sheet and an ice shelf remains one of the least understood problems in ice dynamics. The complex relationship between the simplified Navier Stokes equations and a nonlinear flow law prevents extensive analytical investigation of the ice flow, however the increasingly rapid evolution in computer technology enables an intensified numerical analysis of the connection between the different glacial features of an ice sheet and an ice shelf.

For many years, discussions about the stability of marine ice sheets have concentrated on the West Antarctic Ice Sheet, large parts of which go to ground well below sea level. Such ice masses are very sensitive to the dynamic processes governing the transition from the grounded ice to the floating ice shelves. The first theories postulating an inherent instability have proved to be unrealistic. The real behaviour of the West Antarctic Ice Sheet has yet to be understood. Still, there remains the idea of a dramatic retreat, triggered by a climatic change. Chapter one and two introduce these ice sheets and give a short overview on the stability theories.

The dynamical consequences of the change in basal boundary conditions in the transition zone appear to be the basic problem in stability discussions. Chapter three briefly reviews the theories and past numerical models. Chapter four introduces a new three dimensional numerical model of ice flow derived from the physical principles of viscoplastic deformation. Using the formulation of Van der Veen and Whillans (1989) for separating full stresses into lithostatic and resistive components, it develops a set of equations that can be solved numerically. Chapter five provides detailed descriptions of the boundary conditions. Chapter six presents the numerical implementation which solves on a regular finite difference grid the equations of a hypothetical, but realistic ice body. The numerical scheme solves the velocity equations by a Successive Overrelaxation Method, and directly solves the mass balance equation.

Chapter seven introduces observations from a real transition zone on the southern part of Ekströmsisen, a small ice shelf in Dronning Maud Land, and applies a two dimensional numerical model to derive from the measured surface values the strain conditions at the base and within the ice. The result are: that the transition from grounded ice to floating ice looks very smooth in terms of velocity, stress and strain; the change from stagnant basal conditions to the free floating ice shelf is very likely through a zone of increasing basal sliding and the final step from grounded to floating ice appears at a well defined position in the seismic record.

The model was compared with other numerical models and analytical theory using the EISMINT (European Ice Sheet Modelling Initiative) ice shelf test. Chapter eight

presents the results for this simple ice shelf configuration. The results from this and other simple model configurations clarify the conditions within a glacial transition zone and test the reliability of the model. They also suggested improvements in the formulation of the boundary conditions, especially in the inflow areas.

The results show that an ice shelf effectively decouples from an ice sheet if it has free slip conditions at its sides. The ice sheet and ice shelf will strongly interact if there is lateral shearing. In the simple model configurations, the transition zone formed within a horizontal distance of a few ice thicknesses. The more complex models including lateral shearing have not yet reached steady state. No final quantitative results have been obtained, although the models evolve through stable, realistic configurations.

The final chapter reviews the model development thus far and previews future work. The most critical factor has been and will be the reduction of the numerical system to the bare essentials in order to control numerical expenses. These expenses, however, are well justified by the results already achieved and by the very flexible application of the model to a wide range of problems.

Kapitel 1

Zerfall oder Stabilität, die Übergangszone als Schlüssel zur Weisheit?

„Rapid Disintegration of the Wordie Ice Shelf in Response to Atmospheric Warming“ (Doake und Vaughan, 1991), „Breakup of Antarctic Ice“ (Zwally, 1991), „Recent atmospheric warming and retreat of ice shelves on the Antarctic Peninsula“ (Vaughan und Doake, 1996), „Rapid Collapse of Northern Larsen Ice Shelf, Antarctica“ (Rott et al., 1996), sind ein paar ausgewählte Titel von Beiträgen in *Nature* und *Science* aus den letzten Jahren. Auf die Reaktion der Medien mußte nicht allzulange gewartet werden. Nicht nur um Sachlichkeit bemühte Beiträge wie: „Antarktische Eisschelfe in Bewegung, Riesige Platten abgebrochen / Höhere Lufttemperaturen als Ursache?“ (FAZ, 21. Februar 1996) aus dem Wissenschaftsteil versuchten, eine breitere Öffentlichkeit über scheinbar nichtalltägliche Vorgänge in der fernen Antarktis zu informieren.

Die Diskussion um globale Klimaveränderungen bekam neuen Nährstoff, und die mit dieser Thematik befaßten Wissenschaftler sind ein weiteres Mal aufgefordert, aus Daten, Modellen und Analysen die Mechanismen zu ergründen, die zu solchen Ereignissen führen.

Die oben genannten Artikel beschäftigen sich mit dem auffallend raschen Zerfall von Schelfeisen im nördlichen Bereich der antarktischen Halbinsel. Es deutet sich an, daß die hochsommerliche Durchschnittstemperatur eine Art Stabilitätskriterium für dieses Gebiet darstellt. Über die letzten Jahrzehnte wurde eine Erwärmung auf der Südhemisphäre beobachtet, die sich in Richtung höherer Breiten verstärkt. An der antarktischen Halbinsel und in der Westantarktis stiegen die Jahresmitteltemperaturen seit 1945 um bis zu 2,5 °C (Jacobs und Comiso, 1993; Vaughan und Doake, 1996). Die 0 °C-Januar-Isotherme, die Mercer (1978) als Kriterium für die langfristige Stabilität von Schelfeisen annimmt, fällt im Bereich der antarktischen Halbinsel mit der -5 °C Jahres-Isotherme zusammen (Vaughan und Doake, 1996). Der Zerfall von Wordie- und nördlichem Larsenschelfeis stimmt auffallend mit der südwärts Wanderung dieser Temperaturgrenze überein. Allerdings besteht bisher noch kein einheitlicher Konsens über die gesamten klimatischen und physikalischen Wechselwirkungen, die zu solchen Instabilitäten führen. Einerseits wird das Temperaturregime und damit auch die Reaktivität eines Schelfeises durch Strahlung und Lufttemperatur beeinflußt. Reine Wärmeleitung ist allerdings zu langsam, um in den beobachteten Zeiträumen eine dominierende Rolle zu spielen. Ein beschleunig-

nigter Eintrag der Wärmemenge in den Eiskörper durch vermehrtes Auftreten von Schmelzwasser an der Oberfläche und dessen Eindringen kann einen Beitrag zur Destabilisierung liefern (Liu und Miller, 1979). Demgegenüber können aber auch mit der Temperaturvariation gekoppelte Massenbilanzänderungen oder veränderte Wassertemperaturen und Strömungsverhältnisse im Ozean und damit verstärktes basales Schmelzen die Dynamik entscheidend verändern. Für den Zusammenbruch der in sehr viel kälteren Zonen liegenden Filchner-Ronne- und Ross-Schelfeise ist jedoch nach heutiger Beurteilung eine erheblich stärkere Erhöhung der mittleren Temperaturen erforderlich (Doake und Vaughan, 1991; Zwally, 1991).

Das Verschwinden dieser verhältnismäßig kleinen Eistafeln an der antarktischen Halbinsel würde kein solch großes allgemeines Interesse hervorrufen, existierten nicht schon seit vielen Jahren Theorien, die, für den Fall bestimmter klimatischer Veränderungen die Auflösung des gesamten westantarktischen Eisschildes voraussagen. Ausgehend von Hughes (1973), der darauf hinwies, daß der westantarktische Eisschild nicht im Gleichgewicht sei, entwickelte sich in den 70er Jahren das Bild eines sensiblen, potentiell instabilen Eisschildes in der Westantarktis (Weertman, 1974; Hughes, 1977; Mercer, 1978; Thomas et al., 1979). Eine kurze Zusammenfassung der Instabilitätsdiskussion wird in Kapitel 2 gegeben.

Die meisten Autoren sind sich bis heute darin einig, daß die großen Schelfeise, in die ein wesentlicher Teil des vom Inland abfließenden Eises transportiert wird, durch ihre Ankopplung an das seitlich benachbarte Festland und an ihrer Basis an höhere Teile des flachen Schelfs einen stabilisierenden Einfluß auf den Eisschild ausüben (Sanderson, 1979; Hindmarsh, 1993a; Thomas, 1979a; Van der Veen, 1985; Van der Veen, 1987; MacAyeal, 1987). Über 90% der Akkumulation über der Westantarktis wird durch 19 Eisströme abtransportiert, von denen wiederum 15 in die beiden großen Schelfeise münden.

Mercer (1978, und darin zitierte Literatur) verweist darauf, daß eine Verdoppelung des CO₂-Gehaltes in der Atmosphäre einen Anstieg der polaren Jahresmitteltemperaturen um bis zu 10 °C bewirkt. Solch eine drastische Zunahme dieses Treibhausgases ist, je nach Abschätzungen, in den nächsten 50 bis 200 Jahren zu erwarten (Mercer, 1978). Nach neueren Untersuchungen folgt aus diesem Anstieg des CO₂-Gehaltes eine Erhöhung der globalen Temperatur von 3,5 bis 5 °C, was für die Polargebiete ähnliche Auswirkungen hat wie von Mercer vorausgesagt (Wetherald und Manabe, 1988; IPCC, 1990). Die damit verbundene Änderung des Temperaturregimes im Mündungsbereich von Filchner-Ronne-Schelfeis und Ross-Schelfeis könnte, analog zu den heutigen Verhältnissen an der Halbinsel, zu einer lokalen Destabilisierung führen. Da die Reaktionszeiten von Schelfeisen auf Schwankungen der Massenbilanzparameter in der Größenordnung von wenigen hundert Jahren verhältnismäßig kurz sind (Whillans, 1981; Van der Veen, 1986), ist eine Ausdünnung des Schelfeiskörpers bis in den Bereich des Übergangs zum Inlandeis zu erwarten. Die Abnahme der Eisdicke reduziert einerseits die Gebiete mit Grundberührung innerhalb des Schelfeises, andererseits wird das Abflußgleichgewicht des Inlandeises an dessen Übergang zur schwimmenden Eisplatte gestört. Für ein plötzliches Verschwinden der großen Schelfeise sagt Mercer (1978) einen Zerfall des gesamten westantarktischen Eisschildes innerhalb weniger Jahrzehnte voraus. Dies ergäbe einen mittleren Anstieg des Meeresspiegels um mehr als fünf Meter.

Da es sich hier um einen *marinen* Eisschild handelt, d.h. daß der größte Teil des

Untergrundes auch im eisfreien Fall unter dem Meeresspiegel liegt, sollte mit einsetzendem Rückzug der Aufsetzlinie (*grounding line*) in immer tiefere Bereiche kein stabiler Zustand mehr erreicht werden. In zahlreichen Artikeln wurde seit den Arbeiten von Weertman (1974) und Mercer (1978) begründet, daß weder die Auflösung der Schelfeise noch der Zerfall des Eisschildes innerhalb solch kurzer Zeitspannen möglich ist (Van der Veen, 1985; Thomas et al., 1979; Budd et al., 1984; Van der Veen, 1986; Zwally, 1991; Hindmarsh, 1993b, u.a.). Eine Reihe von wechselwirkenden Mechanismen stabilisieren die Dynamik der Schelfeise wie auch des Eisschildes selbst. Die Wirkung der Zonen, in denen sich die schwimmende Eisplatte in Kontakt zum Festland befindet (passive Randzonen und sog. *ice rumples*), wurde in den letzten 15 Jahren mehrfach untersucht (Hughes, 1982; Lange und MacAyeal, 1989; MacAyeal et al., 1986; MacAyeal, 1987; Sanderson und Doake, 1979; Van der Veen, 1986). Es besteht allgemeine Übereinstimmung darüber, daß ein durch solche Zonen in der mechanischen Ausdünnung behindertes Schelfeis dem ungestörten Massenabfluß aus dem Inland eine rückwirkende Kraft entgegensetzt. Für theoretisch frei nach allen Richtungen expandierende Schelfeise ist diese Kraft verschwindend gering.

Die Nahtstelle zwischen dem auf festem Untergrund aufliegenden Eiskörper und dem schwimmenden Bereich spielt eine zentrale Rolle in der gesamten Massenbilanz- und Stabilitätsdiskussion. Unabhängig von der konkreten Form und Ausdehnung dieses Überganges verändert sich im wesentlichen die Ankopplung zwischen Eisunterseite und Untergrund durch das Verschwinden der Scherspannungsanteile an der Grenzfläche zwischen Eis und Wasser. Solange das Eis sich über festes Material bewegt, erfährt es eine je nach den Verhältnissen unterschiedlich große Reibungskraft. In Bereichen, in denen es am Grund festgefroren ist, muß der Transport sogar ausschließlich durch innere Deformation erfolgen. Daher treten vor allem in den tieferen Bereichen des gegründeten Eiskörpers starke Scherdeformationen auf. Demgegenüber fehlt diese Reibungskraft unter dem schwimmenden Anteil vollständig, das Eis gleitet reibungsfrei auf dem Wasser. Der hydrostatische Druck des Wassers an der Unterkante der Schelfeisfront steht im Gleichgewicht zum hydrostatischen Druck des schwimmenden Eiskörpers an dieser Stelle. Durch die unterschiedliche Dichte der zwei Aggregatzustände Eis und Wasser und dem daraus resultierenden Freibord des Schelfeises besteht allerdings eine vertikal variierende Druckdifferenz zwischen Eis und Wasser mit einem Maximum an der Wasseroberfläche (siehe Abb. 5.2). Die daraus resultierende Kraft führt zur Expansion der schwimmenden Eisplatte, solange ein Freibord existiert. Die Bewegungsform wechselt also in der Übergangszone vom scherungsdominierten Fließen über festem Grund zu freiem Gleiten auf dem Wasser. Im letzteren Fall erfolgt die Ausdünnung der Eisplatte nur noch durch Longitudinalspannungen, die durch den gravitativen Energieüberschuß der Freibordhöhe hervorgerufen werden (Paterson, 1994).

Die Bedeutung dieser Übergangszone wurde schon früh erkannt. Theoretische Überlegungen und Modellstudien sind mit den verschiedensten Ansätzen versucht worden (Weertman, 1974; Van der Veen, 1985; Herterich, 1987; Muszynski und Birchfield, 1987; Barcilon und MacAyeal, 1993). Allerdings ist es trotz der verhältnismäßig einfachen Physik für einen homogenen, isotropen und nicht komprimierbaren Körper, als der das Eis gewöhnlich betrachtet wird, nicht möglich, eine geschlossene, analytische Lösung für einen allgemeinen dreidimensionalen Fall anzugeben. Das Ver-

halten wird durch das nichtlineare Fließgesetz kompliziert, so daß die beschriebenen Übergangszonen meist mehr oder weniger stark parametrisiert waren und für den Eisschild und das Schelfeis die jeweils üblichen Vereinfachungen verwendet wurden. Lestringant (1994) gibt für den zweidimensionalen Fall eine Lösung der allgemeinen Stokes-Gleichungen an, wobei allerdings nur freie Expansionsbedingungen für das Schelfeis angenommen wurden. In diesem Fall wirkt keine rückwirkende Kraft auf den gegründeten Teil und die zwei Systeme können als entkoppelt angesehen werden (Lestringant, 1994).

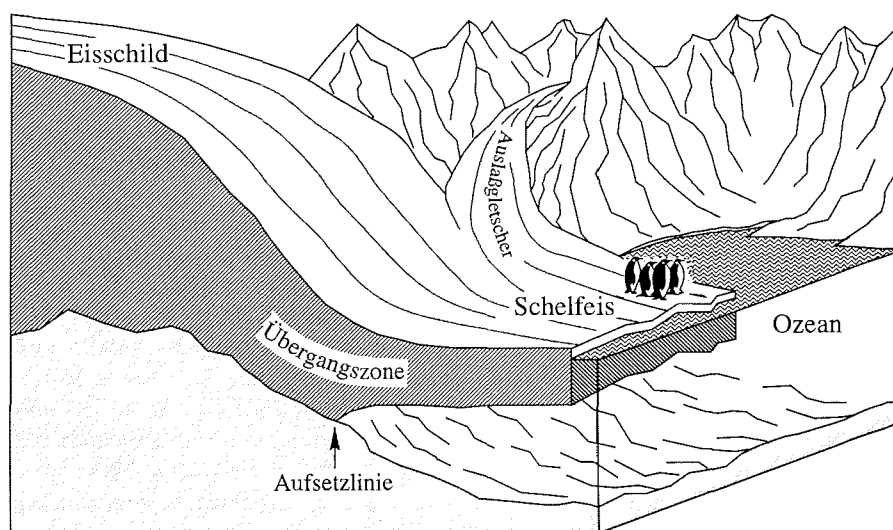


Abbildung 1.1: Die glaziale Landschaft

In der vorliegenden Arbeit wurden die Stokes-Gleichungen für das laminare Fließen eines homogenen Körpers erstmals ohne die bislang für Eisschild- oder Schelfeismodelle spezifische Vernachlässigung physikalischer Terme in einem dreidimensionalen numerischen Modell entwickelt. Mit dem bisher rein mechanischen Modell können in Verbindung mit der implementierten Kontinuitätsgleichung das Gleichgewichtsverhalten und die zeitliche Evolution von Eismassen im Bereich der Übergangszone für nahezu beliebige Geometrien untersucht werden. Im Grunde widerspricht die Existenz dieses Modells den Dogmen der Modellierungsschule, die numerischen Formulierungen stets so minimal wie möglich zu halten, um gerade noch den geforderten Genauigkeiten der physikalischen Grundlagen zu genügen. Schelfeis- und Eisschildphysik sind weitgehend verstanden. Aus dem Vergleich der Resultate parametrisierter Übergangszonen mit Feldmessungen können angepaßte Modelle entwickelt werden, die die Dynamik stetig beschreiben. Die Untersuchung der einzelnen Terme auf ihre Ordnung und Normierungsmethoden gibt Aufschluß über den relativen Einfluß auf die Gesamtlösung. Konkrete Werte für die im allgemeinen vernachlässigten Ausdrücke, ihre räumliche Verteilung und ihre Bedeutung für das Gesamtverhalten des Systems können mit den oben genannten Methoden nicht erzielt werden.

Der direkte Anwendungsbereich des hier entwickelten Modells liegt daher in der Beurteilung der Auswirkungen einzelner Komponenten des Spannungstensors auf die Dynamik und Geometrie des Systems "Übergangszone" (Abb. 1.1). Aus Sensitivitätsstudien werden direkte Ergebnisse über die Signifikanz der Vernachlässigung bestimmter Teile des mathematischen Formalismus erzielt. Daraus läßt sich wieder der Weg der Forderung nach Minimierung des numerischen Aufwandes beschreiben, diesmal mit quantitativen Belegen für die Erhaltung der physikalisch wichtigen Eigenschaften innerhalb des Modells.

In dieser Arbeit soll vorrangig anhand schematischer Studien an einfachen Modellkonstruktionen die Funktionalität und die Stabilität des entwickelten Modells dargestellt werden. Die Änderung des vorherrschenden Spannungsregimes im Eiskörper beim Überqueren der Aufsetzlinie kann hiermit erstmals aus einer geschlossenen mathematischen Formulierung heraus berechnet und gezeigt werden. Mit dieser geschlossenen Darstellung über die Aufsetzlinie hinweg ist es möglich, die Wechselwirkungen zwischen gegründetem und schwimmendem Eis direkt zu untersuchen.

Kapitel 2

Der Westantarktische Eisschild in der Diskussion

Das Ziel dieser Arbeit ist die Darstellung der Wirkungsweise eines dreidimensionalen Modells für das Fließen von Eis, in dessen physikalischer Grundkonzeption keine einschränkenden Vereinfachungen gemacht worden sind. Diese Thematik bezieht ihre Relevanz aus der noch nicht vollständig geklärten Dynamik im Übergangsbereich zwischen Eisschild und Schelfeis. Der Westantarktische Eisschild reagiert, wie im einleitenden Kapitel schon angedeutet, wahrscheinlich sehr sensibel auf Variationen in dieser kritischen Zone. Auch wenn die entwickelten numerischen Verfahren noch nicht auf ein direktes Problem aus diesem Bereich angewendet werden, soll hier der Versuch unternommen werden, den derzeitigen Wissensstand zu diesem klimarelevanten Eiskörper im Überblick darzustellen, für dessen Dynamik nach wie vor gilt, daß es *Glaciology's grand unsolved problem* (Van der Veen, 1987) ist.

2.1 Die Lage des Eisschildes und seine Glazialformen

Innerhalb des globalen Systems ist bei weitem der größte Teil des vorhandenen Süßwassers momentan in den großen Eiskappen Grönlands und der Antarktis gebunden. Etwa 85% der Masse entfallen dabei auf den antarktischen Eisschild, der 91% des weltweiten Eisvolumens darstellt (Hambrey und Alean, 1994). Trotz des sehr geringen Verhältnisses von nur 1,8% im Vergleich zur Gesamtmasse des Wassers in den Ozeanen wären die Auswirkungen eines totalen Abschmelzens für die menschliche Zivilisation fatal. Allein der potentielle Anstieg des Meeresspiegels würde im Mittel etwa 70 Meter betragen (Van der Veen, 1987). Solche "worst case" Szenarien sind nach dem bisherigen Kenntnisstand in historischen Zeitskalen nicht relevant (Huybrechts, 1993), verdeutlichen aber die Mengenverhältnisse in anschaulicher Weise.

Die Westantarktis stellt eine der drei morphologischen Einheiten der Antarktis dar. Die Unterscheidung ergibt sich aus geologischer, geographischer wie auch glaziologischer Sicht (siehe Abb. 2.1).

Die größte Fläche, wie auch den bedeutendsten Eisanteil von 86% der antarktischen Eismasse, nimmt die sogenannte Ostantarktis ein (Drewry et al. (1982), siehe Abb. 2.1 und 2.2). Der Name weist auf ihre Lage in der östlichen Hemisphäre hin. Unter der momentanen Eislast von bis zu 4000 Metern liegt der größte Teil des festen

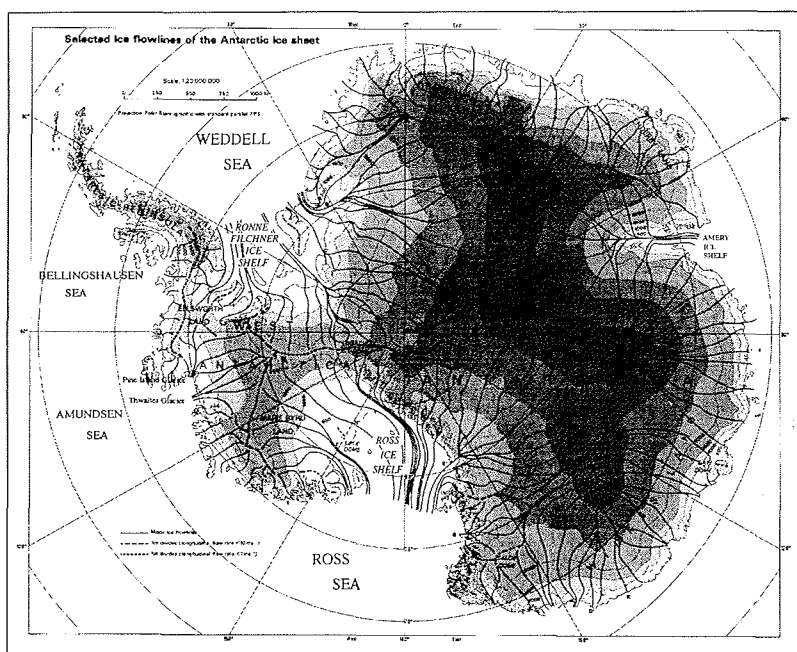


Abbildung 2.1: Übersicht des antarktischen Kontinents mit den wichtigsten Bezeichnungen. Zusätzlich sind die Hauptfließrichtungen und die Eisscheiden eingezeichnet (nach Drewry (1983)).

Untergrundes unter dem Meeresspiegel. Im eisfreien, isostatisch ausgeglichenen Zustand wäre dagegen beinahe die gesamte Ostantarktis kontinentales Festland. Auch im heutigen Zustand existieren in den Randbereichen der Ostantarktis neben nur teilweise vergletscherten Gebirgsketten kleine eisfreie Gebiete, sogenannte Oasen, die allerdings nur einen geringen Prozentsatz der Gesamtfläche darstellen (Drewry et al., 1982; Fox und Cooper, 1994). In Bereichen, in denen der Eisschild durch die Randgebirge begrenzt ist, bilden große Auslaßgletscher das Drainagesystem für die Eismassen aus dem Inneren des Kontinents. Durch sehr große Fließgeschwindigkeiten erreichen sie hohe Transportraten. Im Gegensatz dazu ist die Bewegung im zentralen Eisschild sehr gering (McIntyre, 1985).

Aus geologischer Sicht besteht der ostantarktische Teil des Kontinents aus einem alten, vornehmlich präkambrischen Schild, der von jüngeren Sedimenten und Vulkaniten überdeckt wird (Craddock, 1982). Im Gegensatz dazu sind weite Bereiche des Eises der westlichen, südpolaren Hemisphäre in der wesentlich kleineren Westantarktis auf ursprünglichem Meeresboden gegründet (Abb. 2.3). Die mittlere Oberflächenhöhe dieses Eisschildes ist erheblich geringer als im ostantarktischen Teil (Drewry, 1983). Auch im eisfreien, isostatisch ausgeglichenen Zustand bestünde dieses Gebiet im wesentlichen aus einem flachen, inselumrandeten Meeresbecken, das teilweise mit tiefen Grabenstrukturen (zum Beispiel dem *Bentley Trench*) durchzogen ist (Kadmina et al., 1983). Diese Merkmale führen für die westantarktische Eismasse zu der Bezeichnung "Mariner Eisschild". Das transantarktische Gebirge

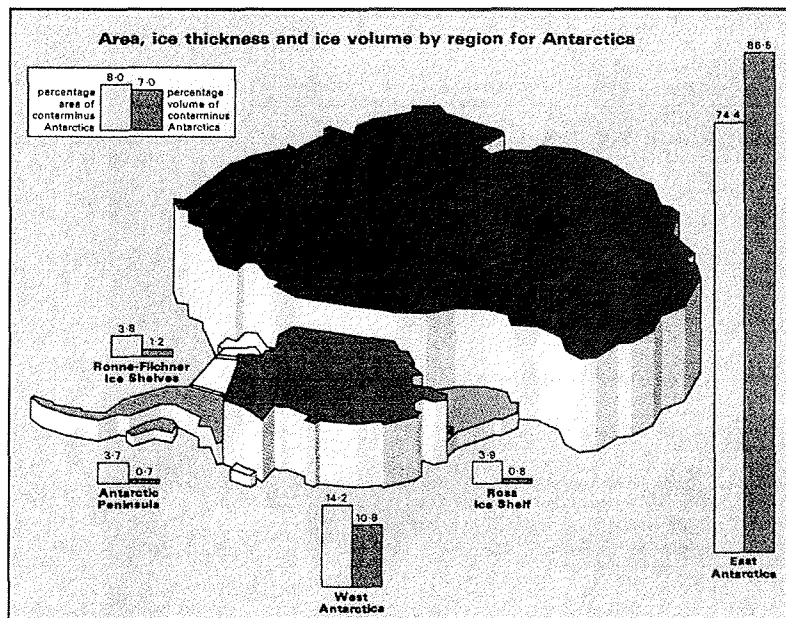


Abbildung 2.2: Flächen- und Volumenanteile der antarktischen Regionen (aus Drewry (1983)).

bildet die Trennungslinie zwischen diesen beiden unterschiedlichen Regionen.

Der tiefliegende Untergrund in der Westantarktis ist mit ein Grund für die Ausbildung großer schwimmender Eisplatten. Diese Schelfeise bilden sich durch den Abtransport des Eises aus dem Zentrum des Eisschildes über dessen Rand (Abb. 2.1). Liegt der Untergrund weit genug unter der Meeresoberfläche, daß der theoretische Tiefgang der Eisdecke geringer ist als die Wassersäule, so schwimmt der Eiskörper auf. Die Begrenzungslinie zwischen dem aufliegenden und dem schwimmenden Eis wird Aufsetzlinie oder *grounding line* genannt. Durch den Einfluß von basalem Gleiten und den Tidebewegungen kann allerdings diese scharfe Begrenzung oft nicht aufrecht erhalten werden. In diesen Fällen spricht man besser von einer Aufsetzzone, anstelle von einer exakten Linie. Die dynamische Umwandlung des Spannungsregimes findet dabei in jedem Fall in einer, in ihrer Ausdehnung noch genauer zu definierenden Übergangszone statt. Die fehlende Reibung am Untergrund führt zu einer raschen Ausdünnung der Eisplatte im Abstrom der Aufsetzlinie und einer Spreizung des Schelfeises aufgrund der schon erwähnten Kräftebilanz an der seewärtigen Berandung. Schmelzprozesse an der Eisfront und der biegamechanische Einfluß der Gezeiten und Meeresströmungen bilden einen begrenzenden Stabilitätsfaktor für die Eisdicke. In Abhängigkeit von der Fließgeschwindigkeit sind daher frei expandierende Schelfeise in ihrer Ausdehnung begrenzt (Van der Veen, 1986). Findet die Expansion eines Schelfeises in einer Bucht statt und erreicht die schwimmende Eisplatte dabei die Berandung, so wirkt diese als stabilisierende Ankerzone.

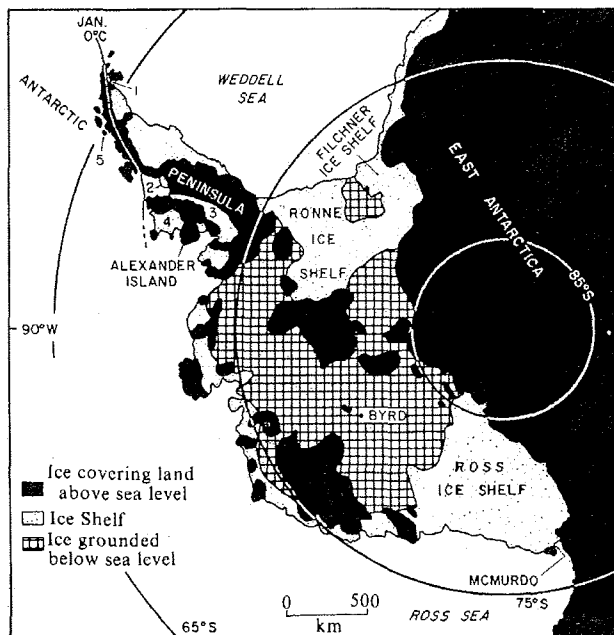


Abbildung 2.3: Basale Niveaus im westantarktischen Eisschild. Nur die schwarzen Flächen erheben sich im eisfreien, isostatisch ausgeglichenen Fall über den Meeresspiegel, während der größte Teil der Westantarktis ohne die Auflast der Eisbedeckung den Boden eines flachen Meeresbeckens bildet (aus Mercer (1978)).

Dieselbe Wirkung der Geschwindigkeitsreduktion, Verdickung im Oberstrom und Stabilisierung der Eisplatte beobachtet man bei Ankerpunkten an der Schelfeisunterseite durch Aufsetzen des Eises auf Untiefen. Es bilden sich sogenannte Eishöcker, oder *ice rumples*. Erreicht das Eis in solchen Bereichen mit Bodenkontakt eine kritische Mächtigkeit, ändert sich das Fließverhalten grundlegend. Das anströmende Eis bewegt sich nicht mehr gebremst über die Untiefe, sondern umfließt diese und es bildet sich eine Eiskuppel, ein sogenanntes *ice rise*, mit einer eigenen Dynamik aus. Insgesamt sind mindestens 44% der antarktischen Küstenlinie (Drewry et al., 1982), nach neueren Analysen sogar 49% (Fox und Cooper, 1994) von Schelfeis begrenzt.

Die großen Schelfeise der Antarktis haben sich ausschließlich in ausgedehnten, lateral durch Festland begrenzten Flachseebecken gebildet, in denen die seitliche Ankopplung die entsprechende Stabilität gewährleistet. In zwei dieser schwimmenden Eisplatten, das Filchner-Ronne-Schelfeis und das Ross-Schelfeis, die einen wesentlichen Teil des westantarktischen Küstenverlaufs darstellen, strömen 60% des gesamten antarktischen Eisabflusses aus dem Kontinent (Suyetova (1966), Abb. 2.1). Das Ross-Schelfeis besitzt mit $507\,700\text{ km}^2$ eine nur geringfügig größere Fläche, die umschlossenen Eiskuppeln mitgerechnet (Fox und Cooper, 1994), während das Filchner-Ronne-Schelfeis durch seine im Mittel höhere Mächtigkeit mit $352\,000\text{ km}^3$ laut Drewry (1982) das volumenmäßig größte Schelfeis der Welt ist (Abb. 2.2). Aller-

dings hat das Filchner-Ronne-Schelfeis nach neueren Auswertungen seit Drewry's Berechnungen etwa 9000 km² an Fläche durch Kalbungsereignisse und Neudefinition der Aufsetzlinie verloren (Fox und Cooper, 1994). Neuere Volumenberechnungen liegen derzeit noch nicht vor. Der Transport der Eismassen aus den Eisschilden in die Schelfeise erfolgt dabei nicht gleichmässig über die Küstenlinie verteilt. Vielmehr wechseln sich Gebiete hoher Eisgeschwindigkeit mit Zonen minimaler Eisbewegung ab. Nur ein geringer Prozentsatz des Abflusses geschieht über passive Ränder geringer Geschwindigkeit, während der weitaus größte Anteil über die schnellfließenden Eisströme in die Schelfeise gelangt (Morgan et al., 1982). Neben dem Massenverlust durch Abkalben großer Eisberge unterliegt die Massenbilanz eines Schelfeises auch den thermischen und strömungsmechanischen Einwirkungen des Ozeans. An der Eisfront und nahe der Aufsetzlinie werden große Schmelzraten an der Eisunterseite vermutet (Thomas, 1979b), während es in den zentralen Bereichen zu Anfrieren unterkühlten Wassers kommen kann (Lewis und Perkin, 1986). Solche marinen Eisschichten wurden unter dem zentralen Ronne-Schelfeis entdeckt (Thyssen, 1988; Engelhardt und Determann, 1987; Oerter et al., 1992).

Eisströme werden nicht wie die Auslaßgletscher von Gebirgen begrenzt, sondern wechseln sich mit den ruhigeren Eisbereichen ab (Paterson, 1994). Eisströme, wie auch Auslaßgletscher, besitzen einen klar definierten Wechsel der Neigung entlang ihrer Fließrichtung, in dessen Umgebung eine im Gegensatz zu den Eisschilden konkave Oberfläche beobachtet wird. Die Antriebsspannung nimmt daher in Fließrichtung ab, während die Oberflächengeschwindigkeit zunimmt (Budd et al., 1984). Die hohen Fließgeschwindigkeiten bei gleichzeitig geringer Oberflächenneigung können nur durch einen mehr oder weniger hohen Anteil von basalem Gleiten an der Bewegung zustande kommen. Der Gleitmechanismus selbst kann dabei unterschiedlich sein. Ist die Unterseite des Eises temperiert, kann ein Schmelzwasserfilm existieren, der die Reibung zwischen Eis und Untergrund reduziert. Unter einigen Eisströmen sind dünne Schichten von Moränenschutt nachgewiesen worden, über die sich das Eis bewegt (Engelhardt et al., 1990). In diesem Fall kann die Bewegung an der Grenzfläche zwischen den Medien stattfinden, es kann aber auch zu einer internen Deformation des Geschiebes kommen (Alley et al., 1987b; MacAyeal, 1989). Wie es letztlich zu den hohen Fließgeschwindigkeiten kommt ist immer noch nicht vollständig geklärt (Van der Veen, 1987). Bisherige Modelle haben allenfalls Teilbereiche der wirkenden physikalischen Prinzipien zugrundegelegt (Bentley, 1987).

Diese unterschiedlichen Bedingungen deuten auf die Vielfalt der Erscheinungsform *Eisstrom* hin. Viele Eisströme haben sich entlang von vorgegebenen Störungszonen entwickelt und füllen heute tiefe Grabenstrukturen (Morgan et al., 1982). Demgegenüber existieren vor allem entlang der Siple-Küste im Drainagebereich des Ross-Schelfeises flachgegründete Eisströme stark fluktuierender Dynamik (Bindschadler et al., 1987; Shabtaie et al., 1988). Diese Eisströme sind durch ihre sehr geringen Bett- und Oberflächenneigungen, sowie zur Mündung hin verschwindenden Antriebsspannungen charakterisiert. Ihre seitliche Abgrenzung fällt in einigen Bereichen nicht mit den Berandungen des flachen Betts zusammen (Bentley, 1987).

Neben dem Eisabfluß in die Schelfeise gelangt auch ein nennenswerter Teil durch Thwaites-Gletscher und Pine-Insel-Gletscher in die Amundsensee (Abb. 2.1). Dieser direkte Abfluß aus den schnell fließenden Gletschern ohne vorgelagerte Schelfeise

wird von einigen Autoren als weiterer Schlüssel für die Stabilität des westantarktischen Eisschildes angesehen (Hughes, 1977; Thomas et al., 1979). Ob sich diese Gletschersysteme momentan im Gleichgewicht befinden, ist nach wie vor unklar. Periodische Kalbungsereignisse und ein scheinbarer Massenüberschuß im Zuflußgebiet des Pine-Island-Gletschers allein lassen noch keine eindeutige Schlußfolgerung zu (Crabtree und Doake, 1982).

Der geringe verbleibende Anteil von knapp 0,8% am südpolaren Eisvolumen setzt sich zusammen aus kleinen isolierten Eiskappen, Gebirgsgletschern und Schelfeisen der antarktischen Halbinsel, der dritten großen Einheit der Antarktis. Diese sichelförmige Gebirgskette erstreckt sich als Fortsetzung der Westantarktis in Richtung des südamerikanischen Kontinents bis weit über den Polarkreis hinaus und ist durch ein sehr maritimes Klima geprägt. Dynamisch ist die antarktische Halbinsel weitgehend vom westantarktischen Eisschild getrennt, wenngleich ein Teil des Massenabflusses in das Ronne-Schelfeis eingeleitet wird (Huybrechts, 1992).

2.2 Die Stabilitätsdiskussion im Wandel der Modelle

Die Beurteilung der Stabilität des Eisschildes ist eng mit den klimatischen Verhältnissen des südpolaren Raumes verbunden. Neben einer kurzen Darstellung der rezenten klimatischen Bedingungen soll die Verflechtung zwischen Klima, Massenbilanz und potentieller Reaktion des Eisschildes beleuchtet werden.

Das heutige Klima der Antarktis ist durch niedrige Jahresmitteltemperaturen und geringe Niederschläge geprägt. Mit wachsender Entfernung von der Küste und damit im allgemeinen größerer Höhe über NN sinken Temperaturen und Schneefall auf minimale Werte. Der innere Bereich der Ostantarktis kann in Bezug auf die Akkumulation als Wüste bezeichnet werden. Durch den nicht unterbrochenen zirkumpolaren Ozean herrschen in der Antarktis verhältnismässig stabile Großwetterlagen. In den nahen Küstenregionen dominiert ganzjährig ein System von Tiefdruckgebieten mit westlichen Winden in der mittleren und oberen Troposphäre. In der Grenzschicht zur Oberfläche herrschen östliche, von der Topographie beeinflusste Winde vor. Im Innern des Kontinents existiert ein zentralkontinentales Hoch (Schwerdtfeger, 1984). Dieses stark zonal orientierte System führt zu einer gewissen klimatischen Isolierung der Antarktis. Die hohe Rückstrahlung der Schneeoberfläche und die, durch die polare Lage niedrigen Sonnenhöhen erzeugen eine starke Temperaturinversion über dem Kontinent. Infolge der zunehmenden Höhe in Richtung des kontinentalen Zentrums wird eine beinahe radiale Temperaturverteilung beobachtet, wie sie in Abb. 2.4 dargestellt ist.

Auf allen Seiten des antarktischen Festlandes müssen die feuchtigkeitsbeladenen Luftmassen in große Höhen aufsteigen, um in die Zentralantarktis zu gelangen. Während des Aufstiegs sinkt mit der Temperatur auch die Aufnahmekapazität für Wasserdampf in der Luft und es tritt typischer Steigungsniederschlag auf. Oberhalb der kalten und damit trockenen bodennahen Schichten existiert im allgemeinen ein bis zu 1500 m dickes, deutlich wärmeres Luftpaket mit entsprechend höherem Wasserdampfgehalt (Schwerdtfeger, 1984). Die Akkumulationsverteilung über dem gesamten Kontinent zeigt Abb. 2.5 (Giovinetto et al., 1990). Deutlich sind die höheren

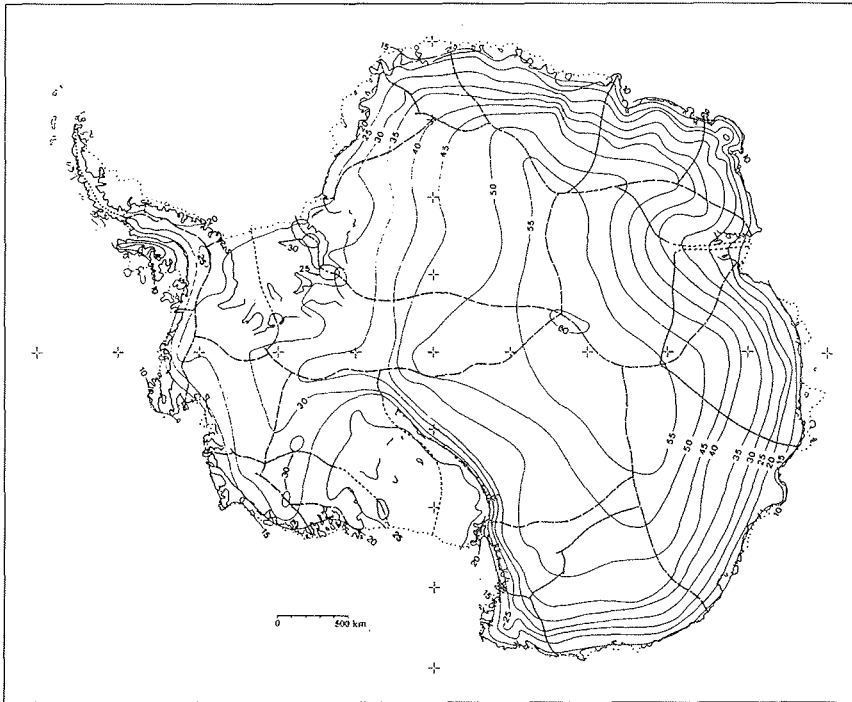


Abbildung 2.4: Verteilung der mittleren Jahrestemperatur an der Oberfläche in der Antarktis. Die Isothermen sind in Grad unter 0 °C angegeben (nach Giovinetto et al. (1990)).

Akkumulationswerte in den Küstenregionen zu sehen, während die Werte in Richtung Inlandeis schnell abnehmen.

Nach Giovinetto und Bentley (1985) liegen die mittleren jährlichen Akkumulationsraten für den gegründeten Eisschild bei 124 kg m^{-2} , während die Werte auf den Schelfeisen 263 kg m^{-2} betragen. In der zentralen Ostantarktis resultiert ein wesentlicher Anteil der Akkumulation aus dem Ausfrieren der Feuchte aus den höheren Luftmassen, wenn diese in Kontakt mit der Inversionsschicht geraten. Dagegen sind die Niederschläge an der antarktischen Halbinsel deutlich von den orographischen Bedingungen geprägt (Schwerdtfeger, 1984). Windverfrachtung spielt für die lokale Schneumlagerung eine Rolle, hat aber nur einen geringen Einfluß auf die Massenbilanz (Schwerdtfeger, 1970). Verdunstung wie auch Sublimation tragen nicht signifikant zur antarktischen Massenbilanz bei. Bei den gegenwärtig vorherrschenden Temperaturen tritt Oberflächenschmelzen im Randbereich des Kontinents auf, der Beitrag zum tatsächlichen Massenverlust ist allerdings ebenfalls gering.

Für die Westantarktis gelten die allgemeinen Aussagen prinzipiell ebenfalls. Die Temperaturen sind durch die geringere durchschnittliche Höhe und den stärkeren maritimen Einfluß nicht so tief. Speziell im Einzugsbereich des Ross-Schelfeises treten jedoch sehr niedrige Akkumulationsraten auf. Giovinetto und Bentley (1985)

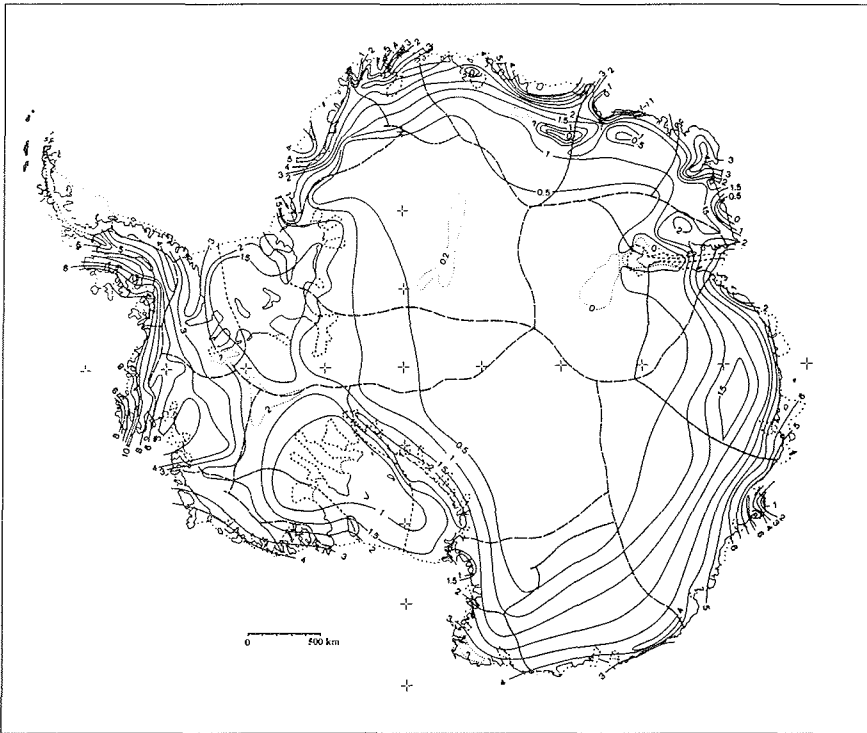


Abbildung 2.5: Verteilung der mittleren Akkumulation an der Oberfläche des antarktischen Kontinents. Die Zahlenangaben an den Isoplethen sind in Einheiten von $100 \text{ kg m}^{-2} \text{ a}^{-1}$ angegeben. Die gestrichelten Linien entsprechen den Haupteisscheiden (nach Giovanetto et al. (1990)).

führen dies, bei den geringen Seehöhen in diesem Gebiet und der weiten Entfernung vom Ozean, auf einen Kontinentaleffekt zurück. Am nördlichen Kontinentalrand der Westantarktis treten dagegen, bedingt durch orographische Mechanismen, verhältnismäßig große Niederschlagsraten auf. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, hat die klimatisch scheinbar relevante $-5 \text{ }^\circ\text{C}$ - Jahresisotherme in den letzten Jahrzehnten eine Südwanderung vollzogen. Der Bereich des westantarktischen Eisschildes wurde jedoch noch nicht erreicht.

Die geschilderten morphologischen, geographischen wie auch die klimatischen Voraussetzungen weisen dem westantarktischen Eisschild eine dominierende Rolle innerhalb der Kryosphäre in Bezug auf die Verknüpfung mit den globalen klimatischen Verhältnissen zu. Der Eisschild der Ostantarktis ist durch den engen Schelfsaum, der den Kontinent umgibt, in seiner Ausdehnung beschränkt, während das Eis der Westantarktis in den flachen Schelfbereichen von Weddellmeer, Amundsensee und Rossmeer sehr flexibel reagieren kann. Eine Zunahme der Jahresmitteltemperaturen wirkt sich zuerst auf die wärmere und niedrigere Westantarktis aus. Bei den sehr geringen mittleren Temperaturen selbst im Randbereich der Ostantarktis führt eine Temperaturerhöhung durch den größeren Feuchtegehalt der Luftmassen in erster Li-

nie zu einem Anwachsen der Akkumulationsraten. Großflächiges Oberflächenschmelzen und damit ein Rückzug des Eisschildes könnte erst bei einem enormen Anstieg der Temperaturen in einer Größenordnung von 10 °C eine nennenswerte Rolle spielen (Huybrechts, 1992). Eine solche Erhöhung würde wiederum den westantarktischen Eiskörper schon sehr viel früher beeinträchtigen.

Die Massenbilanz in der Westantarktis ist außerdem nicht nur von potentiell Oberflächenschmelzen oder erhöhten Kalbungsraten der umgebenden Schelfeise beeinflusst. Eine wichtige Rolle spielt auch die ozeanische Zirkulation unter den Schelfeisen und die damit verbundenen, teilweise erheblichen Schmelzraten an ihrer Unterseite (Determann et al., 1990 (1991); Grosfeld et al., 1992 (1994)). Aus diesem Grund können Massenbilanzuntersuchungen an der Schelfeisfront nur bedingt für die Beurteilung des Massenverlustes des Eisschildes herangezogen werden. Das gekoppelte System der Temperaturabhängigkeit von Niederschlag, Schmelzen und auch des Fließverhaltens von Eis, zusammen mit dem Einfluß der Gesamteismenge auf den Meeresspiegel und damit wieder auf die maximal für die Ausdehnung des Eisschildes verfügbare Fläche ist sehr kompliziert. Dieses gesamt-klimatische Konzept ist nicht Gegenstand dieser Arbeit, in der die grundlegenden mechanischen Prinzipien in der Übergangszone untersucht werden sollen. Es wird für detailliertere Besprechungen auf die reichhaltige Literatur verwiesen: Thomas und Bentley (1978), Stuiver et al. (1981), Denton und Hughes (1981), Oerlemans und Van der Veen (1984), Broccoli und Manabe (1987), Paterson (1994), um nur einige zu nennen.

Die Sensibilität auf Schwankungen der Temperatur, der Akkumulations- und Ablationsraten wie auch des Meeresspiegels haben zu einer intensiven Diskussion um das Stabilitätsverhalten des westantarktischen Eisschildes geführt.

Ausschlaggebend für dieses rege Interesse ist die schon mehrfach erwähnte Gründung des Eisschildes auf einem tiefgelegenen, in großen Bereichen sehr flachen, schüsselförmigen Untergrund. Allein diese Tatsache weist schon für geringe Schwankungen der Eisdicke oder des Meeresspiegels auf eine hohe Mobilität der Aufsetzlinie hin. Verschiebt sich diese Linie, ändert sich die Fläche aufliegenden Eises und damit die Dynamik des Eisschildes. Die veränderte Dynamik beeinflusst den Massentransport und damit wieder die Eisdicke in der Übergangszone zum Schelfeis. Für den Fall einer allgemeinen Erwärmung würde ein frei expandierendes Schelfeis durch verstärkte Kalbungs- und basale Schmelzraten sukzessive ausdünnen. Die verringerte Mächtigkeit im Aufsetzbereich führt zu einem steileren Oberflächenprofil und damit einer Zunahme des Massentransports aus dem Eisschild. Damit verringert sich dessen Eisdicke und die Aufsetzlinie wandert landeinwärts. Steigt der Untergrund in dieser Richtung an, wie es für kontinentale Eisschilde typisch ist, so stellt sich ein neues Gleichgewicht ein. Dieses Verhalten ist in der Abbildung 2.6 oben dargestellt. In der Westantarktis sinkt in vielen Bereichen der Boden Richtung Zentrum und die Aufsetzlinie gerät in tieferes Wasser (Abb. 2.6, unten). Die Ausdünnung eines ungebremsten Schelfeises durch interne Kriechprozesse ist proportional zur vierten Potenz der Eisdicke (Weertman, 1957), was zu einem weiteren Rückzug der Aufsetzlinie führt und im Extremfall in einem vollständigen Kollaps des Eisschildes endet. Dieser Migration wirkt der Nachschub von Eis aus dem Inland entgegen. Welcher Prozeß dabei dominiert, ist nicht ganz geklärt (Thomas et al., 1979; Van der Veen, 1986). Dieses Szenario gilt eingeschränkt nur für ein ungebremstes, frei ex-

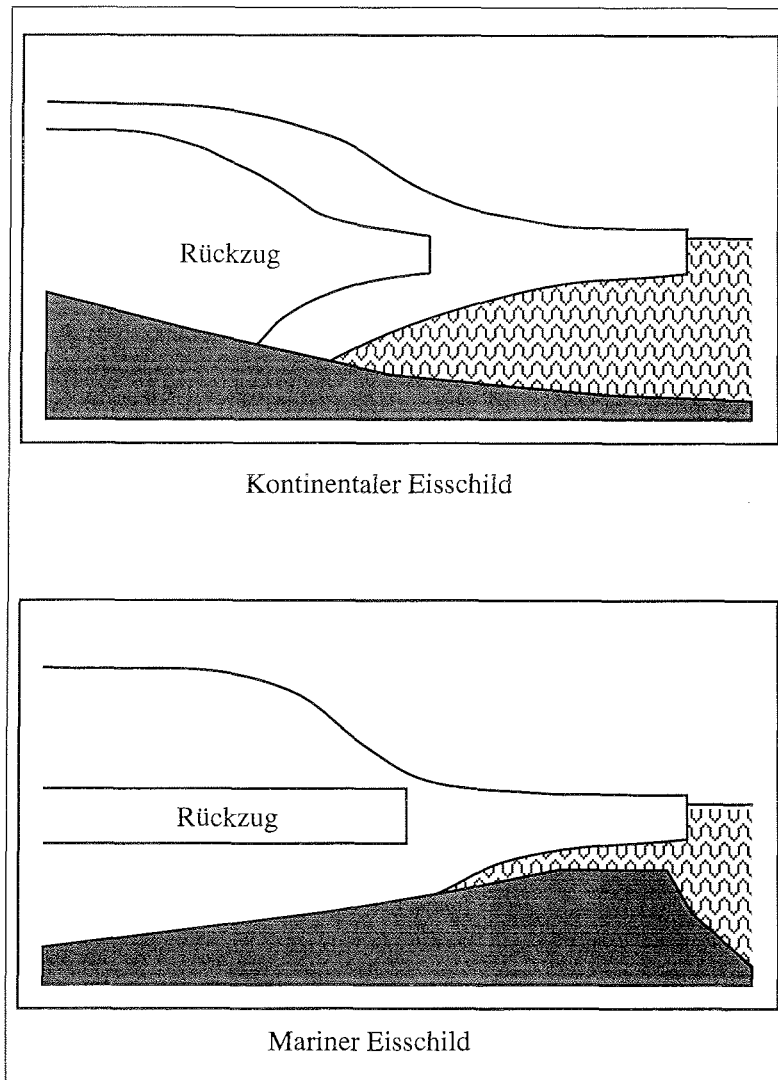


Abbildung 2.6: Modellvorstellung eines kontinentalen (oben), bzw. marinen (unten) Eisschildes. Der Untergrund steigt für den kontinentalen Eisschild zum Zentrum hin an. Auch bei einem Rückgang der Aufsetzlinie bleibt der Eisschild stabil, während für einen marinen Eisschild der Eiskörper soweit ausdünnt, bis er auf dem Ozean aufschwimmt.

pandierendes Schelfeis, wurde aber als Gedankenexperiment für die Situation in der Westantarktis oft herangezogen.

Der mögliche Zusammenhang zwischen einem um 5 m höheren Meeresspiegel im letzten Interglazial, das vor etwa 120 000 Jahren endete, und einer gleichgroßen potentiellen Zunahme durch das Verschwinden des westantarktischen Eisschildes hat schon in den 60er Jahren die glaziologische Welt beschäftigt (Mercer, 1968). Leider können geringere Gletscherstände als die rezenten nicht direkt nachgewiesen werden. Hinweise auf die Ausdehnung des Eiskörpers in der Westantarktis bis an den Rand des Ross-Schelfs während der Weichseleiszeit belegen aber eine lebhaft glaziale Fluktuation in dieser Region (Denton und Hughes, 1981). Allerdings sind inzwischen auch Modelle für die Reaktion des grönländischen Eisschildes während des Eem Interglazials entwickelt worden, die mit einem Anstieg von 2 bis 3 m eine ähnliche Änderung des Meeresspiegels aufweisen (Huybrechts et al., 1991). Damit entfällt die Notwendigkeit eines vollständigen Kollapses des westantarktischen Eisschildes in dieser letzten Warmzeit.

Aus den bis dahin bekannten Daten aus Eis- und Sedimentkernen über Moränenstände erarbeitete Hughes (1973) die Vereisungsgeschichte der Antarktis während der letzten sieben Millionen Jahre. Die Rekonstruktion ergab für das Eis der Westantarktis eine allgemeine Rückzugstendenz, unterbrochen von gelegentlichen, sukzessive geringeren Vorstößen. Aus dem Vergleich von Gleichgewichtsprofilen mit gemessenen Oberflächenprofilen in der Westantarktis, zusammen mit Beobachtungen über sinkende Eisoberflächen im zentralen Marie Byrd Land, schließt Hughes auf einen gegenwärtig noch andauernden Rückgang des westantarktischen Eisschildes, der durch den marinen Charakter des Eisschildes zu einer Auflösung führen wird. Weertman's Analyse (Weertman, 1974) der Stabilität eines marinen Eisschildes ergab, daß für die Begrenzung durch ein frei schwimmendes Schelfeis ab einer bestimmten Grenztiefe des Untergrundes nur ein stabiler Zustand existiert, bei dem sich der Eisschild bis an den Rand des kontinentalen Schelfs erstreckt. Reicht die Akkumulation nicht aus, diese Form zu erhalten, wandert die Aufsetzlinie sukzessive in Richtung Zentrum, bis der Eisschild vollständig aufschwimmt und sich damit auflöst. Er weist allerdings ausdrücklich darauf hin, daß aus den getroffenen Abschätzungen und den vorliegenden Daten keine endgültige Aussage über die derzeitige Stabilität des westantarktischen Eisschildes getroffen werden kann. In den folgenden Jahren deuteten die Arbeiten verstärkt auf eine Bestätigung der Instabilitätstheorie hin (Hughes, 1975; Mercer, 1978; Thomas, 1979a, und andere). Als Folge der globalen Erwärmung wurden sogar Auflösungszeiten von weniger als 100 Jahren als möglich angesehen.

Thomas and Bentley (1978) entwickelten ein Modell für die quantitative Bestimmung der Bildung, Ausdehnung und des Zerfalls eines marinen Eisschildes. Getriggert durch einen sinkenden Meeresspiegel und einer Anhebung des Meeresbodens simulierten sie die Bildung eines spätpleistozänen Ross-Eisschildes, dessen maximale Ausdehnung mit einer Folge paralleler Schwellen am Rand des kontinentalen Schelfs zusammenfällt. Der folgende Anstieg des Meeresniveaus vom glazialen Minimum auf heutige Werte erlaubte die Berechnung von Rückzugsraten des Eisschildes für verschiedene verwendete Eisstromsysteme. Nach einem anfänglich langsamen Eisverlust während der ersten 1500 bis 2550 Jahre nahm der Rückzug

sehr schnell auf Werte von 0,5 bis 25 km a^{-1} zu. 7000 Jahre vor heute war für alle Szenarien, die eine Existenz von Schelfeisen erlauben, das resultierende Schelfeis nahezu identisch mit der rezenten Ausdehnung des Ross-Schelfeises. Die schelfeisfreien Versuche resultierten in einer Auflösung des Eisschildes vor 9000 Jahren. Daraus schließen die Autoren auf einen schnellen Zerfall des heutigen Eisschildes, falls infolge klimatischer Veränderungen die Schelfeise der Westantarktis verschwinden würden. Nichtlineare, positive Rückkopplungseffekte zwischen Untergrund- und Oberflächenneigung, Migration der Aufsetzlinie, Akkumulationsraten, Meeresspiegelvariationen und isostatische Vertikalbewegungen ermöglichen schon bei geringen Störungen in einem dieser Faktoren die völlige Auflösung oder aber das Anwachsen des Eisschildes bis an den Kontinentalrand. Ein entscheidender Stabilisierungsfaktor ist dabei die seitliche oder punktuell basale Verankerung der Schelfeise. Da ungewiß ist, ob sich der westantarktische Eisschild derzeit im Gleichgewicht befindet, können Effekte wie die Zunahme der Eisdicke in Bereichen des Ross-Schelfeises, zusammen mit der Beobachtung des Einsinkens im Gipfelbereich des Eisschildes, auch auf ein konsolidierendes Verhalten hindeuten (Thomas et al., 1979).

Aus einem einfachen Modell für die Migration der Aufsetzlinie eines marinen Eisschildes von Thomas (1977) wurden in den folgenden Jahren mehrere Modelle zur Dynamik eines marinen Eisschildes entwickelt. Im allgemeinen stimmten die Ergebnisse darin überein, daß der westantarktische Eisschild potentiell instabil ist (Thomas, 1979a; Stuiver et al., 1981; Bentley, 1984; Lingle, 1984). Ein solch dramatischer Zerfall wie von Mercer (1978) vorhergesagt, wurde allerdings nicht bestätigt. Aus den vielfältigen Arbeiten kristallisierte sich jedoch eine Reihe von entscheidenden Aspekten zur Stabilität des Eisschildes heraus:

- Der westantarktische Eisschild wird zum größten Teil in die umgebenden Schelfeise entwässert. Ein nennenswerter Anteil am Eisvolumen fließt jedoch über die zwei nördlichen Eisströme Thwaites-Gletscher und Pine-Island-Gletscher direkt in die Amundsensee.
- Die Schelfeise der Westantarktis sind durch Scherdeformation an ihren Rändern, Eishöckern und lokalen Eiskuppeln in ihrer Ausdehnung behindert und üben damit eine rückwirkende Kraft auf den Eisschild aus. Die Eisdicke an der Aufsetzlinie ist somit wesentlich größer, als man es für frei expandierende Schelfeise berechnet, die Kriechnrate im Verhältnis zur Eisdicke wesentlich verringert.
- Die Mobilität der Aufsetzlinie ist nicht nur von der Untergrundneigung, dem relativen Meeresspiegel und der lokalen Massenbilanz, sondern auch von den genannten Ankerpunkten eines Schelfeises abhängig.
- Der erhöhte Abfluß aus dem Eisschild in ein ausdünnendes Schelfeis wirkt dieser Mächtigkeitsreduktion entgegen und stabilisiert das System. Eine Verteilung der Oberfläche im Einzugsgebiet führt wiederum zu einem Anwachsen der Antriebsspannung und damit zu einem beschleunigten Massenabfluß.
- Die Reaktionszeiten für marine Eisschilde auf klimatische Änderungen sind durch die Sensibilität der Übergangszone um bis zu einer Größenordnung kleiner als für kontinentale Eisschilde.

- Die Auswirkung des Rückgangs der Aufsetzlinie hängt von einem möglichen Gleichgewicht zwischen Ausdünnung und Akkumulation im Schelfeisbereich und der Advektion von Material aus dem dickeren Eis im Oberstrom ab.
- Die Existenz von Eisströmen beeinflusst die Dynamik in einem hohen Maße. Diese von verhältnismäßig stagnantem Eis umgebenen schnellfließenden Eismassen sind für den Hauptteil des Massenabtransports verantwortlich. Ihr Verhalten hängt stark von der Wechselwirkung mit eventuell vorgelagerten Schelfeisen und den Untergrundbedingungen ab.
- Die Migration der Aufsetzlinie wird von den Rückkopplungsmechanismen zwischen Schelfeis und Eisstrom verzögert. Diese Dämpfung fehlt für den Abfluß in die Amundsensee und macht die Eisströme dieses Gebietes zu einem möglichen Auslöser des Eisschildzerfalls. In jedem Fall hängt der Vorstoß oder Rückzug der Aufsetzlinie stark von der Untergrundtopographie ab. Um einen Rückzug dieser Eisströme in den Eisschild zu verhindern, müssen im Untergrund Felswälle einer kritischen Höhe quer zur Fließrichtung existieren (400-550 m unter NN für den Thwaites-Gletscher und 520-610 m unter NN für den Pine-Island-Gletscher), an denen sich ein Gleichgewicht zwischen Massenfluß und Ausdünnung einstellen kann.
- Die Existenz solcher Felswälle kann auch in anderen Bereichen zu einer Stabilität des Eisschildes führen.

Diese charakteristischen Zusammenhänge sind auch heute noch weitgehend gültig. Weitere Modellexperimente und genauere Analysen der einwirkenden Mechanismen haben allerdings die Signifikanz einzelner Prozesse relativiert.

Vor allem die kurze Zeitspanne für einen Zerfall des Eisschildes wird auch für drastische Umweltveränderungen nicht mehr als realistisch angesehen (Bentley, 1984; Van der Veen, 1985; Budd et al., 1987; MacAyeal, 1992). Van der Veen (1985) folgerte aus seinen Studien zur Übergangszone, daß die bis dahin verwendeten Modelle eine interne Instabilität aufweisen und damit nicht in der Lage sind, ein stabiles marines Eisschild zu simulieren.

Der ursprüngliche Ansatz ging davon aus, daß innerhalb des Schelfeises die Deformation vollständig durch deviatorische Normalspannungen bestimmt wird, während unmittelbar landeinwärts der Aufsetzlinie die Eisbewegung durch basale Scherspannungen kontrolliert wird. Dieser abrupte Wechsel des Antriebsregimes führte zu einer Diskontinuität in den Kriechraten und Geschwindigkeiten. Wird diese Diskontinuität durch eine Übergangszone ersetzt, ist die Mobilität der Aufsetzlinie stark reduziert und selbst unter Abwesenheit angrenzender Schelfeise kann ein stabiler mariner Eisschild existieren. MacAyeal (1982) fand mit seinem Modellansatz für den westantarktischen Eisschild einen maximalen, durch Abschmelzen bedingten Meeresspiegelanstieg von einem Meter pro Jahrhundert und eine vollständige Auflösung (frei schwimmendes Eisvolumen) nach 2000 Jahren.

Hindmarsh (1993b) postuliert sogar eine völlige Entkopplung von Eisschild und Schelfeis. Nach seinen Folgerungen ist die Entwicklung und der Stabilitätszustand des Eisschildes völlig unabhängig von der Existenz eines begrenzenden Schelfeises. Allerdings konzentriert sich in dieser Analyse die Stabilitätsfrage auf den Übergang

von einem scherungsdominierten Eisstrom zu einem hauptsächlich gleitenden Eisstrom. Seine Folgerung ist, daß marine Eisschilde zur Stabilisierung Eisströme hervorbringen (Hindmarsh, 1993b).

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß nach wie vor die Übergangszone vom Eisschild zum Schelfeis die zentrale Region des Interesses bleibt. Dabei spielen jedoch die Eisströme augenscheinlich eine außerordentlich wichtige Rolle. Die Problematik der Übergangszone erfährt dadurch allerdings keine Abschwächung, sondern wird nur regional verlagert. Die entscheidenden zu lösenden Probleme bleiben der Wechsel des Bewegungsregimes von Scherung zu Spreizung, die basalen Prozesse in den Eisströmen, die diesen Übergang im noch gegründeten Eis ermöglichen und die aus diesen Erkenntnissen folgende Einschätzung des stabilisierenden Effekts vorgelagerter Schelfeise.

Kapitel 3

Aufsetzlinie - Übergangszone, eine Nahtstelle entwickelt sich

Auch wenn in den letzten Jahren verschiedene Autoren darauf hingewiesen haben, daß die Aufsetzlinie keinen außerordentlichen Ort innerhalb des gekoppelten Systems darstellt (Van der Veen, 1985; Hindmarsh, 1993b), bleibt die Frage der quantitativen Signifikanz weiterhin bestehen. Wie schon im vorhergehenden Kapitel angesprochen, geht es im wesentlichen um die Auswirkungen der Änderung der basalen Randbedingung. In weiten Bereichen des aufliegenden Eises kann von einer *no slip*-Randbedingung zwischen Untergrund und Eis ausgegangen werden. Zwischen Schelfeis und Wasser hingegen können keine scherenden Kräfte übertragen werden, die das Gleiten der Eisplatte verhindern würden. Die Ausdehnung des Wechsels vom einen Regime zum anderen kann, wie ebenfalls schon besprochen, sehr unterschiedlich sein. In vielen Randbereichen, in denen sehr niedrige Fließgeschwindigkeiten gemessen werden, wird sich diese Konversion innerhalb weniger Kilometer, vielleicht sogar auf einer noch kürzeren Distanz, ereignen. In den schnellfließenden Eisströmen dagegen geht der Übergang sehr viel langsamer vor sich.

Das mechanische Verhalten von vollständig aufliegendem oder frei schwimmendem Eis ist weitgehend verstanden. Für gegründetes, am Boden festgefrorenes Eis ist das Normalspannungsfeld nahezu isotrop und die deviatorischen Normalspannungen sind gegenüber den Scherspannungen vernachlässigbar klein. Mit der Annahme von hydrostatischen Verhältnissen im gesamten Eiskörper folgen die Scherspannungen aus Newtons zweitem Theorem. Die Antriebsspannung muß durch die Verzögerungsspannung am Boden ausgeglichen werden. Mit Hilfe der rheologischen Verknüpfung von Spannung und Deformationsrate durch das Fließgesetz kann die Geschwindigkeit aus der Integration der Scherdeformationsrate berechnet werden (Muszynski und Birchfield, 1987). Im Schelfeis kann andererseits die vertikale Scherspannung vernachlässigt werden und die Deformation resultiert aus der Längsdehnung des Eises. Die longitudinalen deviatorischen Spannungen bestimmen das Geschwindigkeitsfeld, das aufgrund fehlender Scherung vertikal konstant ist (Weertman, 1957; Thomas, 1973). Für ein seitlich eingegrenztes Schelfeis müssen die Scherspannungen an den seitlichen Rändern mit berücksichtigt werden, siehe z.B. Van der Veen (1986).

Viele Theorien haben sich inzwischen mit der allmählichen Mobilisierung in der Grenzfläche zum Untergrund beschäftigt. Die Problematik in diesen Modellvorstellungen liegt in den fehlenden Informationen über die tatsächlichen Bedingungen in

dieser unzugänglichen Grenzschicht. Da weder die morphologischen noch die hydrologischen Eigenschaften in ausreichender, flächenhafter Auflösung bekannt sind, bleibt im Grunde nur die Verknüpfung physikalischer Grundprinzipien mit statistischen Annahmen. Damit können einerseits prinzipielle Mechanismen erkannt, andererseits aus Felddaten gewonnene Zustände durch entsprechende Anpassung der Modellparameter simuliert werden. Die Beurteilung dieser basalen Mobilisierung hängt eng mit den Vorgängen innerhalb des Eiskörpers zusammen. Wie reagiert das Eis auf eine verminderte Scherspannung an der Unterseite? Welche zusätzlichen Kräfte auf den Boden resultieren wiederum aus dieser Reaktion? Wie beeinflusst die rückwirkende Kraft eines berandeten Schelfeises den Fluß in dieser Zone? Das komplexe, nichtlineare Fließverhalten von Eis verhindert eindeutige Aussagen auf dem analytischen Weg.

3.1 Massenbilanz und Kontinuität vom Eisschild zum Schelfeis

In einer Zeit, in der numerische Analysen aufgrund der erst am Anfang stehenden digitalen Datenverarbeitung nur in geringem Umfang möglich waren, hat Weertman (1974) einige Grundprinzipien mittels stark vereinfachter physikalischer Betrachtungen entlang einer Fließlinie beschrieben. Auch bei einem plötzlichen Übergang von *no slip* zu *free slip* an der Unterseite kann in der Eisdicke kein Sprung existieren. Ebenso verschwindet die horizontale deviatorische Normalspannung von der Seeseite kommend nicht unmittelbar an der Aufsetzlinie. Daher muß die Antriebsspannung im Randbereich von ihrem Verlauf für die theoretische Oberflächenform eines Eisschildes abweichen und geringere Werte annehmen. Nur so kann das Kräftegleichgewicht in der Übergangszone aufrecht erhalten werden. Die Ausdehnung dieser Übergangszone wie auch die dort herrschenden Deformationsraten wurden jedoch nur grob aus den Stokesschen Gleichungen abgeschätzt. Die Grundaussage der Arbeit von Weertman war, daß marine Eisschilde auf einem vor der Bildung des Eisschildes ebenen Meeresboden in sich instabil sind. Allerdings wurde weder die Existenz von Eisströmen noch der Effekt berandeter Schelfeise in die Analyse mit einbezogen.

Aus einer früheren Arbeit von Thomas (1977) entwickelten Thomas und Bentley (1978) ein Modell zur Eisschildentwicklung in der Westantarktis seit der letzten Eiszeit. Grundlage war dabei die Kontinuitätsgleichung für eine ausgeglichene Massenbilanz zwischen Eisschild und Schelfeis. Kommt es zu einer Ausdünnung des Schelfeises oder einem Anstieg des Meeresspiegels, so wandert die Aufsetzlinie Richtung Zentrum des Eisschildes. Aus der lateralen Ausdehnung des gegründeten Eiskörpers berechneten sie zusammen mit der Akkumulation über dem Eisschild und der Eisdicke am Übergang zum Schelfeis eine parabolische Oberflächenform entlang des betrachteten Profils. Kommt es zu einer lokalen Veränderung der Aufsetzlinie, reagiert der Eisschild spontan mit der Ausbildung eines neuen parabolischen Oberflächenprofils. Die Ausdünnungsrate wurde unter der Annahme von Eisstromverhältnissen mit reinem basalen Gleiten ohne Scherungsanteil nur an der Position der Aufsetzlinie berechnet. Aus der geringeren Eisschildfläche folgt eine Reduktion der Gesamtakkumulation und damit ein verringerter Masseneintrag in das Schelfeis. Dieser muß mit den Transportraten im Schelfeis im Gleichgewicht sein. Durch iterative Anpassung

des Eisabflusses aus dem Eisschild an die Schelfeisdynamik kann die Migrationsrate der Aufsetzlinie berechnet werden. Das Modell ist damit systembedingt instabil, sobald eine Triggerung, wie etwa ein Meeresspiegelanstieg, den Zyklus startet. Mit dem Rückgang der Aufsetzlinie schwimmt dickeres Eis auf und die Ausdünnungsrate steigt an ($H\dot{\epsilon}_{zz} \sim H^4$). Damit sinkt die Aufsetzlinie noch tiefer und die Ausdünnungsrate nimmt weiter zu. Positive Rückkopplungsmechanismen, wie etwa der erhöhte Massentransport aus dem Inland durch größer werdende Oberflächenneigungen im Randbereich oder die tatsächlich sehr viel längeren Reaktionszeiten von Eisschilden (Alley und Whillans, 1984) wurden nicht berücksichtigt.

3.2 Die Einführung deviatorischer Longitudinalspannungen

Mit Hilfe eines mathematischen Modells für planares Fließen in einer vertikalen Ebene haben Shoemaker und Morland (1984) Aussagen über die Einflüsse von deviatorischen Longitudinalspannungen auf das Fließverhalten von gegründeten Eismassen abgeleitet. Das Modell unterzieht vertikal integrierte deviatorische Longitudinalspannungen einer Größenabschätzung und vergleicht diese mit den auftretenden Scherspannungen. Für aufliegende Eiskörper nicht allzugroßer Neigung ist nach ihren Schlußfolgerungen in einer Entfernung von Eisscheiden und Randbereichen, die ein mehrfaches der Eisdicke beträgt, der Einfluß der Longitudinalspannungen auf die Fließbewegung zu vernachlässigen. Für Eisscheiden und Randbereiche, wie auch Übergangszonen zu Schelfeis dagegen, können diese Spannungen nicht vernachlässigt werden.

Ein erstes numerisches Eisdynamikmodell, das eine Übergangszone endlicher Ausdehnung implementiert hatte, stellte Van der Veen (1985) vor. Das Modell wurde nicht auf ein spezifisches Problem aus Feldmessungen angewandt, sondern simulierte einen vollständigen glazialen Zyklus, Entstehung und potentiellen Zerfall eines hypothetischen Eisschildes.

Die Grundlage bildet ein eindimensionales, vertikal integriertes Modell längs einer Fließlinie von Oerlemans (Oerlemans, 1981). Mit der Aufteilung in einen Deformations- und einen Gleitanteil der Geschwindigkeit kann die durch interne Deformation hervorgerufene Geschwindigkeit aus den Stokesschen Gleichungen und dem Fließgesetz unter der Annahme hergeleitet werden, daß eine vertikal gemittelte deviatorische Longitudinalspannung verwendet wird. Am Ort der Aufsetzlinie ist es möglich, diese Spannung aus den Schelfeisgleichungen zu berechnen.

Van der Veen parametrisiert den Einfluß der deviatorischen Longitudinalspannung durch eine lineare Verminderung des berechneten Wertes am Aufsetzpunkt bis zu Null am Ende der definierten Übergangszone. Der verzögernden Kraftkomponente eines seitlich eingespannten oder basal gebremsten Schelfeises wird durch die Einführung einer Rückstauspannung Rechnung getragen. Damit ist es für die Analyse der Übergangszone ausreichend, das Schelfeis an nur einem Gitterpunkt zu berechnen.

In Abhängigkeit von der vorgegebenen Länge der Übergangszone wurden mit diesem Modell Eisschildprofile auf einem sich isostatisch ausgleichenden Untergrund berech-

net. Die Resultate bestätigen, daß die Existenz einer Übergangszone den Eisschild gegenüber Massenbilanzschwankungen im Schelfeis sensibilisieren. Die eingeführte Rückstauspannung hat einen großen Einfluß auf das Eisschildprofil. Versuche mit einem plötzlichen Anstieg des Meeresspiegels um 50 Meter (Abb. 3.1) zeigten zwar einen Rückgang des Aufsetzpunktes und eine gedämpft ins Inland fortschreitende Ausdünnungswelle, aber keine vollständige Auflösung des Eisschildes.

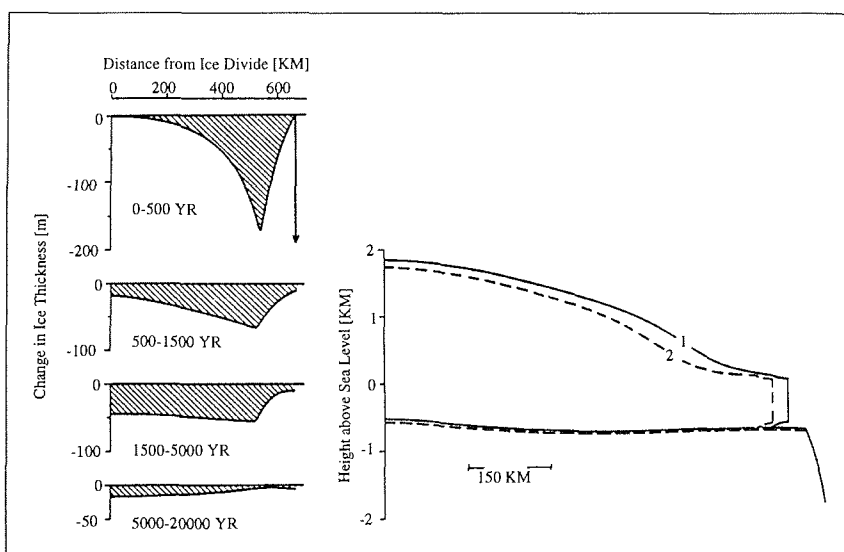


Abbildung 3.1: Reaktion des Modelleisschildes in Van der Veen (1985) auf einen plötzlichen Anstieg des Meeresspiegels um 50 m. Links ist die Eisdickenänderung in den angegebenen Zeitintervallen nach dem Anstieg aufgetragen. In der rechten Zeichnung entspricht die Kurve 1 dem ursprünglichen Profil, Kurve 2 dem neuen Gleichgewichtsprofil.

Die Berücksichtigung der deviatorischen Longitudinalspannung bei der Berechnung der Fließgeschwindigkeiten stabilisiert somit die Eisdynamik gegenüber dem Modell von Thomas (1977) selbst für die einfache angewandte lineare Parametrisierung. Das eindimensionale Modell kann allerdings keine kleinskaligen Effekte innerhalb der Übergangszone auflösen und ist damit auf großräumige Massenbilanzuntersuchungen beschränkt, ohne die Vorgänge in der Übergangszone berücksichtigen zu können.

In einem einfachen, zweidimensionalen Modell minimaler Eisdickenänderung zeigte Herterich (1987) den Einfluß basalen Gleitens auf die Ausdehnung der Übergangszone. Die laterale Erstreckung ist dabei nicht vorgegeben, sondern ein Resultat der Berechnungen. Prognostische Versuche wurden mit dem Modell nicht durchgeführt. Durch die geringen Eisdickengradienten längs des gesamten Profils ergaben sich vereinfachte Randbedingungen für Ober- und Unterseite, welche die Eigenschaften der nichtlinearen Gleichungen für die Geschwindigkeiten vereinfacht haben. Die Gültig-

keit dieser Annahmen ist fraglich (Paterson, 1994). Die Ergebnisse zeigen eine in Fließrichtung kontinuierliche Änderung der horizontalen Geschwindigkeit von einem charakteristischen Eisschildmuster zu Schelfeisverhältnissen (Abb. 3.2). Die Ausdehnung der Übergangszone liegt dabei in der Größenordnung der Eisdicke.

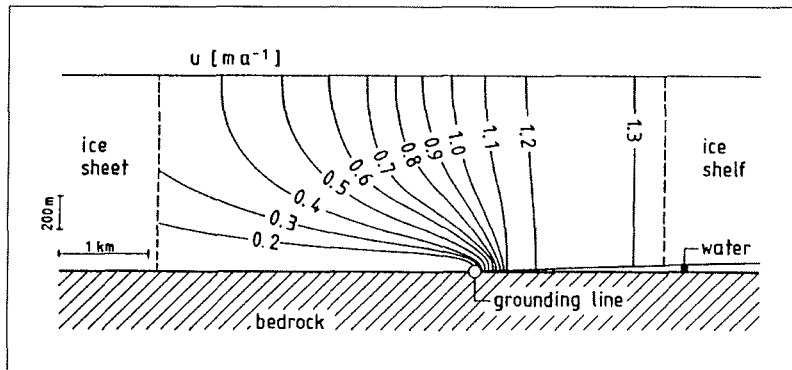


Abbildung 3.2: Isolinien der horizontalen Geschwindigkeitskomponente in der Übergangszone (aus Herterich, 1987).

Die Einführung eines basalen Gleitgesetzes, das eine Grenzscherspannung proportional zum Abstand von der Aufsetzlinie für das Einsetzen basalen Gleitens definiert, liefert deutlich ausgedehntere Übergangszonen (Abb. 3.3). Die stark vereinfachte Geometrie der Modellversuche läßt aber keine Extrapolation der Ergebnisse auf realistischere Anordnungen zu. Aus der Annahme verschwindender vertikaler Geschwindigkeiten an der Oberfläche folgt eine ungenaue Beschreibung der Vertikalgeschwindigkeiten innerhalb des Modellgebietes. Daraus resultieren veränderte Horizontalgeschwindigkeiten und als Folge verletzen die Volumenflüsse die Massenerhaltung. Die Anzahl der benötigten Iterationen zum Erreichen eines Gleichgewichtszustandes sind in diesem Modell, ähnlich dem in dieser Arbeit vorgestellten, verhältnismäßig hoch.

Im Gegensatz zu Herterich (1987) fanden Muszynski und Birchfield (1987), daß die Ausdehnung der Übergangszone nur in sehr geringem Maße vom Anteil basalen Gleitens an der Bewegung abhängt. In ihrem Modell stellt die Auftriebskraft des Eiskörpers in der Übergangszone den kontrollierenden Faktor der Eisdynamik dar. Da jedoch keine retardierenden Effekte an den Seiten des betrachteten Eisstroms berücksichtigt wurden, scheinen die Ergebnisse nicht realistisch (Paterson, 1994).

3.3 Parametrisierte Flächenmodelle

In einer Reihe von Arbeiten präsentierte MacAyeal (1987, 1989, MacAyeal und Barilon (1988)) seinen Ansatz des Gleichgewichts zwischen den hydrostatischen Kräften der internen Deformation (*form drag*) und den durch die Eisbewegung

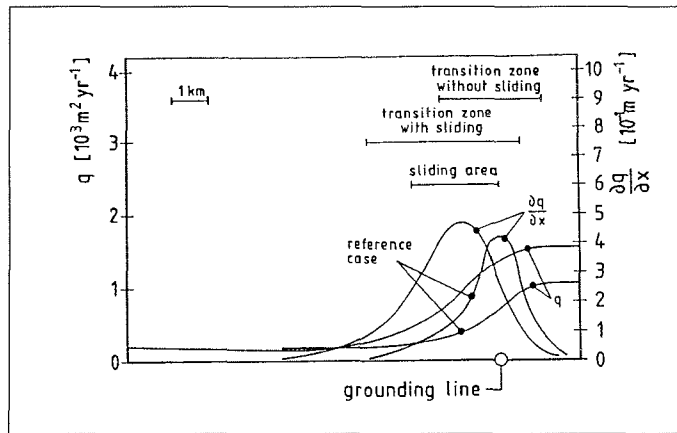


Abbildung 3.3: Fluß durch das Modell für verschiedene Fallstudien. Je nach basalen Bedingungen ist die Breite des Übergangs von Eisschild- zu Schelfeisverhältnissen eingezeichnet (aus Herterich, 1987).

gegenüber festen Rändern hervorgerufenen Scherkräften (*dynamic drag*). Die integrierte Einwirkung dieser beiden Komponenten an der Aufsetzlinie stellt die rückwirkende Kraft dar, die den dynamischen Einfluß aus dem Inlandeis kontrolliert. Mit Hilfe eines numerischen Modells des Ross-Schelfeises (MacAyeal und Thomas, 1982) und der Einführung der oben genannten Kraftkomponenten wurden die Spannungsverhältnisse entlang der Aufsetzlinie des Schelfeises untersucht und Simulationen der Schelfeis- sowie der Eiskuppelentstehung berechnet (MacAyeal, 1987). Diese Experimente berücksichtigten allerdings weder eine spezifische Eisstromphysik noch eine Übergangszone zwischen rein diagnostische Eisschild und Schelfeis und errechneten rein diagnostische Lösungen zu gemessenen Felddaten.

In einem Modell zur Beurteilung der Eisdeformation an Ice Stream B (MacAyeal, 1989) wurde ebenfalls die beschriebene Kräfteaufspaltung als Randbedingung verwendet. Die gemessenen Felddaten speisen ein vertikal integriertes zweidimensionales Flächenmodell zur Berechnung des Eisflusses, das eine Weiterentwicklung eindimensionaler Fließlinienmodelle (Lingle, 1984; Van der Veen, 1985) darstellt. Die zeitliche Evolution des Eisstroms wurde nicht berechnet. Mit Hilfe der Störungstheorie und der Flacheisannahme (Hutter, 1983) werden die grundlegenden Beziehungen durch Gleichungen nullter Ordnung in dimensionslosen Koordinaten approximiert. Die angreifenden basalen Reibungskräfte im Eisstrom werden nicht als Randbedingung, sondern als horizontale verzögernde Körperkraft in das System integriert. Die seitlichen Eisstromränder und der Übergang zum Inlandeis wird durch kinematische Randbedingungen beschrieben. Das vertikal integrierte Modell reproduziert die gemessenen mittleren Fließgeschwindigkeiten und zusammen mit den Eisdicken den mittleren Massenabfluß in das Schelfeis. Die Variation der als Randbedingung vorgegebenen rückwirkenden Kraft und die Viskosität der Grundmoräne benutzt MacAyeal zur Anpassung des Modells an die Feldmessungen. Die beobachteten Deformationsraten können allerdings nicht richtig wiedergegeben werden. Die vertikal integrierten Größen erlauben keine Schlussfolgerungen auf lokale Effekte im Rand-

bereich.

Determann (1991) macht den Versuch, die Übergangszone als einen kontinuierlichen Wechsel von Schelfeis- zu Inlandeisverhältnissen zu beschreiben. Die die Antriebsspannung kontrollierende Oberflächenneigung wird mit einem mit der Höhe über dem Schwimmgleichgewicht abnehmenden Dämpfungsfaktor multipliziert. Dadurch ergibt sich ein linearer Übergang zu einem in der basalen Grenzfläche stagnierenden Eiskörper. Die Geschwindigkeits-Tiefenverteilung im Eisschild wird aus einer Beziehung für die basalen Scherspannungen berechnet. Das Modell ist in der Lage, die Geometrie eines Übergangs von Inlandeis zu Schelfeis zu erzeugen. Durch die starken Vereinfachungen und die willkürliche Festsetzung der Ausdehnung der Übergangszone ist die Simulation realistischer Situationen aber fraglich.

In seinem Modell zur antarktischen Eisschilddynamik berücksichtigt Huybrechts (1992) in Anlehnung an die Arbeit von Van der Veen (1985) die deviatorischen longitudinalen Spannungen in der effektiven Spannung des Fließgesetzes, um damit dem veränderten allgemeinen Spannungszustand im Übergang zum Schelfeis Rechnung zu tragen. Da keine Eisstromdynamik in dem Modell implementiert ist, verschwindet die räumliche Ausdehnung der Übergangszone, wie in den anderen großen Modellen auch, beim Schritt von einem Gitterpunkt zum nächsten. Kleinskalige Effekte können daher nicht berücksichtigt werden.

3.4 Lösung der vollständigen Gleichungen

Die Arbeiten von Van der Veen und Whillans (1989a, b) werden an anderer Stelle (siehe Kapitel 4) eingehender besprochen. Sie stellen ein erstes Modell vor, das ohne wesentliche Vernachlässigungen die Kräftebilanz in einem vertikalen Schnitt entlang einer Fließlinie bestimmt. Dieses Modell ist potentiell auch auf eine Übergangszone anwendbar (siehe Kap. 7). Allerdings sind damit nur diagnostische Zustände aus gemessenen Felddaten zu ermitteln. Eine wesentliche Einschränkung ist die Genauigkeit der Daten und, wie bei jedem Vorwärtsmodell, die wachsende Fehlerakkumulation, in diesem Fall mit der Tiefe. Eine Erweiterung in drei Dimensionen findet sich bei Whillans et al. (1989).

Die bisher vollständigste Untersuchung zum Übergang zwischen Eisschild und Schelfeis ist das zweidimensionale Finite Elemente-Modell von Lestringant (1994). Das Modell simuliert einen plötzlichen Übergang der basalen Randbedingung vom angefrorenen Zustand zu reibungsfreiem Gleiten auf dem Wasser längs einer Fließlinie, ohne Einfluß seitlicher Berandungen. Um die prinzipiellen dynamischen Eigenschaften der Übergangszone bewerten zu können, wurden ähnliche Annahmen der Eiseigenschaften getroffen wie in der vorliegenden Arbeit: isotrop, kontinuierlich, inkompressibel, einheitliche Dichte, isothermal. Die Berechnung der freien Oberfläche erlaubt eine zeitliche Evolution des Modellkörpers aus der Kontinuitätsgleichung. Die zweidimensionalen Stokesgleichungen wurden mittels eines Fließgesetzes von Morland und Shoemaker (1982) in Deformationsraten umgesetzt. Die nach den Geschwindigkeiten aufgelösten Beziehungen wurden mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente berechnet. Lestringant macht allerdings keine Angaben über den gewählten Weg mathematischer Umformungen zur Aufstellung der endgültigen numerischen Formulierung. Die bisher dargestellten Ergebnisse sind noch nicht überzeu-

gend. Für die zeitliche Evolution der freien Oberfläche wird jeweils nur die Schelfeis-seite der Ober- und Unterseite des Modells gezeigt. Diese Profile entsprechen keinen Gleichgewichtsprofilen für ein uniaxial expandierendes Schelfeis. Die beobachtete Deflektion unmittelbar seewärts der Aufsetzlinie mag in Einklang mit Feldbeobachtungen sein, wofür die laterale Ausdehnung über drei bis vier Eismächtigkeiten ein Indiz liefert. Die Amplitude liegt aber nicht nur weit unter den im Feld gemessenen, sondern ist mit weniger als 0.05% relativ zur Oberflächenhöhe unter der mit numerischen Methoden erzielbaren Genauigkeit. Da keine Aussagen zu den erzielten Mächtigkeiten im gegründeten Bereich gemacht wurden, kann keine Beurteilung der Geschwindigkeits- und Spannungsverteilungen vorgenommen werden. Die Abnahme der Geschwindigkeit in den oberen Bereichen der Eissäule in Richtung der Aufsetzlinie mit einer gleichzeitig kleiner werdenden Mächtigkeit, wie sie die Abbildungen 8 und 9 in Lestringant (1994) implizieren, deuten jedoch auf eine Verletzung der Massenerhaltung hin. Die aus diesen Ergebnissen resultierenden Schlußfolgerungen sollten daher mit Vorsicht behandelt werden.

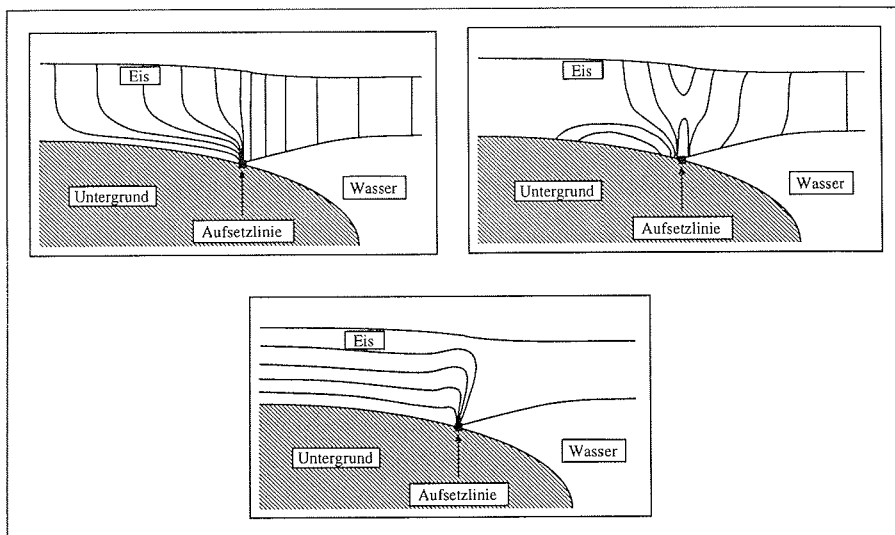


Abbildung 3.4: Schematische Skizzen der Übergangszone nach Herterich (1987). Gezeigt sind Isolinien darstellungen der horizontalen Geschwindigkeit (oben links), der deviatorischen Longitudinalspannung (oben rechts) und der vertikalen Scherspannung (unten Mitte). Die Geschwindigkeiten weisen im Eisschild einen starken Vertikalgradienten auf, der sich im Schelfeis zu einem Horizontalgradienten wandelt. Die deviatorischen Longitudinalspannungen sind eigentlich nur im Schelfeis von Bedeutung. Im gegründeten Bereich nahe der Aufsetzlinie wird Extension an der Oberfläche und Kompression nahe des Bodens erwartet. Die hohen Scherspannungswerte in den tiefen Zonen des Eisschildes verschwinden in einem engen Bereich um die Übergangszone.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß bis heute noch kein verläßliches Modell der

Übergangszone existiert. In den letzten zwanzig Jahren sind viele Fortschritte erzielt worden. Von groben Abschätzungen gelangte man zu Massenbilanzmodellen, die eine Kontinuität der Verhältnisse in der Übergangszone voraussagten. Ein wichtiger Schritt war die Einführung einer räumlich definierten, linearen Übergangszone durch Van der Veen, 1985. Theoretische Überlegungen führten zu einer weiteren Verfeinerung und sogar zur Implementierung parametrisierter Formen in Eisschildmodellen. Zuletzt gelang es Lestringant, eine zweidimensionale Lösung zu finden, deren bisherige Resultate aber noch kritisch zu bewerten sind. Einflüsse seitlicher Verzögerungsspannungen können damit noch nicht berücksichtigt werden. Im wesentlichen besteht heute Einigkeit darüber, daß der Wechsel der basalen Randbedingung, selbst wenn er sprunghaft erfolgt, keine Unstetigkeiten im dynamischen Verhalten erzeugt. Frei expandierende Schelfeise sind vom Zuflußgebiet weitgehend entkoppelt, während für eingegrenzte Schelfeisgebiete die dynamischen Auswirkungen bisher noch unklar sind. Die eher theoretischen Überlegungen von Herterich (1987) demonstrieren einen möglichen prinzipiellen Verlauf der wichtigen Größen Geschwindigkeit, vertikale Scherspannung und deviatorische Longitudinalspannung (siehe Abb. 3.4) für den freien Schelfeisfall.

Hindmarsh, ein Vertreter der Theorie entkoppelter Systeme, verweist trotz seiner Schlußfolgerungen für frei expandierende Schelfeise auf noch fehlende Erkenntnisse für die Verhältnisse in der Übergangszone seitlich begrenzter Eisschild-Schelfeis-Systeme (Hindmarsh, 1993a).

Kapitel 4

Mathematische Formulierung

Zur Beschreibung eines dynamischen Systems ist es notwendig, die auf das System einwirkenden Kräfte zu definieren und mittels physikalischer Beziehungen daraus die Systemgrößen wie Geometrie- und Geschwindigkeitsvariationen zu ermitteln.

Polykristallines Eis ist ein verhältnismäßig leicht deformierbares Material. Innerhalb der zeitlichen Größenordnungen für die Bewegung von Gletschern und Eisschilden kann jedoch die elastische Deformation eines Eiskörpers vernachlässigt werden (Paterson, 1994). Als ideale Beschreibung eines deformierbaren Körpers mit viskos/plastischem Verhalten eignet sich die Kontinuumsmechanik (Oerlemans und Van der Veen, 1984). Auf einen Körper einwirkende Kräfte verursachen von Materialgesetzen abhängige Deformationen. Aus den Deformationsraten kann wiederum zusammen mit den entsprechenden Randbedingungen die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des betrachteten Körpers bestimmt werden.

4.1 Das Kräftegleichgewicht in einem Eiskörper

Bei Betrachtung eines diskreten Punktes innerhalb eines Materials (siehe Abb. 4.1), müssen sich die auf ihn wirkenden Kräfte im Gleichgewichtszustand aufheben. Die angreifenden Flächenkräfte lassen sich als Spannungen in Tensorform formulieren (Oerlemans und Van der Veen, 1984).

Die auf ein Volumenelement $\delta x \delta y \delta z$ wirkende Kraft in x -Richtung entspricht der Spannungsdifferenz über die entsprechende Kantenlänge des Elementes, in der jeweils wirkenden Richtung, mal der Fläche, auf die diese Kraft wirkt (Paterson, 1994).

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y$$

Analog gilt dies für die anderen Richtungen. Die σ_{ij} entsprechen dabei den vollen Spannungen. Da kein Unterschied zwischen deviatorischen und vollen Scherspannungen besteht, werden die Scherspannungskomponenten gleich als deviatorische Spannungen τ_{ij} geschrieben.

Mit der Vernachlässigung der Corioliskraft und aufgrund der langsamen Bewegung von Eismassen der Beschleunigungsterme wirkt als äußere Volumenkraft nur die Gravitation. Für ein Element innerhalb eines Eisblocks kann das Gleichgewicht der

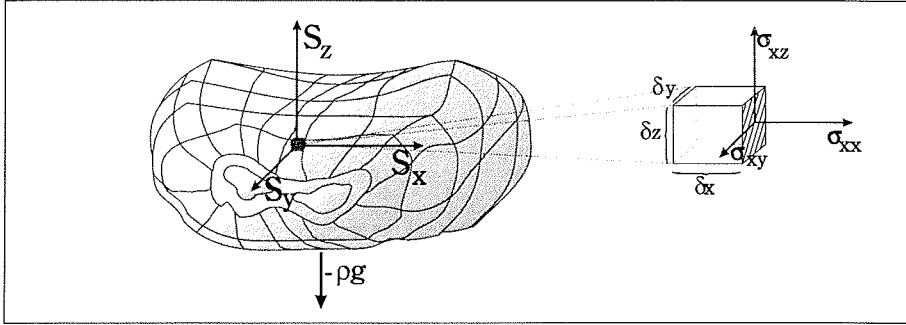


Abbildung 4.1: Kraft- und Spannungsverhältnisse an einem Festkörper. Die S_i stellen allgemein wirkende Spannungen dar, $-\rho g$ ist die angreifende Körperkraft der Gravitation. Für das Volumenelement $\delta x \delta y \delta z$ sind die resultierenden Spannungen exemplarisch für eine Fläche senkrecht zur x -Achse dargestellt.

herrschenden Kräfte in kartesischen Koordinaten beschrieben werden:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho g \quad (4.3)$$

In dem beschriebenen System sind nicht die vollen, sondern die deviatorischen Spannungen für die Deformation des Eises verantwortlich (Paterson, 1994). Der deviatorische Anteil

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} 1/3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (4.4)$$

(δ_{ij} ist das Kronecker Symbol) ist definiert als die Abweichung der vollen Spannung von der mittleren einwirkenden Normalspannung (Oerlemans und Van der Veen, 1984). Damit können die Gleichungen 4.1 – 4.3 in eine Form gebracht werden, die nur noch von deviatorischen Spannungen und der vollen Spannung in vertikaler Richtung abhängt,

$$2 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho g \quad (4.7)$$

Spaltet man die volle Spannung in einen reinen *litostatischen* und einen *resistiven* Anteil auf (Van der Veen und Whillans, 1989a),

$$\sigma_{ij} = R_{ij} - \rho g h \quad (4.8)$$

dann kann nach Van der Veen und Whillans (1989a) der resistive Anteil als Integral über die aufliegende Eissäule berechnet werden:

$$R_{zz} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{H+h-z}^{H+h} \tau_{xz} dz' + \frac{\partial}{\partial y} \int_{H+h-z}^{H+h} \tau_{yz} dz' . \quad (4.9)$$

Dabei wird die vertikale Achse im Koordinatensystem als positiv nach oben definiert. Der Ursprung liegt auf NN. h ist die Tiefe (negativ), bzw. Höhe (positiv) des Untergrundes, H die Eismächtigkeit und z die vertikale Koordinate.

Ziel der mathematischen Entwicklung ist es, einen Formalismus zu finden, der es erlaubt, die Geschwindigkeitskomponenten im Koordinatensystem zu berechnen. Der betrachtete Eiskörper wird als isotropes Medium angenommen. Das Koordinatensystem ist nicht nach einer Vorzugsrichtung orientiert. Daher sind die Bedingungen in den beiden horizontalen Richtungen völlig gleichberechtigt und damit symmetrisch zu behandeln.

Inkompressibilität ist für Eis eine geeignete Annahme (Doake und Wolff, 1985). Die vertikale Geschwindigkeit ist immer aus einer geeigneten Randbedingung und der Inkompressibilitätsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.10)$$

(u, v, w Geschwindigkeitskomponenten in den Achsenrichtungen) zu berechnen.

Aus diesen Gründen ist es ausreichend, daß sich im Folgenden die Entwicklung auf die entsprechende Gleichung in x - Richtung beschränkt. Die Formulierung für die v - Geschwindigkeit kann analog gebildet werden.

Als Ausdruck für die Spannungsverhältnisse in x - Richtung ergibt sich:

$$2 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial R_{zz}}{\partial x} + \rho g \frac{\partial(H+h-z)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 . \quad (4.11)$$

4.2 Das Fließgesetz für isotropes Eis

Als Antwort auf einwirkende Spannungen kann ein Material unterschiedlich reagieren. In jedem Fall wird es, solange die Kräfte nicht zu klein sind, in irgendeiner Weise seine geometrische Gestalt verändern. Kehrt es nach Aufhebung der äußeren Beeinflussung wieder in seinen Ursprungszustand zurück, so spricht man von *elastischer* Deformation. Ein rein *plastisches* Material wird ab einem gewissen Schwellenwert solange weiter deformiert, wie die Kraft auf das Material wirkt. Bei einem *viskosen* Verhalten steht die Änderung der Deformation in einer Beziehung zur einwirkenden Kraft. Ist die Beziehung linear, so spricht man von Newtonschem Verhalten. Der Proportionalitätsfaktor ist die dynamische Viskosität (Jaeger, 1969).

Wie bereits erwähnt, resultiert die geometrische Veränderung eines Körpers aus der Abweichung der angreifenden Spannungen von der mittleren einwirkenden Normalspannung. Aus Experimenten mit polykristallinem isotropen Eis wurde für sekundäres Kriechen eine Beziehung gefunden, die die Deformationsrate mit dem allgemeinen Spannungszustand (ausgedrückt durch die zweite Invariante des Spannungstensors) und der entsprechenden Spannung verknüpft (Glen, 1955) : $\dot{\epsilon}_{ij} = A \tau^{n-1} \tau'_{ij}$

und $\tau = (1/2(\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + \tau_{zz}^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{1/2}$. Eine Umrechnung ergibt (mit der Definition der effektiven Deformationsrate: $\dot{\epsilon} = (1/2(\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2) + \dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{xz}^2 + \dot{\epsilon}_{yz}^2)^{1/2}$ und der Beziehung: $\dot{\epsilon} = A\tau^n$ aus Paterson (1994) die hier verwendete Form des Fließgesetzes für isotropes Eis:

$$\tau_{ij} = A^{-1/n} \dot{\epsilon}^{\frac{1-n}{n}} \dot{\epsilon}_{ij} \quad . \quad (4.12)$$

Aus den experimentell ermittelten Werten für den Exponenten n wird meist der Wert 3 für polykristallines Eis verwendet (Weertman, 1957). Der Fließfaktor A ist temperaturabhängig und gehorcht einer Arrheniusrelation (Paterson, 1994):

$$A = A_0 \exp(-Q/RT) \quad . \quad (4.13)$$

Hierbei ist A_0 ein temperaturunabhängiger Materialfaktor. Er hängt hauptsächlich von der Kristallorientierung, der Konzentration von Verunreinigungen und dem Wassergehalt ab. Q ist die Aktivierungsenergie für die Deformation (im Mittel 60 kJ mol⁻¹), R die universelle Gaskonstante (8,314 J mol⁻¹ K⁻¹) und T die Temperatur in Kelvin.

Zur Vereinfachung wird für die weitere Entwicklung aus der effektiven Deformationsrate und dem Arrheniusfaktor eine neue Variable B definiert:

$$B := A^{-1/n} \dot{\epsilon}^{\frac{1-n}{n}} \quad . \quad (4.14)$$

4.3 Vertikale Skalierung

Ein Modell zur Eisdynamik kann durch geeignete Randbedingungen auf einem in den horizontalen Richtungen festen Gitter berechnet werden. Der Rand wird festgehalten, die Dynamik durch Ein- und Ausflußfunktionen definiert. In der vertikalen Dimension ändert sich allerdings die Eismächtigkeit mit der Zeit. Die Skalierung der Eismächtigkeiten verhindert die Schwierigkeiten einer laufenden Gitteranpassung an die vertikale Ausdehnung.

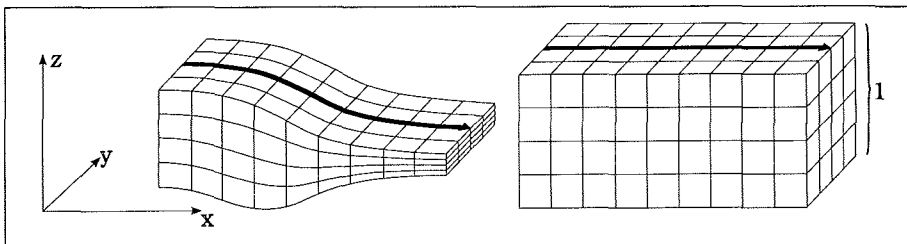


Abbildung 4.2: Vertikale Skalierung des Eisschildmodells. Die variable vertikale Ausdehnung des Eiskörpers wird für die Modellberechnungen in eine Einheitsmächtigkeit überführt. Die horizontalen Richtungen und Größenordnungen ändern sich dabei nicht.

Damit entspricht die oberste Fläche im Gitternetz immer der Eisoberfläche, die unterste der Eisunterseite. Mit der Richtung der vertikalen Koordinatenachse positiv

nach oben wird die s -Koordinate an der Eisunterseite gleich 0 und an der Oberfläche gleich 1 definiert:

$$s := \frac{z - h}{H} . \quad (4.15)$$

Dabei ist H die Eismächtigkeit, h die Meereshöhe des Eisuntergrundes, z die vertikale Koordinate, positiv nach oben.

Nach Bronstein und Semendjajew (1984) erhält man bei einer Variablensubstitution

$$\begin{aligned} x &= \psi(x') , \\ y &= \xi(y') , \\ z &= \varphi(s) = sH + h , \end{aligned}$$

mit der Kettenregel folgende Ableitungen der Funktion $f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x'} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial(sH + h)}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial z} , \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial(sH + h)}{\partial y'} \frac{\partial f}{\partial z} , \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial(sH + h)}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= H \frac{\partial f}{\partial z} . \end{aligned}$$

Definiert man die geometrischen Korrekturfaktoren als:

$$\begin{aligned} \Delta_{sx} &:= \frac{\partial(sH + h)}{\partial x'} \quad \text{und} \\ \Delta_{sy} &:= \frac{\partial(sH + h)}{\partial y'} , \end{aligned} \quad (4.16)$$

ergibt sich eine Konversionsvorschrift in das vertikal skalierte System:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x'} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial f}{\partial s} , \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{1}{H} \Delta_{sy} \frac{\partial f}{\partial s} \quad \text{und} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial s} . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Aus der Skalierung der vertikalen Koordinate folgt nach Holton (1979) und Van der Veen und Whillans (1989a):

1. Die Abhängigkeit von der Topographie (Neigung von Oberfläche und Bett) ist nur noch in den Faktoren Δ_{sx} und Δ_{sy} enthalten.
2. Die Vertauschung von Ableitung und Integral ist invariant, auch für gemischte Terme (Entkopplung von x,y,s).
3. Die Richtung der Geschwindigkeiten ist immer noch parallel zu den entsprechenden Koordinatenachsen. Nur werden sie, gemäß der vertikalen Skalierung, auf gebogenen Flächen und damit auf unterschiedlichen Niveaus berechnet.

4.4 Die Bewegungsgleichung

Unter Berücksichtigung der Definition der Deformationsraten: $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, folgt aus Gleichung 4.11 und dem Fließgesetz 4.12 eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial x} B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} B \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial R_{zz}}{\partial x} + \rho g \frac{\partial(H+h-z)}{\partial x} + \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad . \quad (4.18) \end{aligned}$$

Die Umrechnung des Gravitationsanteils erfolgt mit Hilfe der Definition der vertikal normierten Koordinate (Gleichung 4.15). Es ist $z = sH + h$ und daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g(H+h-z)) &\implies \rho g(1-s) \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial}{\partial s} (\rho g(1-s)H) \\ &= \rho g(1-s) \frac{\partial H}{\partial x} + \rho g \Delta_{sx} - \Delta_{sx} g \frac{\partial \rho}{\partial s} + \Delta_{sx} g s \frac{\partial \rho}{\partial s} \\ &= \rho g(1-s) \frac{\partial H}{\partial x} + \rho g \frac{\partial(sH+h)}{\partial x} - \Delta_{sx} g(1-s) \frac{\partial \rho}{\partial s} \\ &= \rho g \frac{\partial(H+h)}{\partial x} - \Delta_{sx} g(1-s) \frac{\partial \rho}{\partial s} \quad . \quad (4.19) \end{aligned}$$

Aus der obigen Form ist ersichtlich, daß der gravitative Antrieb beinahe ausschließlich aus der Oberflächenneigung resultiert. Undulationen des Untergrundes haben keine Auswirkung.

Zusätzlich wirkt eine Kraft, die aus dem vertikalen Dichtegradienten resultiert. Allerdings ist der Anteil im oberflächennahen Bereich durch den Term $(1-s)$ und geringe Oberflächenneigungen begrenzt, in der Tiefe ist der Dichtegradient nahezu Null. Die Firnschichten an der Oberfläche werden wegen der Verletzung der Inkompressibilität nur als *kondensierter Eiskörper* betrachtet. Der durch den Dichtegradienten verursachte Anteil des gravitativen Antriebes ist daher verhältnismäßig gering.

Mit der vertikalen Koordinatenskalierung aus Kapitel 4.3 (Gleichungen 4.16 und 4.18) ergibt sich die endgültige Form der nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung eines Eiskörpers:

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial}{\partial s} \right) \left(B \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right) + \\
& \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial}{\partial s} \right) \left(B \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{H} \Delta_{sy} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right) + \\
& \frac{\partial R_{zz}}{\partial x} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial R_{zz}}{\partial s} + \rho g \frac{\partial(H+h)}{\partial x} - \Delta_{sx} g (1-s) \frac{\partial \rho}{\partial s} + \\
& \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{H} \Delta_{sy} \frac{\partial}{\partial s} \right) \left(B \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{H} \Delta_{sy} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right) + \\
& \frac{1}{2H} \frac{\partial}{\partial s} \left(B \left(\frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right) = 0 \quad (4.20)
\end{aligned}$$

und analog für die Beziehung in y - Richtung.

4.4.1 Die Behandlung des vertikalen resistiven Anteils

Ein Vorteil der Beschreibung der vollständigen Spannungen durch einen resistiven (R_{ij}) und einen lithostatischen ($\delta_{ij} \rho g (h-z)$) Anteil (Van der Veen und Whillans, 1989a) ist, daß sich die Gleichungen relativ leicht in der Form deviatorischer Komponenten entwickeln lassen. Der einzige extra zu berechnende Term ist die vertikale resistive Spannung. Da sich Eis verhältnismäßig duktil verhält, ist die vertikale Normalspannung immer nahezu gleich der lithostatischen Auflast. R_{zz} ist daher sehr klein (Van der Veen und Whillans, 1989a). Es spielt nur als Stützeffekt ("bridging effect") in kleinskaligen, topographisch unruhigen Gebieten nahe der Eisunterseite oder im Bereich der *grounding line* eine Rolle. Die Vernachlässigung der Stützeffekte ist, wie aus der Form von R_{zz} (Gleichung 4.9) ersichtlich ist, gleichbedeutend mit der Annahme, daß die horizontalen Gradienten der vertikalen Scherspannungen klein sind im Vergleich zu ρg (Hutter, 1983).

Für die Betrachtung der Kraftübertragung in der Übergangszone von Eisschild zu Schelfeis kann dieser Term allerdings eine wichtige Rolle spielen und wird daher nicht vernachlässigt.

Die Anwendung des Fließgesetzes (4.12) auf (4.9) und die Darstellung des R_{zz} - Termes in skalierten Koordinaten ergibt:

$$\begin{aligned}
R_{zz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{H+h-z}^{H+h} B \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz' + \frac{\partial}{\partial y} \int_{H+h-z}^{H+h} B \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz' \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial}{\partial s} \right) H \int_s^1 B \left(\frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{H} \Delta_{sx} \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds' \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{H} \Delta_{sy} \frac{\partial}{\partial s} \right) H \int_s^1 B \left(\frac{1}{H} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{H} \Delta_{sy} \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds' \right). \quad (4.21)
\end{aligned}$$

4.4.2 Die effektive Deformationsrate

Die Reaktion des Eises auf die einwirkenden Kräfte hängt nicht nur von den entsprechenden deviatorischen Spannungen ab, sondern auch vom allgemeinen Spannungszustand, dem der betrachtete Bereich ausgesetzt ist (Paterson, 1994). Dem allgemeinen Spannungszustand entspricht in der umgerechneten Form des Fließgesetzes (Gleichung 4.12) der allgemeine Zustand der Deformationsrate. Da der allgemeine physikalische Zustand eines Körpers nicht vom verwendeten Koordinatensystem abhängt, wird für die Beschreibung solcher Eigenschaften eine invariante Größe verwendet.

Die einzelnen Richtungskomponenten der Deformationsraten eines isotropen Körpers bilden einen symmetrischen Tensor. Für inkompressible Materialien ist die erste Tensorinvariante gleich Null. Die zweite Tensorinvariante beschreibt die allgemeine Deformationsrate und wird als effektive Deformationsrate bezeichnet (Oerlemans und Van der Veen, 1984):

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2) + \dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{xz}^2 + \dot{\epsilon}_{yz}^2 \right)^{1/2} . \quad (4.22)$$

Aus der Inkompressibilitätsbedingung (Gleichung 4.10) folgt:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} . \quad (4.23)$$

Das Quadrat der effektiven Deformationsrate wird in den Geschwindigkeitskomponenten ausgedrückt zu:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^2 = & \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Aus Gleichung 4.12 ist ersichtlich, daß für einen Exponenten $n = 1$ die effektive Deformationsrate verschwindet. Der allgemeine Spannungszustand hat damit keine Auswirkung auf die Deformation, die in jeder speziellen Komponente nur von den entsprechenden deviatorischen Spannungen bestimmt wird. In diesem Falle spricht man von *Newtonschem*, *viskosem* Verhalten wobei $1/A$ die dynamische Viskosität ist (Paterson, 1994).

Die effektive Deformationsrate ist auch für die Nichtlinearität des Systems verantwortlich.

4.5 Die Kontinuitätsgleichung für den Massenfluß

Bisher wurde nur ein räumlich konstantes System betrachtet, bei dem für vorgegebene Eismächtigkeiten die aus den geometrischen Bedingungen resultierende Geschwindigkeitsverteilung berechnet wird. Solch ein Zustand wird für beliebige Mächtigkeitsverteilungen in der Regel physikalisch nicht stabil sein. Erlaubt man

dem Modell, Masse entsprechend den gewonnenen Geschwindigkeiten zu transportieren, so stellt sich nach gewisser Zeit ein Gleichgewichtszustand ein. Falls dabei keine Masse über die Modellränder transportiert wird, stellt sich dieses Gleichgewicht erst ein, wenn keine Oberflächenneigungen des Eises mehr existieren (siehe auch Gleichung 4.19; die Antriebskraft geht für verschwindende Neigungen gegen Null).

Je nach Anwendung des Modells werden daher Massenflüsse über die seitlichen Ränder (als Zu- bzw. Abfluß) und über die obere und untere Grenzfläche (als Akkumulation oder Ablation) eingeführt. In einem solchen dynamischen System passen sich die Eismächtigkeiten und Neigungen der Eisoberfläche den vorgegebenen Randbedingungen an. Zeigt das Modell während der Berechnungen keine geometrischen Veränderungen mehr, so spricht man von einem Gleichgewichtszustand (*steady state*, Paterson (1994)).

Der Massentransport kann theoretisch durch die Bewegung der einzelnen Partikel ausgedrückt werden. In einer Volumensäule über die Eismächtigkeit wirkt sich die Summe der in das Volumen einströmenden und ausströmenden Partikel nur auf die Lage der Eisoberfläche aus. Dies gilt auch für Partikel, die über die obere und untere Grenzfläche als Akkumulation oder Ablation das System beeinflussen.

Inkompressibilität vorausgesetzt, reduziert sich die Beschreibung der Massenbilanz für den Grenzwert der Säulengrundfläche $\Delta x \Delta y \rightarrow 0$ auf eine Änderung der Eismächtigkeit mit der Zeit. Der horizontale Fluß in Richtung einer Koordinatenachse kann damit in vertikal integrierter Form geschrieben werden:

$$q_{x_i} = \int_h^{H+h} u_i dz' \quad . \quad (4.25)$$

Unter Verwendung von Akkumulation und Ablation in entsprechenden Längeneinheiten pro Zeit, erhält man für die vertikal integrierte Kontinuitätsgleichung (Oerlemans und Van der Veen, 1984):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a - \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u}) - \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{v}) \quad , \quad (4.26)$$

wobei \bar{u} und \bar{v} die vertikal integrierten Geschwindigkeitskomponenten darstellen.

Eine anschaulichere Form ergibt sich mit der direkten Vertauschung von Ableitung und Integral in den Flußtermen ($\partial q_{x_i} / \partial x_i$) (Bronstein und Semendjajew, 1984):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = & a - u(H+h) \frac{\partial(H+h)}{\partial x} - v(H+h) \frac{\partial(H+h)}{\partial y} \\ & + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(h) \frac{\partial h}{\partial y} - \int_h^{H+h} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz' \quad . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Neben der Akkumulation/Ablation beeinflussen auch die Oberflächenneigungen und die Untergrundtopographie die Eisdickenänderung. Für *no slip* Bedingungen an der Unterseite verschwindet der Einfluß der Bodenoberfläche. Das Integral stellt den Einfluß der internen Deformation dar. Für die Varianz der Mächtigkeiten ist es

notwendig, die Formulierung in skalierte Koordinaten zu überführen, da sonst bei der Berechnung des Integrals die Geschwindigkeiten für die Ableitungen nicht in den richtigen Tiefen gewählt werden. Allerdings ist es ausreichend, die skalierten Ableitungen zu verwenden.

Kapitel 5

Randbedingungen des Modells

Neben den physikalischen Gesetzen, auf denen die inneren Prozesse eines numerischen Modells aufbauen, bestimmen die Randbedingungen im wesentlichen die Dynamik und das spezifische Verhalten des Gesamtmodells. Die Randbedingungen stellen das Bindeglied zwischen dem internen Modellverhalten und der gewünschten Ankopplung an die äußere Umgebung dar. Auf dem vollständigen Rand des Modells muß das Verhalten der unbekanntenen Variablen (hier die Geschwindigkeiten und für den prognostischen Fall auch die Eismächtigkeiten) vom Außenraum in das Modellgebiet beschrieben werden.

Im Allgemeinen wird zwischen Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen unterschieden (Lapidus und Pinder, 1982). Im Falle von Dirichlet-Bedingungen ist der Wert der Variablen auf dem Rand bekannt, im anderen Fall ihre Ableitung an dieser Stelle. An *no slip* Rändern, an denen keine Eisbewegung stattfindet, und an Rändern mit bekanntem Massenfluß können normalerweise Dirichlet-Bedingungen angenommen werden, während an dynamischen Grenzflächen Neumann-Bedingungen Anwendung finden.

5.1 Die Schelfeisfront

Im ausgeglichenen Zustand herrscht in einem frei schwimmenden Schelfeis ein Gleichgewicht zwischen der resultierenden Normalspannung senkrecht zur Eisfront und dem hydrostatischen Druck des umgebenden Wassers. Da im Wasser keine Scherkräfte übertragen werden, müssen die resultierenden Spannungen parallel zur Eisfront Null sein. Daraus resultiert auch das Verschwinden von Scherdeformation an der Eisfront,

$$\tau_{ij} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad . \quad (5.1)$$

Für eine exakte Betrachtung der Prozesse an der Eisfront müssen die Kräftebeziehungen an jeder Stelle über die Eisdicke erfüllt sein. Die Frontform des Schelfeises wird dabei allerdings nicht nur durch die mechanischen Bedingungen bestimmt, sondern auch stark von thermischen Prozessen beeinflusst (Robin, 1979). Bei Verwendung der frontalen Randbedingung für den Erhalt der Massenbilanz im Gesamtsystem ist es ausreichend, vertikal integrierte Spannungsbeziehungen zu betrachten. Dies entspricht den Verhältnissen im Abstand einiger Eisdicken von der Eisfront. Spezielle, vom Freibord des Schelfeises induzierte Prozesse an der Schelfeisfront

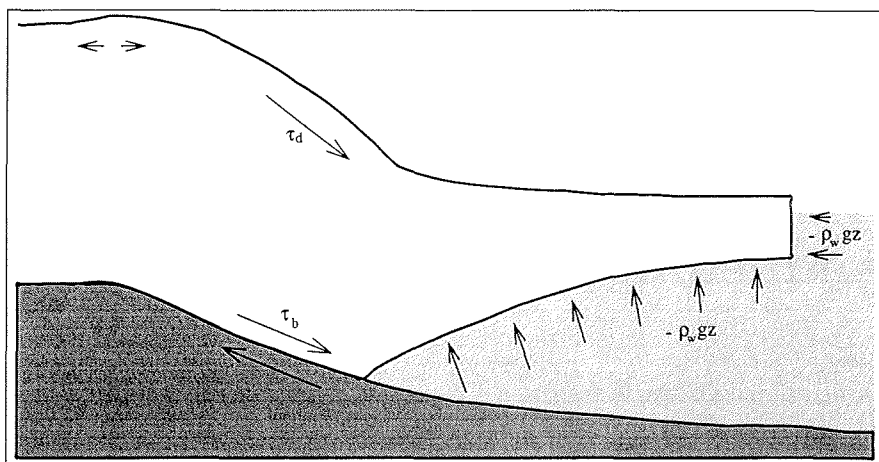


Abbildung 5.1: Antrieb und angreifende Kräfte an einem Eiskörper. Im Eisschild resultiert die Bewegung aus der Oberflächenneigung. Die durch τ_d hervorgerufene Antriebskraft steht im Gleichgewicht zu den Reibungskräften (aus τ_b) am Boden. Der Gewichtskraft und der Ausbreitung des Schelfeises wirkt der hydrostatische Druck des Ozeans entgegen.

können damit nicht beschrieben werden.

Zur Formulierung der Verhältnisse wird für einen allgemeinen Fall angenommen, daß die Hauptflußrichtung in x -Richtung senkrecht zur Eisfront verläuft (Abb. 5.2). Die Beziehung in der anderen Koordinatenrichtung folgt analog. Die durch das Wasser auf die Eisfront ausgeübte Kraft muß innerhalb des Eiskörpers kompensiert werden. In der Wassersäule herrschen an jeder Stelle isotrope Spannungsverhältnisse, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\rho_w g z$. Damit ergibt sich die Kräftebilanz, ausgedrückt durch die vertikal integrierten horizontalen Normalspannungen zu:

$$\int_0^H \sigma_{xx}(\text{Eis}) dz = \int_0^{H-H_f} \sigma_{xx}(\text{Wasser}) dz \quad . \quad (5.2)$$

Der Ursprung wurde dabei an der Eisunterkante gewählt, H ist die Eismächtigkeit und H_f die Freibordhöhe.

Ist die Position der Schelfeisfront weiter als der Einflußbereich der Übergangszone von der *grounding line* entfernt, so kann auch im Eis ein hydrostatischer Zustand angenommen werden. Die vertikale Normalspannung entspricht dann dem isostatischen Auflastdruck

$$\sigma_{zz} = -\rho g(H - z) \quad , \quad (5.3)$$

wobei z hier der Höhe über der Eisunterkante entspricht.

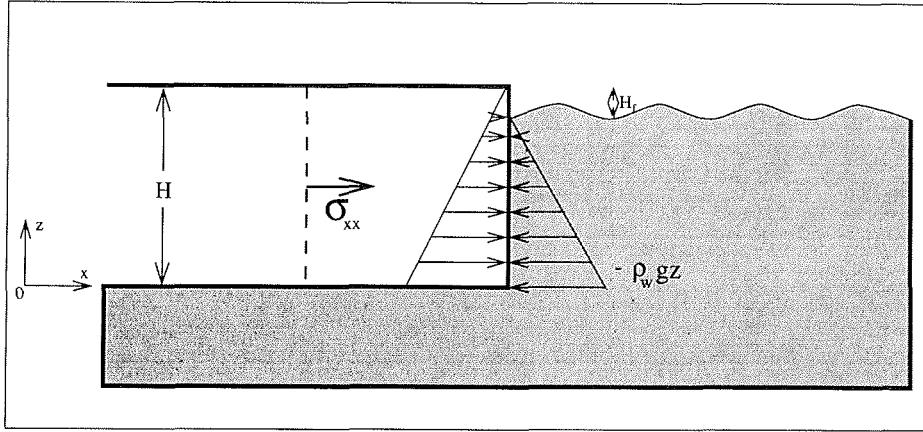


Abbildung 5.2: Kräftebilanz an der Schelfeisfront. Es muß ein Gleichgewicht zwischen der nach außen gerichteten Normalspannung des Schelfeises und dem hydrostatischen Druck im umgebenden Wasser existieren. Erläuterungen der Variablen im Text.

Der Ausdruck für die deviatorische Normalspannung in Fließrichtung folgt aus ihrer Definition (Gleichung 4.4):

$$\tau_{xx} = \sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (5.4)$$

$$= \frac{2}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{yy} - \rho g(H - z)) \quad (5.5)$$

Durch Ersetzen von σ_{yy} mit einer analogen Formulierung der deviatorischen Normalspannung in y -Richtung ergibt sich eine Beziehung von σ_{xx} und den deviatorischen Komponenten:

$$\sigma_{xx} = 2\tau_{xx} + \tau_{yy} - \rho g(H - z) \quad (5.6)$$

Aus der Gleichung 5.2 folgt damit:

$$\begin{aligned} \int_0^H (2\tau_{xx} + \tau_{yy} - \rho g(H - z)) dz &= \int_0^{H-H_f} -\rho_w g(H - H_f - z) dz \quad , \\ \int_0^H (2\tau_{xx} + \tau_{yy}) dz &= \int_0^H \rho g(H - z) dz - \int_0^{H-H_f} \rho_w g(H - H_f - z) dz \\ &= \rho g \left[Hz - \frac{1}{2}z^2 \right]_0^H - \rho_w g \left[(H - H_f)z - \frac{1}{2}z^2 \right]_0^{H-H_f} \\ &= \frac{1}{2}g (\rho H^2 - \rho_w (H - H_f)^2) \quad . \end{aligned}$$

Die Bedingung für das Schwimmgleichgewicht des Eiskörpers

$$H_f = \frac{\rho_w - \rho}{\rho_w} H \quad (5.7)$$

liefert

$$\int_0^H (2\tau_{xx} + \tau_{yy}) dz = \frac{1}{2} g H^2 \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right) \quad (5.8)$$

Unter Anwendung von Glen's Fließgesetz (Gleichung 4.12, Glen (1958)) und einem Exponenten $n = 3$, ergibt sich folgender Ausdruck für die Klammer auf der linken Seite der Gleichung 5.8:

$$(2\tau_{xx} + \tau_{yy}) = (2\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy}) A^{-1/3} \dot{\epsilon}^{-2/3} \quad (5.9)$$

Es ist für ein temperaturunabhängiges Modell eine vernünftige Annahme, daß der Fließfaktor A wie auch die Deformationsraten nahe der Schelfeiskante unabhängig von der Tiefe sind. Die Ausführung der Integration liefert damit für mittlere Deformationsraten die allgemeine Bedingungsgleichung für den Randübergang an der Eisfront:

$$2\bar{\dot{\epsilon}}_{xx} + \bar{\dot{\epsilon}}_{yy} = \bar{A}^{1/3} \bar{\dot{\epsilon}}^{2/3} \frac{\rho g H}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right) \quad (5.10)$$

Im folgenden Abschnitt werden weiterhin die mittleren Werte für die Deformationsraten und den Fließfaktor verwendet, der Überstrich jedoch weggelassen.

5.1.1 Spezialfälle

Für den uniaxialen Fall, bei dem das Eis an den Rändern begrenzt aber ungebremst längs der x -Achse fließt, existiert keine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Hauptfließrichtung. Damit verschwindet auch die Deformationsrate in dieser Richtung und die effektive Deformationsrate ist

$$\dot{\epsilon}^2 = \dot{\epsilon}_{xx}^2 \quad (5.11)$$

Die Gleichung 5.10 vereinfacht sich zu :

$$\dot{\epsilon}_{xx} = A^{1/3} \dot{\epsilon}_{xx}^{2/3} \frac{\rho g H}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right) \quad (5.12)$$

Eine Umformung unter Verwendung der Definition der Deformationsrate ergibt den Ausdruck für den Gradienten der horizontalen Geschwindigkeit am meerseitigen Eisrand :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \left(\frac{\rho g H}{4} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right) \right)^3 \quad (5.13)$$

Ist das Schelfeis in keiner Richtung in seiner Ausdehnung behindert, so ist σ_{yy} nicht mehr 0. In diesem Falle ändert sich auch die Beziehung für die Deformationsraten. Für eine isotrope Expansion des frei schwimmenden Eiskörpers gilt :

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{yy} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

und damit ist

$$\dot{\epsilon}^2 = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + (\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy})^2) \quad (5.14)$$

$$= 3\dot{\epsilon}_{xx}^2 \quad . \quad (5.15)$$

Für die horizontale Deformationsrate folgt der Ausdruck

$$3\dot{\epsilon}_{xx} = A^{1/3}(3\dot{\epsilon}_{xx}^2)^{1/3} \frac{\rho g H}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right) \quad . \quad (5.16)$$

Die Auflösung in horizontale Geschwindigkeitsgradienten ergibt schließlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3A \left(\frac{\rho g H}{6} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right) \right)^3 \quad , \quad (5.17)$$

jeweils senkrecht zur Eisfront.

Für die transversale Geschwindigkeit folgt aus der Annahme der Scherfreiheit an der Grenzfläche, daß

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.18)$$

sein muß.

5.2 Einströmgebiete und Eisscheiden

Für die detaillierte Betrachtung verschiedener Spezialfälle ist es nicht immer möglich, ein Modell für die gesamte Fließlinie eines Systems zu erstellen, da eine hohe räumliche Auflösung auch einen hohen Rechenaufwand erfordert. Daher werden zum Beispiel Teile des Einzugsgebietes nur als Liefergebiet betrachtet und ihr Beitrag zur Massenbilanz als Massenfluß über einen Rand des Modells definiert. Hierbei werden die für den Fluß nötigen Parameter Geschwindigkeit und Eisdicke als Randbedingung definiert.

Wird ein vollständiges Fließsystem von der Eisscheide bis zur Eisfront in einem Modell betrachtet, so werden für die Eisscheide die horizontalen Geschwindigkeiten Null gesetzt. Die horizontale Ableitung der Eisdicke ist durch die Definition einer Eisscheide ebenfalls zu Null vorgegeben.

Gebiete, für die *no slip* Bedingungen definiert sind, werden wie Eisscheiden behandelt.

Die Angabe der Randwerte für einströmende Eismassen gestaltet sich etwas problematischer. Grundsätzlich müßte für den allgemeinen Fall erst ein vollständiges Eisschildmodell gerechnet werden, aus dem dann für einen beliebigen Querschnitt die entsprechenden Werte entnommen und als Randbedingungen verwendet werden können.

Normalerweise werden für Einströmgebiete jedoch besondere Annahmen gemacht, was beispielsweise die Fließrichtung betrifft. Für einen uniaxialen Einstrom senkrecht zum betrachteten Rand ist es möglich, aus den Beziehungen für scherungsdominiertes Fließen (Eisschildapproximation, in genügend großer Entfernung zur Übergangszone) eine Beziehung der vertikalen Verteilung der Horizontalgeschwindigkeit abzuleiten. Die transversale Geschwindigkeit muß dabei Null sein, was für achsenparallelen Einstrom erfüllt ist. Eine solche Beziehung wurde von Herterich (1987) entwickelt und wird hier in leicht abgewandelter Form dargestellt:

$$u(z) = -\frac{2A}{n+1}(\rho g)^n \left| \frac{\partial(H+h)}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial(H+h)}{\partial x} H^{n+1} \left(1 - \left(1 - \frac{z-h}{H} \right)^{n+1} \right). \quad (5.19)$$

Für die Festlegung der Randbedingung verbleiben damit zwei Möglichkeiten:

1. Es werden die Eismächtigkeit und die Oberflächengeschwindigkeit auf dem Rand beschrieben (was sozusagen der Einstrommenge entspricht). Damit ergibt sich für $z = H + h$ die Neigung der Eisoberfläche und damit eine Neumannbedingung für die Eismächtigkeit. Die vertikale Geschwindigkeitsverteilung wird dann aus Gleichung 5.19 berechnet.
2. Eismächtigkeit und Neigung der Oberfläche beschreiben vollständig die Geometrie des Eiskörpers am Rand. Die vertikale Geschwindigkeitsverteilung wird damit als freie Randbedingung aus Gleichung 5.19 ermittelt.

Die Ableitung der Geschwindigkeit über den Rand erfolgt in beiden Fällen mit Hilfe der Massenbilanzgleichung 4.27.

5.3 Eisober- und Eisunterseite

In den vorhergehenden Abschnitten wurden die lateralen Berandungen einer Modelldomäne betrachtet. Durch die vertikale Normierung des Systems wurden die Kontaktflächen des Eiskörpers mit angrenzenden Medien in jeweils die oberste bzw. unterste Schicht des numerischen Gitters gelegt. Damit können für die obere und untere Modellberandung einheitliche Übergangsbedingungen in Abhängigkeit des benachbarten Materials angegeben werden.

5.3.1 Die Kontaktfläche Eis – Luft

Für die Dynamik eines Eiskörpers sind angreifende Kräfte atmosphärischer Strömungen vollständig zu vernachlässigen. An der Oberfläche findet somit keine Kraftübertragung statt. Allerdings hat die Oberflächentopographie Einfluß auf die

Randbedingung. Nach MacAyeal (1995) gilt für einen spannungsfreien Rand

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_s = 0 \quad , \quad (5.20)$$

wobei \mathbf{T} den resultierenden Spannungsvektor und \mathbf{n}_s den senkrecht nach außen weisenden Einheitsvektor darstellt.

In Komponenten aufgelöst ergibt sich daraus (f_s Koordinate der Oberfläche)

$$\sigma_{xx} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial f_s}{\partial y} - \tau_{xz} = 0 \quad , \quad (5.21)$$

$$\tau_{yx} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial f_s}{\partial y} - \tau_{yz} = 0 \quad \text{und} \quad (5.22)$$

$$\tau_{zx} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial f_s}{\partial y} - \sigma_{zz} = 0 \quad . \quad (5.23)$$

Da der atmosphärische Druck bei der Modellierung vernachlässigt wird, kann der isotrope Druckanteil $1/3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ gleich Null gesetzt werden. Die obigen Gleichungen (5.21 – 5.23) gelten somit auch analog für die deviatorischen Spannungen. Durch Anwendung des Fließgesetzes 4.12 folgen die Ausdrücke für die Scherdeformationsraten:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\epsilon}_{xx} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \dot{\epsilon}_{xy} \frac{\partial f_s}{\partial y} \quad \text{und} \quad (5.24)$$

$$\dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{yx} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \dot{\epsilon}_{yy} \frac{\partial f_s}{\partial y} \quad . \quad (5.25)$$

Zusammen mit der Oberflächenbedingung für die vertikale Geschwindigkeit ($a =$ Akkumulationsrate, positiv für Materialzutrag)

$$w = u \frac{\partial f_s}{\partial x} + v \frac{\partial f_s}{\partial y} - a \quad (5.26)$$

folgen die Neumann – Bedingungen für die Eisoberfläche:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{und} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial f_s}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial f_s}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \quad . \quad (5.28)$$

5.3.2 Der Eis – Wasser – Übergang an der Schelfeisunterseite

Ebenso wie an der Oberfläche werden Strömungen des Wassers als angreifende Kräfte an der Unterkante der schwimmenden Eisplatte vernachlässigt. Das Wasser überträgt keine Scherkräfte, aber im Gegensatz zu den Verhältnissen an der Oberfläche muß hier der hydrostatische Druck berücksichtigt werden, der durch eine Gegenkraft aus dem Eis kompensiert werden muß (MacAyeal, 1995). Es ist

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_b = -\rho g H \mathbf{n}_b \quad . \quad (5.29)$$

Hier ist ebenfalls \mathbf{T} der resultierende Spannungsvektor, \mathbf{n}_b der senkrecht nach außen weisende Einheitsvektor und H die Eismächtigkeit.

Es ergeben sich analog zu den Gleichungen 5.21 – 5.23 Ausdrücke für die Schelfeisunterseite f_b :

$$\sigma_{xx} \frac{\partial f_b}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial f_b}{\partial y} - \tau_{xz} = -\rho g H \frac{\partial f_b}{\partial x} \quad , \quad (5.30)$$

$$\tau_{yx} \frac{\partial f_b}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial f_b}{\partial y} - \tau_{yz} = -\rho g H \frac{\partial f_b}{\partial y} \quad \text{und} \quad (5.31)$$

$$\tau_{zx} \frac{\partial f_b}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial f_b}{\partial y} - \sigma_{zz} = \rho g H \quad . \quad (5.32)$$

Da der isotrope Druckanteil an der Eisunterseite nicht verschwindet, folgt

$$\tau_{xx} \frac{\partial f_b}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial f_b}{\partial y} - \tau_{xz} + \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \frac{\partial f_b}{\partial x} = -\rho g H \frac{\partial f_b}{\partial x} \quad , \quad (5.33)$$

$$\tau_{yx} \frac{\partial f_b}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial f_b}{\partial y} - \tau_{yz} + \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \frac{\partial f_b}{\partial y} = -\rho g H \frac{\partial f_b}{\partial y} \quad \text{und} \quad (5.34)$$

$$\tau_{zx} \frac{\partial f_b}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial f_b}{\partial y} - \tau_{zz} + \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \rho g H \quad . \quad (5.35)$$

Nach Einsetzen des isotropen Druckes aus Gleichung 5.35 in die Gleichungen 5.33 und 5.34 und einigen Umformungen werden verhältnismäßig komplizierte Spannungsbeziehungen für die vertikale Scherspannung in x - Richtung

$$\begin{aligned} & \tau_{xx} \left(\left(\frac{\partial f_b}{\partial y} \right)^2 - 1 \right) \left(\frac{\partial f_b}{\partial x} \right) - \tau_{yy} \left(\frac{\partial f_b}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial f_b}{\partial x} \right) - \\ & - \tau_{xy} \left(\left(\frac{\partial f_b}{\partial x} \right)^2 - \left(\left(\frac{\partial f_b}{\partial y} \right)^2 - 1 \right) \right) \frac{\partial f_b}{\partial y} + \\ & + \tau_{xz} \left(\left(\left(\frac{\partial f_b}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) \left(\left(\frac{\partial f_b}{\partial y} \right)^2 - 1 \right) + \left(\frac{\partial f_b}{\partial x} \frac{\partial f_b}{\partial y} \right)^2 \right) = -\tau_{zz} \frac{\partial f_b}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.36)$$

und analog in y - Richtung erhalten. Typisch auftretende Maximalneigungen für Schelfeisunterseiten liegen bei einem Wert von etwa 0.06 (oder 6 %) (aus der analytischen Lösung von Van der Veen (1986)). Daher lassen sich alle Neigungsterme quadratischer und höherer Ordnung gegenüber "eins" vernachlässigen. Die Gleichungen vereinfachen sich damit zu

$$\tau_{xz} = (\tau_{xx} - \tau_{zz}) \frac{\partial f_b}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial f_b}{\partial y} \quad \text{und} \quad (5.37)$$

$$\tau_{yz} = (\tau_{yy} - \tau_{zz}) \frac{\partial f_b}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial f_b}{\partial x} \quad . \quad (5.38)$$

Mit Hilfe des Fließgesetzes aus Gleichung 4.12 gelangt man zu den endgültigen Beziehungen der Deformationsraten an der Unterseite des Schelfeises:

$$\dot{\epsilon}_{xz} = (\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{zz}) \frac{\partial f_b}{\partial x} + \dot{\epsilon}_{xy} \frac{\partial f_b}{\partial y} \quad \text{und} \quad (5.39)$$

$$\dot{\epsilon}_{yz} = (\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{zz}) \frac{\partial f_b}{\partial y} + \dot{\epsilon}_{xy} \frac{\partial f_b}{\partial x} \quad . \quad (5.40)$$

Durch die Substitution der Ausdrücke für die Deformationsraten mit den entsprechenden Geschwindigkeitsableitungen in der skalierten Form, Vernachlässigung der auftretenden quadratischen Neigungsterme und Auflösung der Gleichungen nach den vertikalen Ableitungen, ergeben sich folgende Neumann - Bedingungen für die Ober- bzw. Unterseite des Eiskörpers in x - Richtung:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = H \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f_s}{\partial y} - u \frac{\partial^2 f_s}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 f_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial a}{\partial x} \right), \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = H \left(3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f_b}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial f_b}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f_b}{\partial y} - u \frac{\partial^2 f_b}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 f_b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial a_b}{\partial x} \right) \quad (5.42)$$

und analog die Ableitungen für die Geschwindigkeit v in y - Richtung.

5.3.3 Die untere Grenzfläche in einem Eisschild

In Bereichen, in denen das Eis auf festem Untergrund aufliegt, hängt die Grenzflächenbedingung an der Unterseite von den herrschenden thermischen Verhältnissen ab. Ist die Temperatur des Eises an der Grenzfläche gleich dem Druckschmelzpunkt ($T = T_0 - \beta p$, mit $T_0 = 273,16$ K und $\beta = 7,42 \times 10^{-5}$ K(kPa) $^{-1}$), für reines Eis, (Paterson, 1994, S.212), kann der Eiskörper auf dem darunterliegenden Bett gleiten. Im allgemeinen unterscheidet man bei diesen *temperierten* Bedingungen zwei Arten des Gleitens:

1. Das Eis bewegt sich auf einer Wasserschicht über dem starren, festen Untergrund.
2. Ist als Übergangszone eine Schicht deformierbarer, wassergesättigter Sedimente eingelagert, kann sich das Material auch durch Verschiebungen innerhalb des Sediments auf der Unterlage bewegen (Paterson, 1994).

Für Temperaturen unterhalb des Druckschmelzpunktes ist das Eis am Untergrund festgefroren und der Massentransport findet allein durch interne Deformation statt. Basales Gleiten, ob auf einer Wasserschicht oder durch Sedimentdeformation, ist ein schwierig zu beschreibender Prozeß.

Verschiedene Autoren beschreiben das Gleiten über festen Untergrund (Kamb, 1970; Morland, 1976; Fowler, 1979; Fowler, 1987; Lliboutry, 1987) wie auch das Gleiten über deformierbaren Sedimenten (Alley et al., 1987c; Boulton und Hindmarsh, 1987; MacAyeal, 1989; Kamb, 1991) mit unterschiedlich detaillierten Ansätzen. Für den einfachsten Fall muß für ein anwendbares Gleitgesetz über festem Untergrund ein Zusammenhang zwischen basaler Scherspannung τ_b , der Gleitgeschwindigkeit u_b und dem effektiven Druck ($N = p_e - p_w$) gefunden werden (Lliboutry, 1987). Eine mögliche Beziehung stellt

$$\tau_b = cu_b^n N^{1-nr} \quad (5.43)$$

mit einer Konstanten c der Bettrauhigkeit, $r > 0$ und n aus dem Glen'schen Fließgesetz, dar (A.C. Fowler, pers. Mitteilung). Dies bedeutet, daß die Scherspannung mit steigender Geschwindigkeit zunimmt, für höheren effektiven Druck und damit einem stärkeren "Aufschwimmen" des Eiskörpers jedoch abnimmt. Bisher wurde basales

Gleiten noch nicht in das Modell integriert.

Die Annahme *kalter* Verhältnisse bedeutet, daß das Eis am Untergrund festgefroren ist. Eine Bewegung in der Grenzschicht findet nicht statt. Die Geschwindigkeitsdifferenz von der bewegten Oberfläche zur stationären Unterseite erfordert starke Scherkräfte im Inneren des Eiskörpers. Die Randbedingung für die Geschwindigkeiten ist eine einfache Dirichlet – Bedingung:

$$u = v = w = 0 \quad . \quad (5.44)$$

Damit sind für alle Randübergänge des Modells Gleichungen zur Beschreibung der Geschwindigkeitskomponenten gegeben.

5.4 Der Randübergang für die Eismächtigkeit

In prognostischen Rechnungen zur Evolution von glazialen Systemen wird neben der Ermittlung der Geschwindigkeiten auch die zeitliche Variation der Eisdicke berechnet. Zur vollständigen Beschreibung des Systems ist es daher notwendig, Randbedingungen für die Mächtigkeit des Modellkörpers zu beschreiben. Dies ist allerdings wesentlich weniger kompliziert als für die Geschwindigkeiten.

Für seitliche Ränder mit *free slip* wie auch *no slip* Bedingungen muß die horizontale Ableitung senkrecht zum Rand gleich *Null* sein. Die Eismächtigkeiten werden gleich denen der benachbarten inneren Gitterpunkte gesetzt.

An Rändern, über die ein Massenfluß stattfinden soll, wird die Eismächtigkeit, wie schon in Kapitel 5.2 erwähnt, entsprechend definiert.

Randgebiete, die als Schelfeisfront behandelt werden, unterliegen, wie auch das Modellinnere, dem Gesetz der Massenerhaltung. Daher läßt sich hier die Massenbilanzgleichung 4.26 für die Bestimmung der Eisdicke auf dem Rand verwenden. Es folgt:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1/\bar{u} \left(a - H \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial H \bar{v}}{\partial x} \right) \quad . \quad (5.45)$$

Kapitel 6

Formulierung in Finiten Differenzen

Grundlage für die Beschreibung des physikalischen Verhaltens eines Systems und seiner Reaktion auf die Einwirkung innerer und äußerer Kräfte ist die Anwendung der geeigneten physikalischen Gesetze auf die einzelnen Komponenten des Systems. Im Falle eines homogenen Materials, wie es etwa Eis darstellt, werden die entsprechenden einheitlichen Beziehungen von Kraft und Bewegung möglichst gleichmäßig über das betrachtete Gebiet verteilt berechnet. Es bietet sich an, dieses Gebiet, unter Berücksichtigung seiner Form und Dimension, durch ein regelmäßiges Gitter zu unterteilen. An den Schnittpunkten des Gitters werden dann die erforderlichen physikalischen Parameter in Abhängigkeit von den benachbarten Gitterpunkte bestimmt. Zur vollständigen und physikalisch sinnvollen Beschreibung eines Systems ist es erforderlich, daß die Dimensionierung des Gitters kleiner ist als die charakteristische Wellenlänge der erwarteten Phänomene. Andernfalls "übersieht" das Verhalten des Modellkörpers eventuell auftretende rasche Änderungen des Systemzustandes und spiegelt nicht das physikalisch korrekte Verhalten wieder.

Für die Anwendung der meist für ein Kontinuum entwickelten physikalischen Gesetze ist es notwendig, diese in eine diskrete Form zu überführen. Eine solche Form kann dann auf das finite Gitter des Modells angepaßt werden. Grundsätzlich stehen für diese Umsetzung mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Am weitesten verbreitet sind dabei die Methoden der Finiten Differenzen und der Finiten Elemente. Während mit der Methode der Finiten Elemente zwischen den Gitterpunkten (oder korrekter den *Elementknoten*) die Funktion durch stetige Polynome interpoliert wird, erhält man die Annäherung an die Lösung mit den Finiten Differenzen durch Taylorreihenentwicklung der Funktion auf den Intervallen zwischen den Gitterpunkten (Lapidus und Pinder, 1982).

Eisdynamische Probleme lassen sich meist auf abgeschlossenen Gebieten definieren. Durch die vertikale Skalierung ist es nicht notwendig, bewegliche Gittergrenzen in der Senkrechten zu definieren. Die Finite-Differenzen-Methode bietet auf einem regelmäßigen und zeitlich konstanten Gitter Vorteile in der Überschaubarkeit und Anpassung der Formulierungen. Daher wurde diese Methode als Lösungsverfahren für das eisdynamische Modell gewählt. Im folgenden wird mit einem kartesischen Koordinatensystem gearbeitet. Die vertikale (z -) Achse weist positiv nach oben. Das in ein gleichmäßiges Gitter unterteilte Untersuchungsgebiet ist in Abb. 6.1 dargestellt.

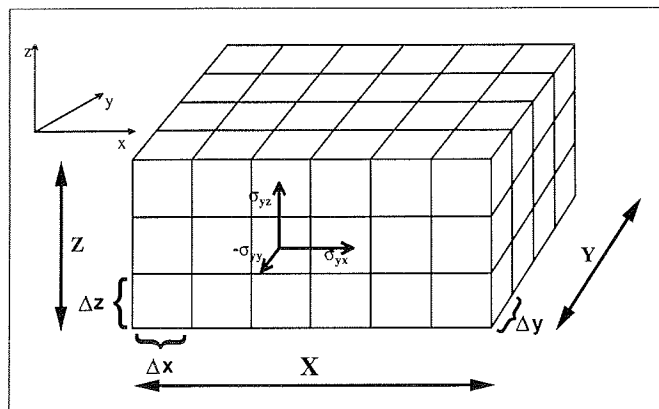


Abbildung 6.1: Diskretisierung eines Untersuchungsgebietes in einem kartesischen Koordinatennetz. Angedeutet sind die Spannungen, die auf eine diskrete Fläche wirken. X , Y und Z stellen die jeweilige Gesamtausdehnung in den Koordinatenrichtungen dar.

Der Abstand zwischen den einzelnen Gitterpunkten wird dabei als Bruchteil der Gesamtausdehnung in der jeweiligen Richtung beschrieben (Δx , Δy und Δz).

6.1 Das Diskretisierungsschema

Die Methode der Finiten Differenzen ist in der einschlägigen Literatur (Marsal, 1976; Lapidus und Pinder, 1982; Press et al., 1992) eingehend beschrieben. Hier soll nur noch ein kurzer Überblick über die Umsetzung einer Differentialgleichung in eine diskretisierte Form gegeben werden. Danach folgt eine eingehendere Betrachtung des speziellen Problems.

6.1.1 Taylorreihenentwicklung einer stetigen Funktion

Eine stetige und innerhalb ihres Definitionsbereiches $(n + 1)$ -mal differenzierbare Funktion kann an einem Punkt $(x_s + d)$ durch eine Reihenentwicklung der Funktion selbst und ihrer n Ableitungen am Punkt x_s dargestellt werden (Bronstein und Semendjajew, 1984):

$$f(x_s + d) = f(x_s) + df^1|_s + \frac{d^2}{2!}f^2|_s + \frac{d^3}{3!}f^3|_s + \cdots + \frac{d^n}{n!}f^n|_s + R_n(x_s) \quad (6.1)$$

Wobei f^ν die ν -te Ableitung der Funktion f nach x bedeutet. $R_n(x_s)$ ist das *Lagrangesche Restglied* der Taylorentwicklung.

Diese Entwicklung kann auch für f an der Stelle $(x_s - d)$ geschrieben werden:

$$f(x_s - d) = f(x_s) - df^1|_s + \frac{d^2}{2!}f^2|_s - \frac{d^3}{3!}f^3|_s + \cdots + \frac{d^n}{n!}f^n|_s + R_n(x_s) \quad (6.2)$$

Wird Gleichung 6.2 von Gleichung 6.1 subtrahiert und die erhaltene Beziehung nach der ersten Ableitung aufgelöst, ergibt sich:

$$f^1|_s = \frac{f(x_s + d) - f(x_s - d)}{2d} - \frac{d^2}{3!} f^3|_s - \dots - \frac{d^{(n-1)}}{n!} f^n|_s - \frac{1}{d} R_n(x_s) \quad (6.3)$$

Unter Berücksichtigung eines Fehlers O , dessen Größenordnung durch den größten vernachlässigten Term beschrieben wird (Lapidus und Pinder, 1982), ist

$$f^1|_s = \frac{f(x_s + d) - f(x_s - d)}{2d} - O(d^2) \quad (6.4)$$

ein einfacher, diskreter Ausdruck für die erste Ableitung der Funktion f in x -Richtung.

Analog können auch Differenzen für höhere Ableitungen gefunden werden. Zu beachten ist allerdings, daß für die Stabilität des gesamten Gleichungssystems die Fehler der einzelnen Diskretisierungen dieselbe Fehlerordnung aufweisen müssen (Press et al., 1992).

6.1.2 Die diskreten Ableitungen

In einem Ausschnitt des diskreten Gitters (Abb. 6.2) werden die Zählindizes i (in x -), j (in y -) und k (in z -Richtung) für die jeweilige Gitterpunktsnummer ausgehend vom Koordinatenursprung definiert. Damit ist die Position eines Gitterpunktes im Koordinatensystem durch die Abstände $i \cdot \Delta x$, $j \cdot \Delta y$ und $k \cdot \Delta z$ entlang der Achsen festgelegt.

Nach Lapidus und Pinder (1982) werden für die in den Bewegungsgleichungen 4.20 auftretenden Ableitungen folgende Diskretisierungen verwendet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - O(\Delta x^2) \quad , \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2) \quad \text{und} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} - O(\Delta x \Delta y) \quad . \quad (6.7)$$

Für Differentialterme verschiedener Variablen werden die Ableitungen aus Stabilitätsgründen vor der Diskretisierung nicht ausdifferenziert. Damit die Geschwindigkeitsdifferenzen nach wie vor mit den Nachbarpunkten gebildet werden können, wird ein Halbschrittgitter (Abb. 6.2, rechts) eingeführt. Die schrittweise Ausführung der Differenzenbildung ergibt dann:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{\Delta x^2} \left(B_{+1/2i} (u_{i+1} - u_i) - B_{-1/2i} (u_i - u_{i-1}) \right) - O(\Delta x^2), \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(B_{+1/2i} (u_{j+1} - u_{j-1} + u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) \right. \\ &\quad \left. - B_{-1/2i} (u_{j+1} - u_{j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}) \right) - O(\Delta x \Delta y) \end{aligned} \quad (6.9)$$

und analog für Ableitungen in anderen Koordinatenrichtungen.

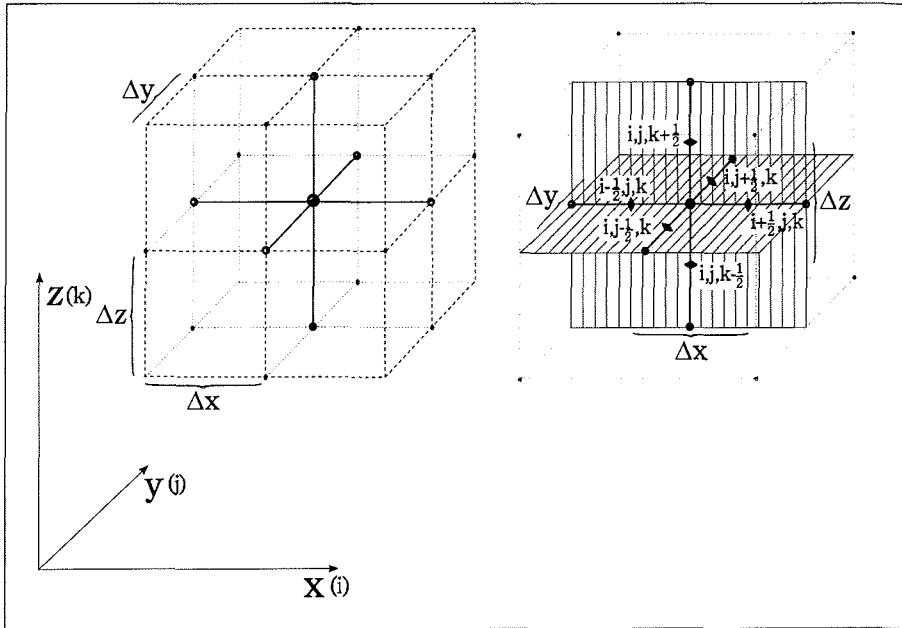


Abbildung 6.2: Diskretisierung des Modells in einem kartesischen Koordinatensystem. Der linke Kubus beschreibt einen Gitterpunkt mit seinen sechs direkten Nachbarn (mittelgroße Punkte in der Graphik). Die vollständige Differenzgleichung für den Zentralpunkt benutzt auch Variablen auf den Flächen durch die Nachbarpunkte (kleine Punkte). Im rechten Kubus sind die diskreten Halbschritte des Modells dargestellt (Rauten), an denen neben anderen Koeffizienten auch die effektive Deformationsrate bestimmt wird.

Mit diesen Schemata können die Gleichungen 4.20 in der Form Finiter Differenzen dargestellt werden (siehe Anhang B).

6.2 Die Lösung eines linearen Gleichungssystems

Die ausdifferenzierten Gleichungen (B.1 und B.2) erinnern, wird B vorläufig als *Konstante* beibehalten, an ein gekoppeltes lineares Gleichungssystem. Aus der Tensorform der einwirkenden Spannungen (siehe Kapitel 4.1) resultiert indirekt eine diagonale Bandmatrix für die Koeffizienten des Gleichungssystems.

Numeriert man die Gitterpunkte kontinuierlich nach aufsteigenden Koordinatenindizes (Abb. 6.3) und schreibt die diskreten Gleichungen untereinander, bilden die Differenzen - Komponenten (in Abb. 6.2 links, als Punkte markiert) die einzigen nicht verschwindenden Elemente eines Gleichungssystems (hier exemplarisch nur für $\partial^2 \mathbf{u} / \partial x^2 = \mathbf{R}$ hingeschrieben):

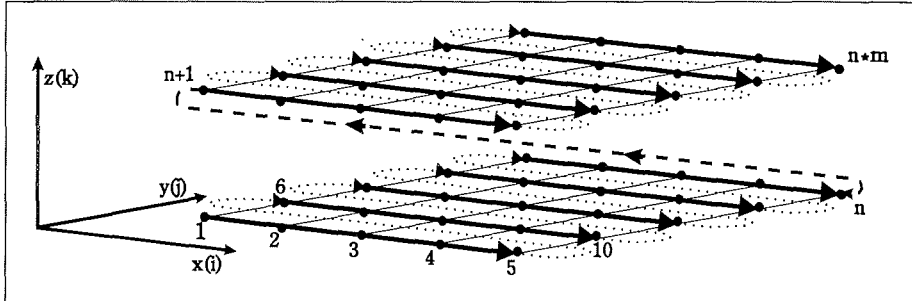


Abbildung 6.3: Numerierungsschema der Gitterpunkte für die Lösung des Gleichungssystems. Abweichend von der Koordinatenzuordnung (i, j, k) für die Differenzenbildung werden die Gitterpunkte von unten nach oben jeweils nach aufsteigendem i und aufsteigendem j durchnummeriert. Dabei ist $n = I \times J$ die Anzahl der Gitterpunkte in einer Schicht und m gleich der Anzahl der Schichten im Modell.

$$\begin{array}{cccccc}
 A_{11}u_1 + & A_{12}u_2 + & & 0 + & & 0 = R_1 \\
 A_{21}u_1 + & A_{22}u_2 + & & A_{23}u_3 + & & 0 = R_2 \\
 & 0 + & A_{32}u_2 + & A_{33}u_3 + & A_{34}u_4 + & 0 = R_3 \\
 & 0 + & \dots + & \dots + & \dots + & 0 = \dots \\
 & 0 + & \vdots & \vdots & \vdots & 0 = \vdots \\
 & 0 + & \dots + & A_{i(i-1)}u_{i-1} + & A_{ii}u_i + & A_{i(i+1)}u_{i+1} + \dots = R_i \\
 & 0 + & \dots + & \dots + & \dots + & 0 = \dots \\
 & 0 + & \vdots & \vdots & \vdots & 0 = \vdots \\
 & 0 + & \dots + & A_{(n-1)(n-2)}u_{n-2} + & A_{(n-1)(n-1)}u_{n-1} + & A_{(n-1)n}u_n = R_{n-1} \\
 & 0 + & \dots + & \dots + & A_{n(n-1)}u_{n-1} + & A_{nn}u_n = R_n
 \end{array}$$

Aus der ersten Zeile ist ersichtlich, daß manche Komponenten (hier A_{10}) nicht auftauchen. Dies sind jeweils die Differenzen, die über den Rand des Modells hinausreichen und die auf der rechten Seite mit den angreifenden äußeren Kräften zusammengefaßt werden.

Dieses System kann in Matrixform geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix}
 A_{11} + & A_{12} + & & 0 + & & 0 + \dots + 0 \\
 A_{21} + & A_{22} + & & A_{23} + & & 0 + \dots + 0 \\
 & 0 + & A_{32} + & A_{33} + & A_{34} + & \dots + 0 \\
 & 0 + & \dots + & \dots + & \dots + & \dots + 0 \\
 & 0 + & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 0 + & \dots + & A_{(n-1)(n-2)} + & A_{(n-1)(n-1)} + & A_{(n-1)n} \\
 & 0 + & \dots + & \dots + & A_{n(n-1)} + & A_{nn}
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \dots \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ R_n \end{pmatrix}$$

Prinzipiell ist solch eine lineare Matrixgleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{R}$ für n unbekannte Geschwindigkeiten u_i mit n Randbedingungen R_i eindeutig bestimmt und analytisch lösbar. Die durchzuführenden Matrixoperationen erfordern allerdings bei größeren Modellen mit vielen Gitterpunkten einen erheblichen Organisations- und Speicheraufwand. Die Anzahl der arithmetischen Operationen zur Invertierung der Matrix A kann um ein Vielfaches höher sein als bei einer iterativen Lösung (Lapidus und

Pinder, 1982). Daher ist es unumgänglich, für große und nichtlineare Systeme eine numerische Methode anzuwenden.

Ein einfaches numerisches Lösungsverfahren ist die Punkt - Relaxationsmethode (Press et al., 1992). Die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} wird in drei Teilmatrizen $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$ aufgespaltet, wobei \mathbf{D} nur die Hauptdiagonalelemente enthält. \mathbf{L} und \mathbf{U} sind die obere und untere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonalen. Eine Aufspaltung der Matrixgleichung ergibt (Lapidus und Pinder, 1982): $\mathbf{u} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{u} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}$. Die Zuordnung der rechten und linken Seite der Gleichung zu jeweils verschiedenen Iterationsstufen resultiert in einer der grundlegendsten Varianten der Punkt - Relaxations Methoden, die *Jacobi-Iteration*:

$$\mathbf{u}^{(r+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{u}^{(r)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{R} \quad , \quad (6.10)$$

wobei r gleich der Anzahl der bisher durchgeführten Iterationen ist.

Mit einer ersten "geratenen" Lösung von $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$ wird das Residuum der Gleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{R} = \mathbf{Res}^{(0)}$ bestimmt. Das Residuum muß für die exakte Lösung verschwinden. Eine Umformulierung von Gleichung (6.10) ergibt ein einfaches Iterationsschema zur Aktualisierung der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten u_i :

$$u_i^{(r+1)} = u_i^{(r)} - a_i^{-1} Res_i^{(r)} \quad . \quad (6.11)$$

a_i ist das entsprechende Element für die Geschwindigkeit u_i aus der Koeffizientenmatrix.

Es läßt sich zeigen, daß diese Methode ein verhältnismäßig schlechtes Konvergenzverhalten hat. Für eine einfache Poisson-Gleichung in zwei Dimensionen beträgt die Anzahl der benötigten Iterationen $n_r = 0,5 pJ^2$, um die Lösung auf p Stellen genau zu bestimmen (Press et al., 1992). J ist dabei die Anzahl der Gitterpunkte in einer Dimension.

Eine deutlich verbesserte Konvergenz wird mit dem sogenannten *SOR* - Verfahren (*successive overrelaxation*) erreicht. Dabei werden jeweils die bereits aktualisierten Werte des laufenden Iterationszyklus für die folgenden Geschwindigkeitsberechnungen verwendet. Zusätzlich wird ein Faktor ω eingeführt, der die Größe des Korrekturterms beeinflusst und damit künftige Korrekturen sozusagen vorwegnimmt (Press et al., 1992),

$$\mathbf{u}^{(r+1)} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{u}^{(r)} + \omega(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{R} \quad . \quad (6.12)$$

Allerdings ist es offensichtlich, daß die Wahl von ω entscheidenden Einfluß auf das Verhalten des Systems hat. Eine Konvergenz kann nur für einen Wert von ω zwischen null und zwei erreicht werden. "SOR" bezeichnet den Bereich $1 < \omega < 2$. Die Größe dieses Relaxationsparameters wird im wesentlichen vom spektralen Radius ρ_s der Iterationsmatrix $[(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}]$ bestimmt. Dieser ist definiert als der Betrag des maximalen Eigenwertes der Matrix, dessen Bestimmung sehr aufwendig ist. In den meisten komplexeren Fällen muß auf eine Abschätzung zurückgegriffen werden. Für eine optimale Wahl von ω beträgt die Konvergenzrate für das oben genannte Problem: $n_r = 1/3pJ$, was eine wesentliche Verbesserung gegenüber der *Jacobi* - Methode bedeutet (Press et al., 1992).

6.3 Anpassung an die Bewegungsgleichungen der Eisdynamik

Die linearisierte Behandlung der effektiven Deformationsrate ist eine wesentliche Annahme für die numerische Lösung der eisdynamischen Beziehungen mit einer Relaxationsmethode. Die Änderung von $\dot{\epsilon}$ zwischen zwei Iterationsschritten muß um Größenordnungen kleiner sein als die Änderung des Residuums. Da die effektive Deformationsrate den gemittelten Deformationszustand über das gesamte System darstellt, kann angenommen werden, daß dieser sehr viel kleiner ist als die Änderung der Einzeldeformationsraten. Dies bestätigt sich auch in den numerischen Experimenten.

Damit ergibt sich die Möglichkeit, eine errechnete effektive Deformationsrate über mehrere Iterationsschritte als Konstante zu behandeln. Dieses "linearisierte" System besitzt gegenüber einem echt - linearen System allerdings ein wesentlich schlechteres Konvergenzverhalten.

Für den uniaxialen Fall (nur eine Geschwindigkeitskomponente) der Bewegungsgleichung (4.20) besitzt das diskretisierte Gleichungssystem anstatt drei fünfzehn nichtleere Diagonalen (siehe Anhang **B**). Die vollständigen Gleichungen für zwei unabhängige Geschwindigkeitskomponenten bilden ein gekoppeltes System, bei dem jedes nichtleere Element der Matrix aus einer 2×2 -Untermatrix besteht. Die entsprechenden Positionen der Geschwindigkeit und der Randbedingungen bestehen aus Vektoren der Länge zwei. Dann allerdings besitzt das diskretisierte Gleichungssystem insgesamt 19 mit 2×2 -Matrizen besetzte Diagonalen.

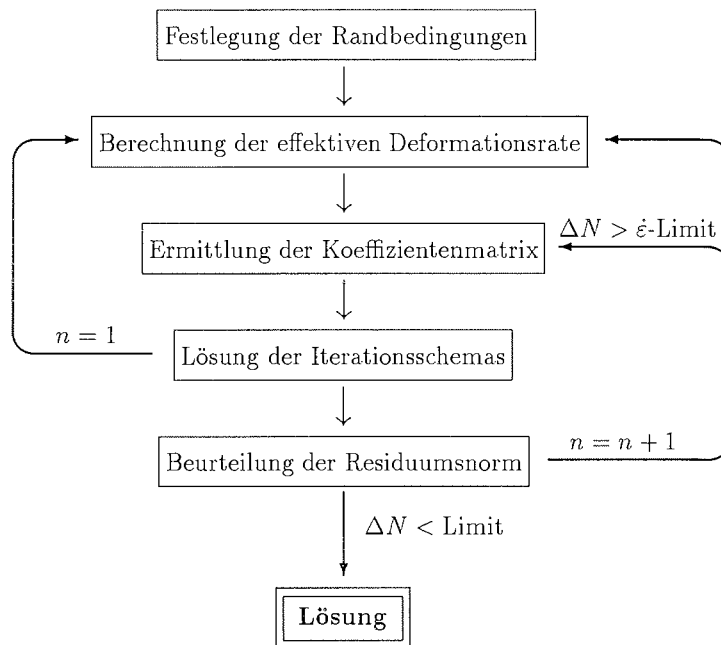
Das Iterationsschema wird analog zum eindimensionalen Fall gebildet. Statt der Einzelkomponenten werden nun die 2×2 -Matrizen verwendet:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(r+1)} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(r)} - \omega \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Res(u) \\ Res(v) \end{pmatrix}^{(r)}. \quad (6.13)$$

Als Konvergenzkriterium dient die Änderung der Norm des Residuums. Unterschreitet die Differenz der Norm zwischen zwei Iterationsschritten einen vorher festgelegten Wert, ist die Geschwindigkeitsverteilung des Systems mit der gewünschten Genauigkeit bestimmt.

Eine Reduzierung der notwendigen Iterationen zur Berechnung eines Gleichgewichtszustandes wird mit einer Veränderung der Zählweise im Gitter erreicht. Für eine einfache Poisson-Gleichung sind (mit der hier eingeführten Punktnumerierung) die geradzahigen Punkte nur von Differenzen auf ungeradzahigen Gitterpunkten abhängig und umgekehrt. Für die Bewegungsgleichung (4.20) gilt dies zumindest für die wesentlichen Terme. Daher bietet es sich an, einen Iterationsschritt in zwei Teilschritte aufzuteilen. Als erstes werden alle geradzahigen Gitterpunkte aktualisiert, danach alle ungeraden. Damit wird erreicht, daß die wesentlichen Koeffizienten der Differenzgleichung immer zur selben Iterationsstufe gehören (Press et al., 1992).

Allgemein kann folgendes vereinfachtes Lösungsschema angegeben werden:



Nach dem zweiten Durchlauf wird die Differenz der Residuumsnorm ΔN errechnet. Ist sie größer als ein vorgegebener Grenzwert ϵ - Limit, so wird direkt eine aktualisierte Koeffizientenmatrix berechnet. Konvergiert der Wert unter dieses Limit, wird auch die effektive Deformationsrate an allen Gitterpunkten neu berechnet. Sinkt die Normdifferenz unter das globale Limit, das der geforderten Genauigkeit entspricht, wird der diagnostische Teil des Programms beendet.

6.4 Die numerische Lösung der Eisdickenevolution

Mit Hilfe der Gleichungen (4.20) werden durch das obige Verlaufsschema die Gleichgewichtsgeschwindigkeiten für die aktuelle Eisdickenverteilung berechnet. Dieser aktuelle Zustand weist aber nicht notwendigerweise eine ausgeglichene Massenbilanz auf. Das bedeutet, daß sich die Eismächtigkeiten durch das Geschwindigkeitsfeld solange ändern, bis die antreibenden Kräfte in einem Gleichgewicht zum Massenaustausch stehen. Dieser Mechanismus wird durch die Kontinuitätsgleichung (4.27) beschrieben. Neben der Ermittlung von einzelnen Gleichgewichtszuständen, können damit auch durch die Angabe von zeitlich veränderlichen Randbedingungen prognostische Modelle der Evolution von Eisschilden und Schelfeisen gerechnet werden.

Die lineare Differentialgleichung ähnelt einer Advektionsgleichung und läßt sich im Grunde sehr leicht explizit diskretisieren. Leider ist diese einfache diskrete Form numerisch nicht stabil. Es wird daher eine in Press et al. (1992) dargestellte Lösung mit Hilfe der *staggered leapfrog*-Methode verwendet. Das Verfahren besitzt eine Genauig-

keit zweiter Ordnung in Zeit und Raum, indem für die Zeitableitung der Eismächtigkeiten die Werte des vorhergehenden Zeitschritts verwendet werden, während die räumlichen Ableitungen mit den aktuellen Mächtigkeiten berechnet werden. Entspricht n dem aktuellen Zeitschritt, so läßt sich die neue Eismächtigkeit darstellen als

$$H^{n+1} = H^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{i+1}^n u_{i+1}^n - H_{i-1}^n u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (H_{j+1}^n u_{j+1}^n - H_{j-1}^n u_{j-1}^n) + 2\Delta t A \quad . \quad (6.14)$$

Um sogenannte Gitterdrift-Instabilitäten zu vermeiden, wird eine kleine Additions-konstante eingeführt, die die angrenzenden Gitterpunkte mit einbezieht und so zu einer Art numerischer Dissipation führt:

$$D_i = \alpha(H_{j-1}^n + H_{i-1}^n - 4H^n + H_{i+1}^n + H_{j+1}^n) \quad \text{mit} \quad \alpha \ll 1 \quad . \quad (6.15)$$

Die *Courant* - Bedingung als Kriterium der Stabilität für diese Formulierung lautet:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{2}(u^2 + v^2)} \quad . \quad (6.16)$$

Der maximale Zeitschritt, für den sich das System noch stabil verhält, kann damit in Abhängigkeit der Gitterkonstanten gewählt werden.

Nach der Berechnung eines neuen Zeitschritts werden mit den aktualisierten Eisdicken aus den Bewegungsgleichungen neue Gleichgewichtsgeschwindigkeiten berechnet. Mit diesen kann dann wieder ein Zeitschritt der Modellevolution gerechnet werden. Somit ist ein geschlossener Programmkreislauf erstellt, der für gegebene Anfangsgeometrie und Randbedingungen eine dynamische Lösung von Geschwindigkeiten und Mächtigkeitsverteilung bestimmt.

Kapitel 7

Ein kleiner Einblick in die Realität: Feldstudie und 2D– Modell

Neben dem gesamten Aufwand an Physik, Mathematik, Rechenzeit und graphischen Darstellungen sollte nicht vergessen werden, daß der Untersuchungsgegenstand "Übergangszonen" tatsächlich in der wirklichen Welt existiert. Ihre potentielle Bedeutung für das Verhalten zumindest des westantarktischen Eisschildes ist in Kapitel 1 deutlich gemacht worden. Modellierer sind, soweit sie nicht an rein prinzipiellen Problemen arbeiten, immer auf Informationen aus Feldmessungen angewiesen. Andererseits lassen sich aus den Ergebnissen angewandter Modelle nicht nur Antworten auf globale Fragestellungen ableiten, sie stellen auch die Grundlage für die Planung gezielter Feldexperimente dar.

7.1 Das Ekström '94-Projekt

Glaziologische Studien über Eisgeschwindigkeiten, Deformationsverhältnisse sowie die Bestimmung weiterer Massenbilanzparameter auf dem antarktischen Eiskörper wurden schon ziemlich früh begonnen. In einigen Fällen waren dies großflächig angelegte Netzwerke, die in mehrjährigen Abständen nachvermessen wurden, um die zeitliche Entwicklung, hauptsächlich im Hinblick auf die Gesamtmassenbilanz und die Fließcharakteristik, zu beurteilen. Neben diesen Netzwerken auf dem Inlandeis (Van der Veen und Whillans, 1989b) wurden ausgedehnte Flächen hauptsächlich entlang von Eisströmen und ihrer Fortsetzung auf den Schelfeisen vermessen (Bindschadler et al., 1987; Doake et al., 1987; Thomas et al., 1988). Diese Messungen zielten zusätzlich darauf ab, die Kräfteverhältnisse zwischen Eisstrom, Schelfeis, dem Inlandeis und den passiven Rändern zu bestimmen und die räumliche Mobilität der *grounding line* zu beschreiben. Allerdings standen die großskaligen Verhältnisse und Mechanismen in den Untersuchungsgebieten im Vordergrund.

Für den Südsommer 1993/94 wurde von P. Huybrechts und mir ein Feldexperiment entworfen und durchgeführt, das auf einem begrenzten Raum in der südlichen Übergangszonen des Ekström-Schelfeises die Bestimmung der wichtigsten glaziologischen Parameter beinhaltete. Ziel der Untersuchungen war es, die Fließgeschwindigkeiten und die Deformationsraten an der Oberfläche sowie die Oberflächentopographie und die Eisdicke auf einem Profil über die *grounding line* zu erhalten. Dabei

wurde die Meßpunktentfernung deutlich kleiner als die mittlere Eisdicke in diesem Gebiet gewählt, um auch kleinskalige Effekte in der Übergangszone aufzulösen. Zusammen mit Informationen über die Akkumulation in dieser Region bilden die Daten die Basis für die Modellierung eines vertikalen Schnittes entlang einer Fließlinie über den Grenzbereich zwischen Festlandeis und Schelfeis. Diese Studie erlaubt im zweidimensionalen Rahmen wertvolle Einsicht in die dynamischen Bedingungen dieser kritischen Region. Die Vorwärtsmodellierung von der Oberfläche in die Tiefe ist dabei eng an das Verfahren von Van der Veen und Whillans (1989a) angelehnt.

Das Ekström-Schelfeis befindet sich im atlantischen Sektor am Rande der Ostantarktis und ist mit einer Fläche von 8700 km² eines der kleineren Schelfeise der Antarktis (IfAG (1989), Abb. 7.1). Die seit 1981 bestehende deutsche Forschungsstation *Neumayer* (bis 1991 *Georg-von-Neumayer*) diente als logistische Ausgangsbasis für zahlreiche Untersuchungen auf diesem Schelfeis in den 80er Jahren. Bisher wurde der südlichste Bereich allerdings nur durch wenige Flugradarprofile vermessen (Thyssen und Grosfeld, 1988). Außerdem führten die bisherigen Traversen in das Hinterland 1986, 1988 und 1990 jeweils durch das Untersuchungsgebiet (Fütterer, 1987; Fütterer, 1989; Miller und Oerter, 1991), bei denen Oberflächenhöhenbestimmungen und später auch Pegelablesungen durchgeführt wurden. Im Jahr 1987 wurde als Ausweichprogramm für eine Expedition zum Filchner-Ronne-Schelfeis, die aufgrund der schweren Packeissituation in der südlichen Weddellsee nicht stattfinden konnte, eine intensive glaziologische und geodätische Meßkampagne auf dem Ekström-Schelfeis durchgeführt. Dabei wurden von einer Traversengruppe auf dem Weg über die südliche Schelfeisbegrenzung Daten über Topographie und Akkumulation gesammelt (Miller und Oerter, 1990).

Aus der umgebenden Geländeform folgt, zusammen mit beobachteten Fließgeschwindigkeiten und -richtungen, daß der Hauptmasseneintrag in das Schelfeis über die südlichste Berandung stattfinden muß. Der Eistransport in diesem Gebiet erfolgt zu einem großen Teil durch interne Deformation. Die Ausbildung einer eisstromähnlichen Dynamik ist nirgendwo im Randbereich des Schelfeises zu beobachten.

7.1.1 Feldarbeit und ihre Ergebnisse

Ein relativ spaltenarmer Bereich im Übergang zum gegründeten Eis etwa 120 km südlich der Neumayer-Station, nahe der schon bekannten Traversenroute nach Süden, wurde mit Hilfe der existierenden Vorinformation als Meßgebiet ausgewählt (siehe Abb. 7.1). Auf einem rund 20 km langen Profil in Fließrichtung des Eises wurden auf drei parallelen Linien Meßpunkte im Abstand von 500 m mit Bambusstangen abgesteckt. Die Positionen der Meßpunkte relativ zueinander wurden mit Hilfe terrestrischer Vermessungsmethoden bestimmt. Von jedem Punkt auf der Zentrallinie erfolgte die Beobachtung der Winkel mit einem Theodoliten und der Schrägdistanz mit einem elektronischen Distanzmesser zu punkt-zentrierten Reflektoren auf elf benachbarten Positionen.

Aufgrund visueller Beobachtung bei günstigen Lichtverhältnissen konnte eine Grenzlinie der plötzlichen Änderung des Oberflächengradienten festgestellt werden, die einerseits als die Position einer definierten *grounding line* angesprochen wurde, andererseits einen Hinweis auf das weitgehende Fehlen von basalem Gleiten liefert, da der Anteil des basalen Gleitens an der Gesamtbewegung die Ausdehnung der

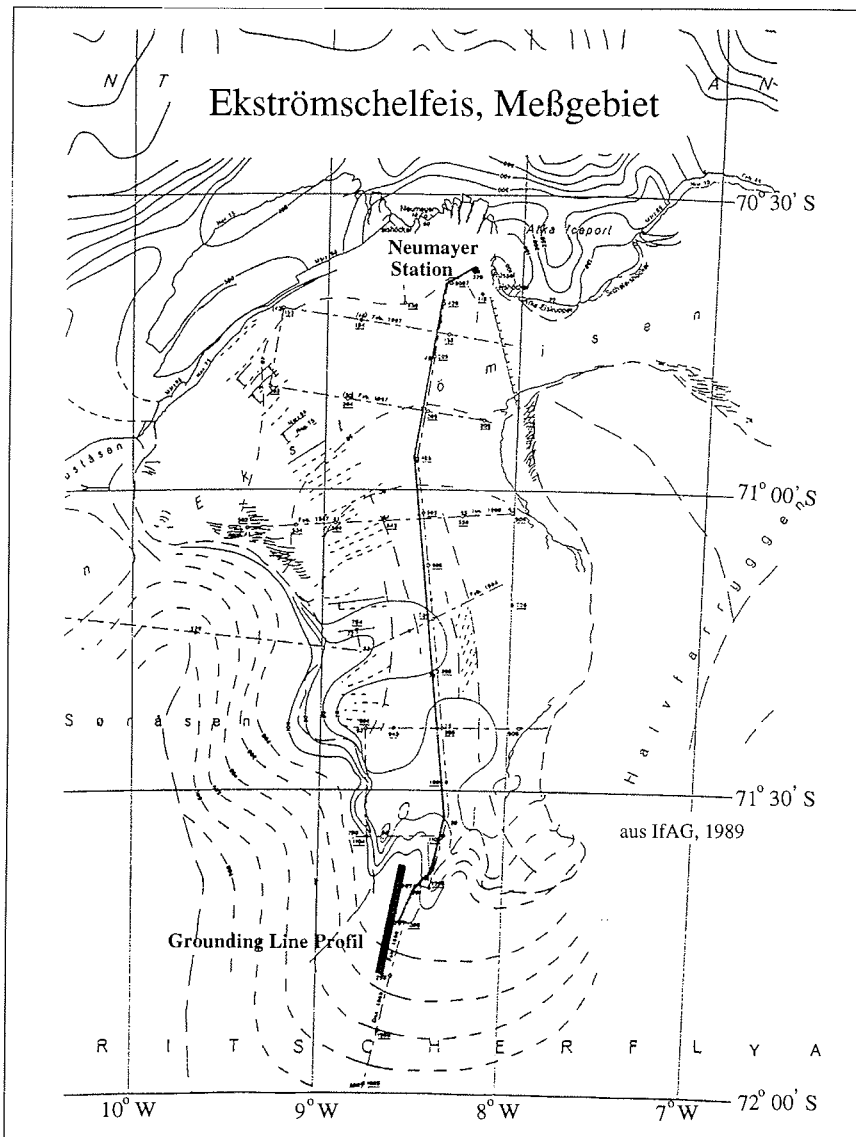


Abbildung 7.1: Übersicht des Ekström-Schelfeises mit der Traversenroute und der Lokation des Untersuchungsgebietes in der südlichen Übergangszone.

Übergangszone positiv beeinflusst (Van der Veen, 1985). Das Meßprofil wird durch die Aufsetzlinie etwa halbiert. Die landwärtige Oberfläche ist durch langwellige Undulationen charakterisiert. In Fließrichtung beträgt die mittlere Wellenlänge rund 4 km, während senkrecht dazu die Wellenlänge stark von der großräumigen Topographie abhängt. Abbildung 7.2 gibt die Resultate der ersten Beobachtungsepoche als räumliches Modell wieder. Die wellenförmigen Bodenformen in Profilrichtung sind gut zu erkennen. Die großräumigeren Strukturen senkrecht dazu spiegeln sich als variierende transversale Geländeneigungen wieder.

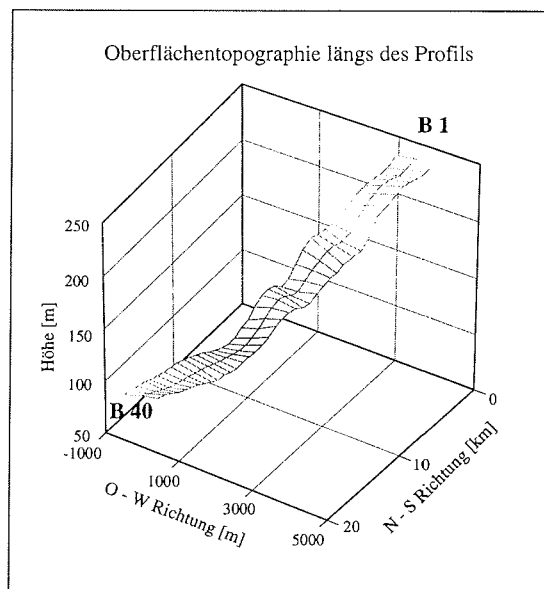


Abbildung 7.2: Oberflächenmodell aus den Ergebnissen der ersten terrestrischen Einmessung. Die Kreuzungspunkte der Linien entsprechen jeweils einem Beobachtungspunkt. Die Punkte wurden in Fließrichtung jeweils von 1 bis 40 durchnummeriert und die Profillinien von West nach Ost mit den Buchstaben *A*, *B* und *C* bezeichnet.

Durch das gewählte Beobachtungsschema wurde jede Position mindestens viermal bestimmt. Diese große Redundanz führt zu einer hohen Genauigkeit der Schrägdistanzen und Horizontalwinkel. Bei den Vertikalwinkeln konnte in der Ausgleichung ein starker Refraktionseffekt festgestellt werden. Die Höhengenaugigkeit liegt daher nur bei etwa 20 – 30 cm zwischen den einzelnen Meßpunkten, während die Genauigkeit der Schrägdistanzen etwa 2 cm beträgt. Zur Bestimmung der Geoidhöhe und der absoluten Geschwindigkeiten sind an vier Punkten der zentralen Linie Differential – GPS Messungen durchgeführt worden. Die als Referenz benötigte zweite GPS-Station befand sich an der Neumayer Station.

In Abbildung 7.3 sind die Ergebnisse der Höhenmessung der Zentrallinie dargestellt. Deutlich ist der sinusoidale Charakter der Oberflächenschwankungen im landseitigen Abschnitt des Profils zu erkennen. Ab dem Ort des Aufschwimmens verschwinden

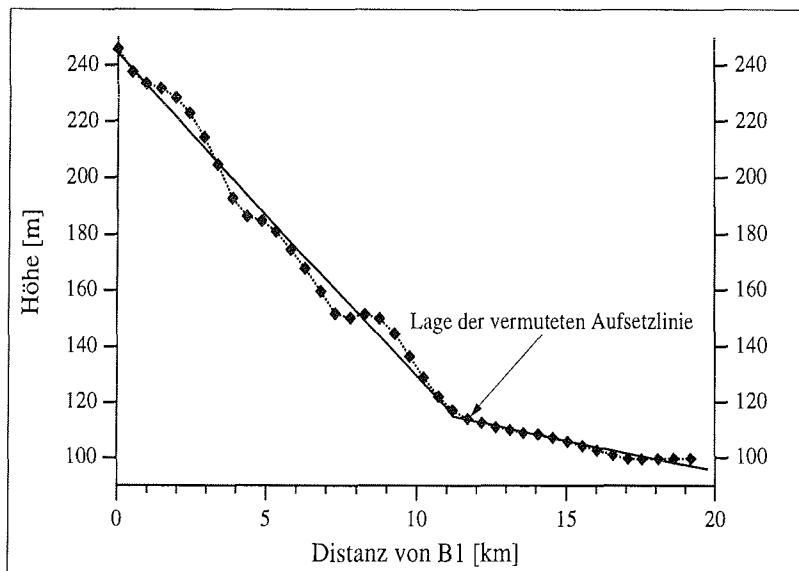


Abbildung 7.3: Oberflächengeometrie an der *grounding line* des Ekström-Schelfeises

diese Störungen fast vollständig. Die mittlere Oberflächenneigung, in der Abbildung als durchgezogene Linie dargestellt, beträgt auf dem gegründeten Eis (von Profilkilometer 0 bis 12) etwa 1.2% und reduziert sich an der *grounding line* sehr schnell auf 0.3% (Profilkilometer 12 bis 20). Diese abrupte Neigungsänderung läßt ebenfalls auf einen kleinräumigen Übergang des Spannungszustandes und damit minimalen Gleitens auf dem Untergrund schließen. Terrestrische wie auch GPS Beobachtungen wurden in der zweiten Hälfte der Meßkampagne wiederholt. Aus der Differenz der terrestrischen Ergebnisse können die Deformationsraten der Eisoberseite abgeleitet werden. Die Unterschiede zwischen den GPS Resultaten ergeben die absolute Fließgeschwindigkeit in Betrag und Richtung, sowie zusätzlich eine Kontrolle der Oberflächenmessungen zwischen den mit beiden Methoden benutzten Punkten. Die konventionellen Geometriebestimmungen über Winkel und Distanz fanden in der zweiten Epoche im Abstand von 13 bis 34 Tagen nach der Erstmessung statt. Diese Zeitspanne reichte bei den erzielten Genauigkeiten und den gemessenen Verschiebungsbeträgen aus, die Deformationsraten und ihre Variationen mit der erforderlichen Präzision zu berechnen. Das allgemeine Deformationsmuster kann mit Extension längs der Fließachse (grob N-S) und Kompression quer dazu beschrieben werden (siehe Abb. 7.4). Die Richtung der mittleren Deformationshauptachse weicht mit 11.7° Azimuth nur gering von der Profilachse (11°) ab. Die satellitengestützten Positionsbestimmungen konnten in der zweiten Epoche nur noch an zwei Punkten durchgeführt werden, da die Signalcodierung während der restlichen Zeit aufgrund der Abschaltung des P-Codes mit unseren Instrumenten nicht mehr lesbar war. Die erforderlichen Nachmessungen erfolgten in der Saison 94/95 in Zusammenarbeit mit der TU Braunschweig.

Aus der Abbildung 7.4 ist ersichtlich, daß die Deformationsraten im gegründeten Eis in Richtung Aufsetzlinie zunehmen. Die Werte steigen von $10^{-3}/a$ am Beginn des Profils bis auf beinahe $10^{-2}/a$ etwa sechs Kilometer südlich der *grounding line* Position. Auf dem weiteren Fließweg ist eine Abnahme bis zu sehr geringen Werten von unter $10^{-4}/a$ auf dem Schelfeis zu beobachten. Die quer zur Profilrichtung beobachtete Kompression, mit Werten in einer ähnlichen Größenordnung wie die Dehnung, läßt auf einen konvergenten Fluß in dieser Region schließen. Das aus dem Inland kommende Eis wird kanalisiert in das Schelfeis eingeleitet. Im Schelfeis selbst findet nur noch geringe Deformation statt. Dieses Deformationsmuster längs des Profils findet sich auch in den aus den GPS Messungen abgeleiteten Oberflächengeschwindigkeiten. Die Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen den vier Meßpunkten entsprechen sehr genau den akkumulierten Längsdeformationen auf den entsprechenden Strecken.

Die Kombination der Absolutmessungen mit den Deformationsraten liefert Ergebnisse für die Oberflächengeschwindigkeit längs des gesamten Profils (siehe Abb. 7.5). Südlich der Aufsetzlinie ist dabei die größte Geschwindigkeitszunahme zu beobachten. Sie nimmt ab Profilanfang leicht zu, um etwa vier bis fünf Kilometer vor dem Übergang zum Schelfeis ihr Maximum zu erreichen. Auf den folgenden vier Kilometern ist eine Abnahme auf einen geringen Wert festzustellen, der auf dem Schelfeis nahezu konstant bleibt. Diese sehr kleine, aber konstante Geschwindigkeitszunahme im nördlichen Profilschnitt kann mehrere Ursachen besitzen. Trotz des kanalisierten Flusses besteht die Möglichkeit, daß das Eis sich in Fließrichtung weiter dehnt und damit ausdünn. Seitliche Masseneinträge aus dem konvergenten Fließmuster und atmosphärische Akkumulation erhöhen die zu transportierende Masse und führen ebenfalls zu einer Geschwindigkeitszunahme.

Längs der mittleren Profillinie wurden in der Zeit zwischen den zwei Vermessungsperioden seismische Tiefensondierungen zur Bestimmung der Eisdicke durchgeführt. Mit Hilfe einer kleinen Heißwasserbohranlage wurden 10 m tiefe Sprenglöcher in den Firn gebohrt und mit jeweils 1,2 kg Sprengstoff beschickt. Die Aufzeichnung der durch die Sprengung erzeugten Wellen und ihrer Reflexionen an den Grenzflächen zwischen Eis, Wasser und Untergrund erfolgte mit einer 24-Kanal-Seismikapparatur. Die Abstände zwischen den 24 Geophonen betragen jeweils zehn Meter, die Distanz zwischen Schußpunkt und erstem Geophon 125 m. Aus Zeitgründen konnte nicht der gesamte Bereich gleichmäßig überdeckt werden. Daher wurden zwischen den einzelnen Sondierungen im allgemeinen Abstände von 500 m gewählt. Im Bereich der bis dahin nur vermuteten Position der *grounding line* wurde das Intervall zwischen den Einzelmessungen auf 125 m verkürzt, um in diesem interessanten Abschnitt eine zweifache Überdeckung zu erreichen. In Abbildung 7.6 sind die Zweiweglaufzeiten der einzelnen Sondierungen gegen die Profilposition der Geophone aufgetragen. Neben einem Butterworth-Filter mit einem zentralen Fenster von 80 bis 150 Hz wurde ein AGC mit einer Fensterweite von 150 ms auf die Daten angewandt. Die Zone höherer Auflösung im Bereich der *grounding line* ist durch den dichteren Spurabstand klar zu erkennen. Die Reflexion der Eisunterseite kann über das gesamte Profil sehr gut bestimmt werden. Die Identifizierung der Grenzfläche zwischen Wasser und festem Untergrund ist nahe der Aufsetzlinie schwierig. Mit zunehmendem Abstand davon werden die gesuchten Einsätze jedoch klarer. Die erste Multiple der Eisunterseite ist

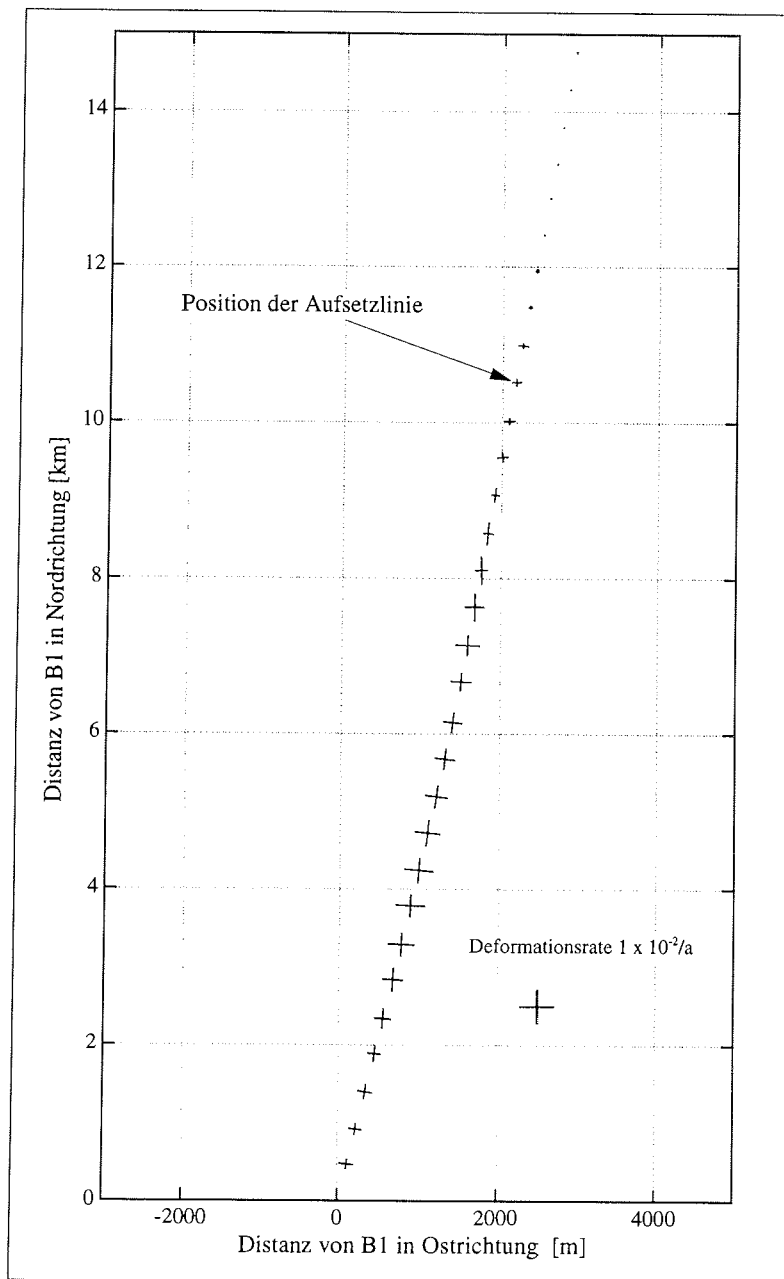


Abbildung 7.4: Deformationshauptachsen an den Meßpunkten.

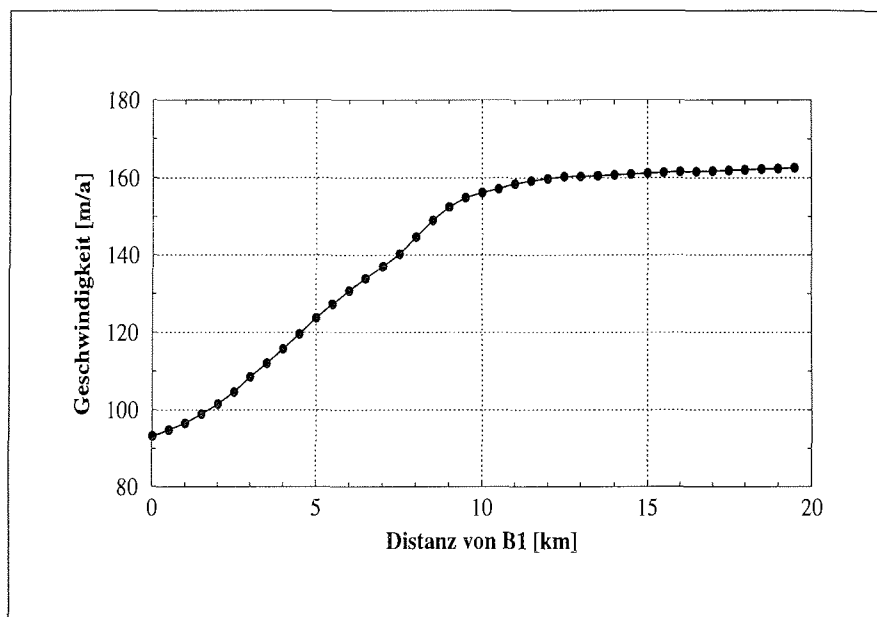


Abbildung 7.5: Oberflächengeschwindigkeit längs des Profils.

nur bei den geringen Eismächtigkeiten um Schuß 350 zu sehen, während unter dem Schelfeis auch noch die PS-Reflektierte der Eisunterseite zwischen den Einsätzen der Reflexionen der Grenzschichten Eis/Wasser und Wasser/Untergrund zu erkennen ist. Die Festlegung der exakten Position der Ablösung des Eiskörpers vom Untergrund ist nicht möglich. Jedoch kann der Bereich, in dem diese Ablösung stattfindet, auf wenige hundert Meter um den Profilkilometer 11 eingeschränkt werden. Dieses Ergebnis deckt sich auch gut mit dem sprunghaften Wechsel der Oberflächenneigungen (siehe Abb. 7.3). Für die Bestimmung der Eismächtigkeiten und Wassertiefen aus den seismischen Laufzeiten muß ein Modell für die Wellengeschwindigkeiten in den verschiedenen Medien aufgestellt werden. Im wesentlichen wurden die Annahmen von Smith und Doake (1994), übernommen und an die auf dem Ekström-Schelfeis herrschenden Bedingungen angepaßt. Als mittlere Geschwindigkeit für den gesamten Eiskörper inklusive der Firnauflage resultiert daraus 3708 m s^{-1} , im darunterliegenden Wasser pflanzen sich die Schallwellen mit 1450 m s^{-1} fort. Die berechneten Eismächtigkeiten weisen im landseitigen Teil ein Maximum von 1200 m auf. Im Schelfeis reduziert sich die Mächtigkeit bis auf 800 m, etwa 5,5 km nördlich der *grounding line*.

Das kombinierte Ergebnis aus der Oberflächenvermessung und den seismischen Tiefensondierungen zeigt Abb. 7.7. Deutlich ist zu sehen, daß der Untergrund eine starke Rauigkeit aufweist. Wegen der schlechteren Signalqualität der Meeresbodenreflexion konnten für diese Grenzfläche nicht in jedem Seismogramm die Einsatzzeiten bestimmt werden. Daher scheint der Meeresboden eine geringere Rauigkeit aufzuweisen, als der vom Eis bedeckte Bereich. Die aus den Oberflächenhöhen errechneten

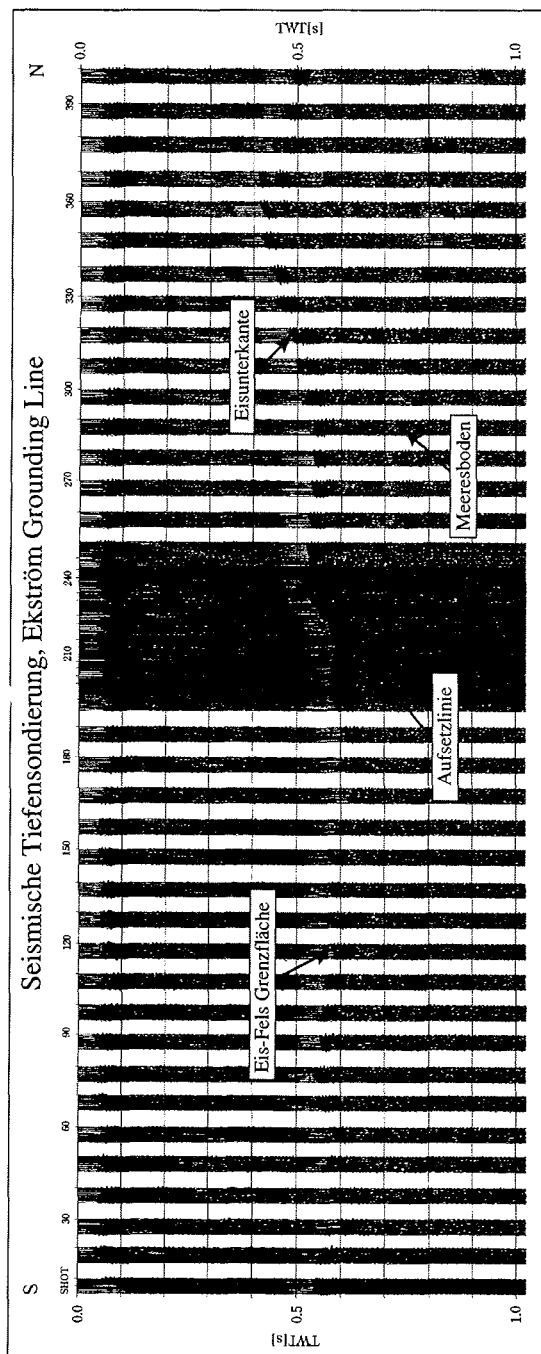


Abbildung 7.6: Seismische Tiefensondierung

Eismächtigkeiten für den hydrostatisch ausgeglichenen Fall sind ebenfalls in Abb. 7.7 aufgetragen. Der Vergleich mit den tatsächlich gemessenen Daten zeigt, daß das Schelfeis lokal nicht im Gleichgewicht ist. Die auffallend reduzierte Eismächtigkeit bei Profilkilometer 17 kann auch in einer leichten Senke in den Oberflächendaten in Abbildung 7.3 festgestellt werden. Eine Erklärung dafür ist noch nicht gefunden. Weder sind im nördlichen Teil des Profils erhöhte laterale Kompressionswerte gefunden worden, noch existieren in diesem Bereich seitliche Zuflüsse, die zu einer Erhöhung der Eismächtigkeit nördlich von Kilometer 17 führen könnten. Die Freiluftanomalie aus den gravimetrischen Messungen zeigt ebenfalls ein Minimum nördlich der Aufsetzlinie, das auf ein geringes Massendefizit in diesem Bereich hindeutet. Im weiteren Verlauf Richtung Süden steigt die Freiluftanomalie durch den zunehmenden kontinentalen Einfluß wieder an. Ein Indiz für einen lokal begrenzten Effekt reduzierter Eismächtigkeit ist die nur geringe Absenkung der Oberfläche. Die Abweichung vom isostatischen Gleichgewicht muß durch Stützeffekte im benachbarten, dickeren Eis kompensiert werden.

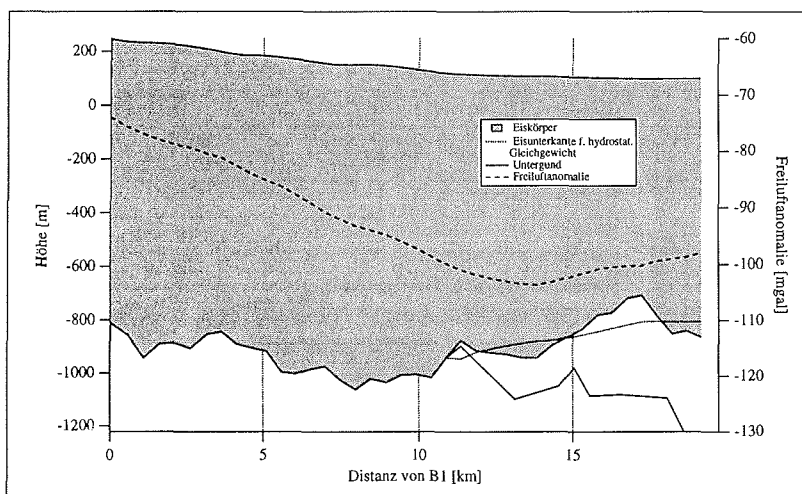


Abbildung 7.7: Ekström *grounding line*, Geometrie der Oberfläche und des Untergrundes aus den seismischen und geodätischen Messungen. Die gepunktete Linie entspricht der aus den Oberflächenhöhen abgeleiteten Eisunterkante für ein isostatisch ausgeglichenes Schelfeis. Die gestrichelte Linie zeigt den Verlauf der Freiluftanomalie, die aus den Schwerebestimmungen längs des Untersuchungsprofils berechnet wurde.

7.1.2 Ein Vorwärtsmodell in der vertikalen Ebene

Die Dynamik von gegründetem Eis ist in der Hauptsache von den physikalischen Bedingungen an der Grenzschicht Eis/Untergrund abhängig. Es muß daher ein Weg gefunden werden, aus den auf die Oberfläche beschränkten Feldmessungen, Aussagen über die tieferliegenden Prozesse machen zu können. Eine Möglichkeit besteht

darin, eine Annahme über die basalen Randbedingungen zu treffen und diese in einem Modell so lange zu variieren, bis die resultierenden Oberflächendaten mit den gemessenen übereinstimmen (MacAyeal, 1987). Dieses Verfahren, von der Ursache (basale Reibung) zur Wirkung (Eisbewegung) zu gelangen, ist in dieser einfachen Form nicht sehr praktikabel, da die Variationsmöglichkeiten in den Randbedingungen sehr groß sind. Van der Veen und Whillans haben 1989 einen Weg der Vorwärtsmodellierung von der Oberfläche in die Tiefe vorgeschlagen, der hier besprochen werden soll. Als Tiefeninformation wird nur die Eisdicke benötigt. Randbedingungen für die untere Begrenzungsfläche gehen nicht in die Berechnung ein. Dies impliziert, daß sich kleine Oberflächenstörungen, die nicht durch die Eisdynamik hervorgerufen werden, wie auch kleinräumige Untergrundstrukturen, die das allgemeine Fließverhalten in der Realität nicht merklich beeinträchtigen, mit jedem Iterationsschritt in die Tiefe stärker gewichtet werden. Das Ergebnis ist in diesem Fall stark mit hochfrequentem Noise überlagert. Daten aus Feldstudien müssen daher erst tiefpassgefiltert werden, bevor sie als Input für die Modellrechnungen geeignet sind.

Die physikalische Beschreibung erfolgt in einer vertikalen Ebene entlang einer Fließlinie, mit der x -Achse in Richtung der maximalen Eisbewegung. Die Feldbeobachtungen zeigen, daß über das gesamte Profil paralleler Fluß die Bewegung dominiert und damit eine zweidimensionale Analyse gerechtfertigt ist. Die laterale Kompression kann die Absolutwerte der berechneten Spannungen verändern, beeinflusst aber durch ihre Symmetrie nicht den prinzipiellen Verlauf längs des Profils. Eine Möglichkeit der Berücksichtigung seitlicher Kompression wäre die lokale Modifizierung der Akkumulationsraten. Der seitliche Zufluß entspricht längs der Fließrichtung einem Massenzuwachs. Voraussetzung für die Anpassung der Massenbilanz ist allerdings die Kenntnis der vertikalen Geschwindigkeitsverteilung. Für die hier vorliegenden Berechnungen wurde daher auf eine Berücksichtigung der Konfluenz verzichtet. Die Implementierung solcher Verhältnisse soll jedoch später nachgeholt werden, um eine genauere Abschätzung der Absolutwerte von Spannung und Geschwindigkeit in den tieferen Schichten des Eises zu erhalten.

Eine weitere Annahme ist eine zeitlich unveränderliche Oberfläche, wobei eine gleichförmige Absenkung oder Anhebung (ein konstanter Fehler in der Vertikalgeschwindigkeit) das Ergebnis nicht beeinflusst (Van der Veen und Whillans, 1989a). Die physikalische Basis der gravitationsinduzierten Bewegung von Eis ist in Kapitel 4 behandelt und soll hier nicht wiederholt werden. Die Notation wird analog verwendet. Die prinzipielle Funktionsweise wird im folgenden kurz dargestellt. Im allgemeinen zweidimensionalen Spannungszustand

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad (7.2)$$

werden die Komponenten in hydrostatische und resistive Anteile aufgespalten:

$$\sigma_{ij} = R_{ij} - \delta_{ij} \rho g (H + h - z) \quad (7.3)$$

Dies erlaubt eine Unterscheidung von angreifenden Kräften (aus der Antriebsspannung) und ihrer Reaktion (aus den Gradienten der resistiven Spannungen),

(Van der Veen und Whillans, 1989a). Für den Antrieb der Eisbewegung ist eine ungleichmäßige Verteilung der Eismasse und die daraus resultierende Oberflächenneigung verantwortlich. Sie bestimmt die sogenannte Antriebsspannung (*driving stress*):

$$\tau_d = \rho g H \frac{\partial H + h}{\partial x} . \quad (7.4)$$

Dieser Größe stehen die resistiven Spannungen am Untergrund entgegen, die sich in der Verzögerungsspannung (*basal drag*) zusammenfassen lassen:

$$\tau_b = R_{xz}(h) - R_{xx}(h) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7.5)$$

Aus der Integration von Gleichung 7.1 über die Eisdicke, dem Zusammenhang zwischen resistiven und deviatorischen Spannungen,

$$R_{ij} = \tau_{ij} + \delta_{ij}(1/2(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \rho g(H + h - z)) , \quad (7.6)$$

und dem Fließgesetz (4.12) läßt sich ein Ausdruck für die Scherdeformationsrate ε_{xz}

$$A^{-\frac{1}{n}} \dot{\varepsilon}^{\frac{1-n}{n}} \dot{\varepsilon}_{xz} = (H + h - z) \tau_{dx} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^{H+h} A^{-\frac{1}{n}} \dot{\varepsilon}^{\frac{1-n}{n}} \dot{\varepsilon}_{xx} d\bar{z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^{H+h} R_{zz} d\bar{z} \right) \quad (7.7)$$

finden.

Setzt man die resistiven Spannungen in Gleichung 7.2 ein, folgt mit der Randbedingung für die freie Oberfläche aus Kapitel 5.3.1 und dem Fließgesetz eine Beziehung für die vertikale resistive Spannung:

$$R_{zz}(z) = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{H+h} A^{-\frac{1}{n}} \dot{\varepsilon}^{\frac{1-n}{n}} \dot{\varepsilon}_{xx} d\bar{z} . \quad (7.8)$$

Sind die Antriebsspannung τ_{dx} und die longitudinale Deformationsrate $\dot{\varepsilon}_{xx}$ bekannt, kann die Scherspannungsrate $\dot{\varepsilon}_{xz}$ und damit die vertikale Variation der horizontalen Geschwindigkeit berechnet werden. Die Änderung der vertikalen Geschwindigkeit mit der Tiefe ergibt sich aus der Oberflächenmassenbilanz (unter der Annahme einer Gleichgewichtsoberfläche) und der Inkompressibilitätsbedingung (Gleichung 4.10). Hieraus läßt sich ein fortschreitendes Schema entwickeln, indem aus den vertikalen Ableitungen die Geschwindigkeitskomponenten in einer tieferen Schicht berechnet werden. Aus diesen folgen wiederum die Scherspannungsrate und damit die Geschwindigkeitsänderung zur nächst tieferen Schicht.

Für die numerische Umsetzung wurden die Ausdrücke wie in Abschnitt 4.3 beschrieben vertikal auf die Eisdicke skaliert und anschließend in die Form finiter Differenzen gebracht. Die Berechnung der vertikalen Geschwindigkeits- und Spannungsverteilungen für die vierzig Meßpunkte in horizontaler Richtung und einer vertikalen Auflösung von 100 Schichten benötigt auf einer Sun *Sparc 10* etwa eine Minute. Die Eisdicken und Untergrundhöhen wurden mit einem gewichteten, laufenden Mittel über fünf Punkte geglättet, um die schon genannte Überbewertung der kleinskaligen Fluktuationen zu vermeiden. Die Akkumulationsrate ändert sich über die 20 Kilometer nicht wesentlich (Miller und Oerter (1990) und eigene Messungen) und wurde konstant mit 300 mm Wasseräquivalent pro Jahr angenommen.

Der Fließfaktor ist eine kritische Größe, da das Modell sehr sensibel auf seine Variationen reagiert. Wie in Kapitel 4.2 erwähnt ist, kann der Faktor in einen temperaturabhängigen und einen strukturell bestimmten Anteil aufgespalten werden. Die Variation mit der Temperatur wird mit einer Arrheniusrelation beschrieben. In einer vertikalen Eissäule nimmt die Temperatur von der Jahresmitteltemperatur in zehn Metern Tiefe zum Untergrund hin bis auf maximale Werte nahe dem Druckschmelzpunkt zu (Paterson, 1994). Tieferliegendes Eis ist somit duktiler und ein Großteil der internen Verformung findet in den untersten Schichten des Eisschildes statt. Die Annahme von isothermalen Bedingungen für das Modell hat allerdings nur einen untergeordneten Einfluß auf die Ergebnisse, wie Van der Veen und Whillans (1989b) zeigen konnten.

Das Temperaturregime im südlichen Ekström-Schelfeis ist wenig bekannt. Der erste Schritt war daher, das Modell mit einem konstantem Fließfaktor zu betreiben, der die allgemeinen Temperaturverhältnisse und damit die dominierende Eissteifigkeit möglichst gut beschreibt. Als mittlere Temperatur wurde -18 °C gewählt. Das ist ein um $0,3\text{ °C}$ höherer Wert als das Resultat aus einer Bohrung nahe dem Meßprofil im Jahr 1987 (Moser und Reinwarth, 1990). Der temperaturunabhängige Faktor A_0 wurde in den von Van der Veen und Whillans (1989b) angegebenen Grenzen für mechanisch weiches bis mechanisch steifes Verhalten des Eises variiert und beeinflusst den Absolutwert um Größenordnungen stärker, als eine Änderung der Temperatur um 20 °C . Hier sollen nur die Ergebnisse für den Fall steifen Eises diskutiert werden, da diese den geringsten Einfluß der schon erwähnten hochfrequenten Störungen erkennen lassen. Der Fließfaktor A für diese Experimente berechnet sich zu $3,8 \times 10^{-25}\text{ Pa}^{-3}\text{ s}^{-1}$ für -18 °C .

Die wichtigsten Ergebnisse für dieses Experiment sind in den Abbildungen 7.8, 7.9, 7.10 und 7.11 für die normierte Eisdicke dargestellt.

Die unterschiedlichen Regimes basaler Grenzbedingungen zwischen dem gegründeten und dem schwimmenden Abschnitt ist in den Horizontalgeschwindigkeiten eindeutig sichtbar (Abb. 7.8).

Der Verlauf der Fließgeschwindigkeitsänderung an der Oberfläche setzt sich in beiden Bereichen auch in die Tiefe fort. Wie auch aus der Theorie für die Eisbewegung zu erwarten ist, bleiben die oberen 40% des Eiskörpers von den Scherkräften an der unteren Grenzfläche weitgehend unbeeinflusst, die Geschwindigkeiten ändern sich nur minimal mit der Tiefe. Darunter steigt der vertikale Geschwindigkeitsgradient auf den ersten Profilkilometern stark an. Der enge Zusammenhang zwischen den Absolutwerten der Geschwindigkeit mit der Größe des Fließfaktors verbietet es jedoch, mit der getroffenen Abschätzung für A direkte Aussagen über basale Geschwindigkeiten zu machen. Auch für duktileres Eis werden nicht-verschwindende basale Geschwindigkeitsbeträge im landseitigen Bereich berechnet. Die prinzipielle Tiefenverteilung bleibt auch dann bestehen. Dies weist auf den zunehmenden Einfluß basalen Gleitens in Richtung der Aufsetzlinie hin. Zumindest auf den letzten drei Kilometern im gegründeten Eis (Profilkilometer acht bis elf) scheint dieser Prozeß eine Rolle zu spielen. Gestützt wird diese These durch die vertikale Scherspannung (Abb. 7.9), die in diesem Bereich einen sehr starken negativen Gradienten entlang des Untergrundes besitzt. In der Abbildung 7.7 ist in dieser Zone eine deutliche Senke

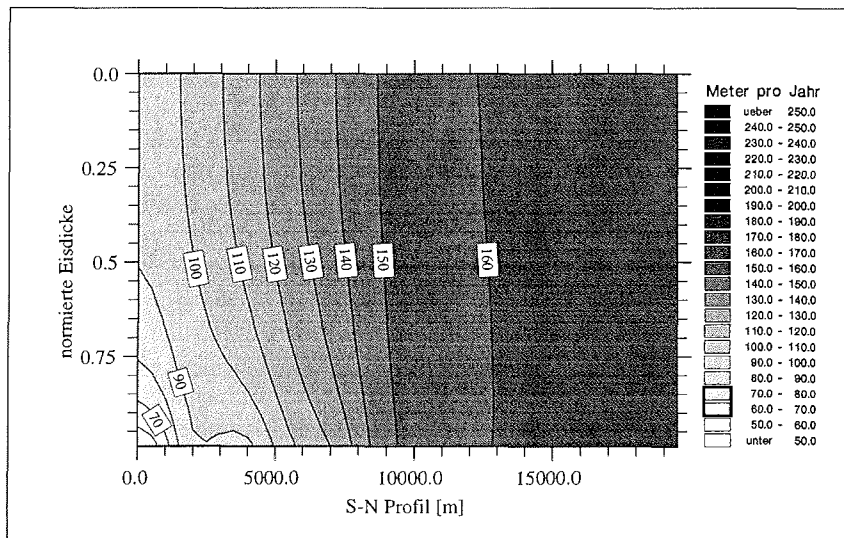


Abbildung 7.8: Modellergebnis für die horizontale Geschwindigkeit. Die Eisdicke ist normiert und das Profil von links nach rechts in Süd- Nordrichtung aufgetragen. Die durchgezogenen Linien stellen Orte gleicher Geschwindigkeit dar.

im Untergrund zu erkennen. Hier ist die Eisdicke im Vergleich zur Tiefe des Untergrundes nahe am Schwimgleichgewicht. Erst ab Kilometer sieben ist in Richtung Profilanfang der potentielle Tiefgang merklich größer als die Bodenhöhe. Je nach Einfluß der Tide ist daher ein Drainageeffekt aus dem Meer in dieses Gebiet denkbar. Ob auch am Beginn des Profils schon basales Gleiten vorliegt, ist aus dieser Geschwindigkeitsanalyse nicht eindeutig zu beantworten.

Die vertikale Scherspannung in Abbildung 7.9 zeigt ebenfalls ein charakteristisches Muster für die jeweils unterschiedlichen Randbedingungen an der Eisunterseite. Im gegründeten Eis ist ein starker vertikaler Gradient zu beobachten, während das Schelfeis weitgehend scherspannungsfrei ist. Die geringen Spannungswerte in den tiefen Eisschichten bei Kilometer 17 entsprechen der dort festgestellten verminderten Eismächtigkeit. Die für ein Schelfeis ungewöhnlich starke Neigung der Eisunterseite setzt das Eis einem longitudinalen Druckgradienten aus. Auf tieferliegendes Eis wird eine Kraft in Richtung des geringeren hydrostatischen Druckes ausgeübt, was zu den beobachteten Scherspannungen führt. Nahe der *grounding line* existiert ein starker horizontaler Gradient der Scherspannungen, der den Übergang vom schwimmenden in das gegründete Regime charakterisiert. Die Werte um 60 kPa an der Basis im Gebiet des ersten Bodenkontaktes deuten, wie auch die berechneten Geschwindigkeiten, auf gebremstes Gleiten hin. Die Spannungsmaxima am Boden korrelieren gut mit den langwelligen Undulationen des Oberflächenprofils. Dies weist auf den Ursprung solcher Oberflächenformen aus Unterschieden im basalen Reibungswiderstand hin.

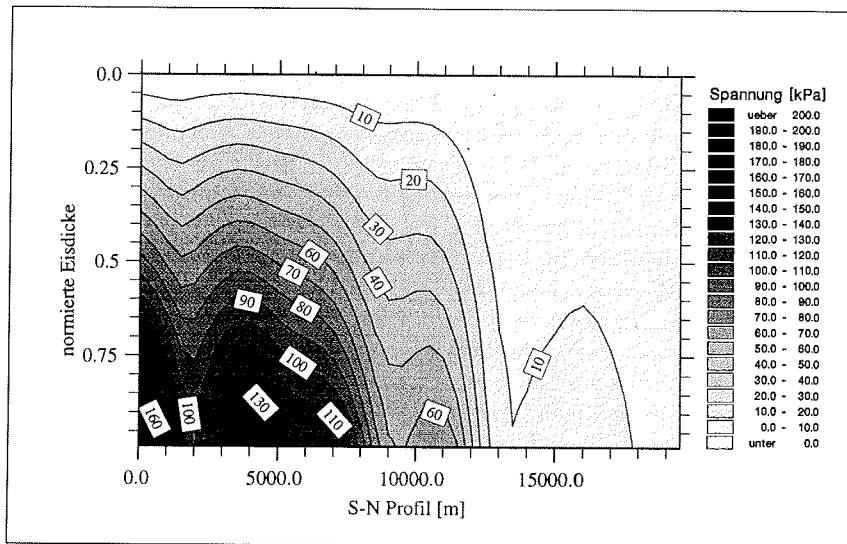


Abbildung 7.9: Resultat für die Berechnung der vertikalen Scherspannung im skalierten Modell. Die Spannung ist in Kilo-Pascal angegeben, die Profilrichtung entspricht Abb. 7.8.

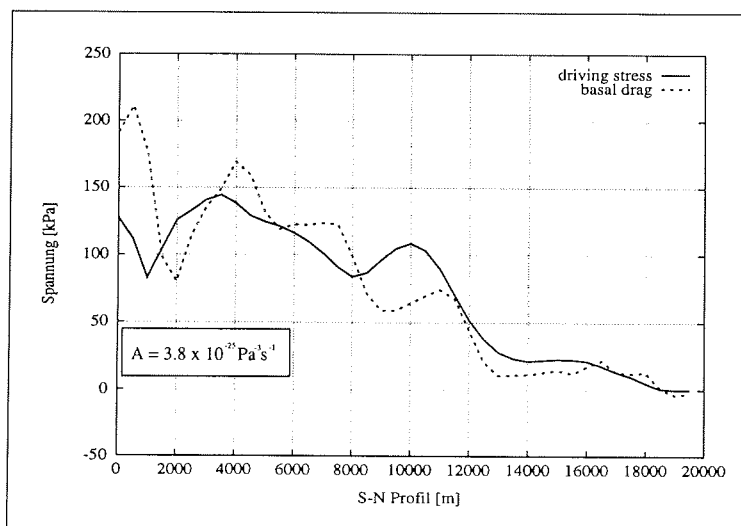


Abbildung 7.10: Antriebsspannung und basale Verzögerungsspannung aus den Modellergebnissen für mechanisch steifes Eis bei einer Temperatur von $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$. Die vertikale Achse gibt die Spannung in Kilo-Pascal an, auf der horizontalen Achse ist der Abstand vom südlichsten Profilpunkt in Richtung Norden (Az.: 11°) in Metern angegeben.

Die Scherspannung nahe der Eisunterseite verhält sich streng analog zur basalen Verzögerungsspannung (Abb. 7.10), wobei die absoluten Werte für die Scherung unter denen der Verzögerungsspannung liegen. Letztere ist gegenüber der Antriebsspannung in Abbildung 7.10 um eine viertel Wellenlänge der scheinbaren Störungsperiode verschoben. Die Antriebsspannung folgt im wesentlichen den Variationen des Oberflächenreliefs, während sich die Verzögerungsspannung wie die Scherspannung verhält, die in Bereichen hoher Reibungswiderstände anwächst. Diese Phasendifferenz resultiert aus einer lokalen Verschiebung zwischen eisdynamischer Ursache und topographischer Auswirkung an der Oberfläche durch die Bewegung des Eiskörpers. Wird diese Phasenverschiebung korrigiert, so sind die Unterschiede zwischen Antriebsspannung und Verzögerungsspannung im landseitigen Teil gering. Die größten Differenzen existieren im Übergangsbereich. Dort ist die Verzögerungsspannung erheblich kleiner, zeigt aber das gleiche Verhalten wie die Antriebsspannung. Diese erreicht, dem Oberflächenprofil folgend, ein ausgeprägtes Maximum, bevor die für ein Schelfeis typischen niedrigen Werte angenommen werden. Daraus ist ersichtlich, daß nur in einem kleinen Bereich um die Aufsetzlinie eine signifikante Abweichung im Kräftegleichgewicht vorliegt.

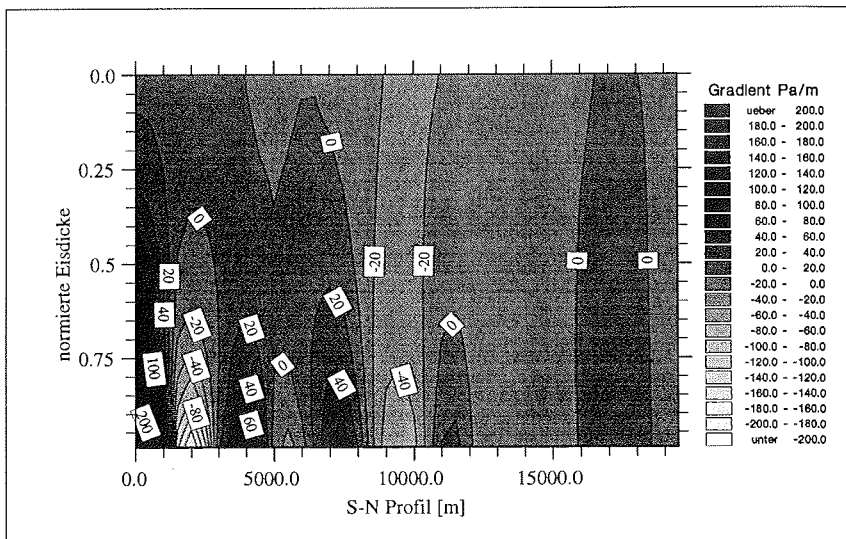


Abbildung 7.11: Isolinienkarte der Gradienten der horizontalen resistiven Spannung über das Meßprofil von Süd nach Nord nach den numerischen Berechnungen. Die Gradienten sind in Pascal pro Meter angegeben.

Ein ähnliches Bild solcher Zonen unterschiedlicher basaler Reibung resultiert auch aus der Analyse der resistiven Longitudinalspannungen (Abb. 7.11). Die getroffene Aufspaltung in einen hydrostatischen und einen resistiven Teil erlaubt die Lokalisierung von Zonen gegensätzlicher Dynamik. Diese *longitudinal pushes and pulls* (MacAyeal, 1989) zeigen deutlich die ungleichmäßige, quasiperiodische Kraftübertragung am Boden, die zum Teil vom Bodenrelief beeinflusst wird. Im Schelfeis ist der

Gradient der Normalspannung nahezu konstant und der resistive Anteil entspricht der Längsdehnung des Eiskörpers. Im oberen Bereich des gegründeten Eises ist die horizontale Änderung der Normalspannungen sehr gering und nicht von der Untergrundrauigkeit abhängig. In der Übergangszone ist allerdings eine schmale Region mäßiger resistiver Spannungsgradienten zu erkennen, in der ein Wechsel von der scherungsdominierten Eisschildbewegung zur normalspannungsdominierten Schelfeisbewegung erfolgt.

Die Werte für die Stützeffekte im Eiskörper (vertikale, resistive Longitudinalspannungen R_{zz}) liegen mit maximal 20 kPa nur bei etwa 0,2% des hydrostatischen Druckes der Eisauflast am Boden. Die Maxima treten nahe den Senken im Untergrund und kurz nach der Aufsetzlinie im Schelfeis auf. Ihr Einfluß auf die Dynamik ist allerdings sehr gering.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Ergebnisse der Modellrechnungen eine klare Unterscheidung des Spannungsregimes zwischen gegründetem und schwimmendem Eis zeigen. Im landseitigen Bereich ist das dynamische Verhalten durch Zonen unterschiedlicher Reibung gekennzeichnet. Langwellige Undulationen der Oberfläche werden durch die Variation der Widerstandskräfte hervorgerufen. Eine Auswirkung auf die Dynamik in den höheren Bereichen des Eiskörpers besitzen diese Kräfte jedoch nicht. Die resistiven Spannungen zeigen in den oberen 50% des gegründeten Eises keine signifikanten Änderungen. Das Schelfeis weist neben lokalen Anomalien das erwartete Bild eines nur durch die longitudinalen Spannungen expandierenden Eiskörpers auf. Die Geschwindigkeit ist tiefenunabhängig und Scherspannungen verschwinden fast vollständig. Die basale Verzögerungsspannung ist erwartungsgemäß beinahe Null. Der Übergangsbereich läßt sich durch eine zunehmende Tendenz zu basalem Gleiten, spätestens ab Profilkilometer acht, beschreiben. Nahe der aus den seismischen Daten bestimmten Ablösungsposition sind allerdings noch erhöhte Scherspannungswerte am Boden zu beobachten. Aus den Abbildungen 7.9 und 7.11 läßt sich die Ausdehnung des Übergangs im Fließverhalten auf vier bis fünf Kilometer bestimmen. Dies entspricht etwa dem fünffachen der Eismächtigkeit. Nach der gängigen Auffassung spricht diese Breite der Übergangszone ebenfalls für eine Verminderung der basalen Reibung zumindest im letzten Abschnitt des Eisschildes.

Kapitel 8

Versuche mit dem EISMINT Schelfeismodell

Im November 1992 wurde von der Generalversammlung der European Science Foundation (ESF) die European Ice Sheet Modelling Initiative (EISMINT) verabschiedet. Dieses auf drei Jahre ausgelegte Programm sollte eine Verbesserung der bestehenden Eismodelle durch Austausch und Zusammenarbeit fördern und zu einer Intensivierung der Aktivitäten auf dem Gebiet der Eismodellierung führen. Inzwischen ist dieses Programm um zwei Jahre verlängert worden (aus *EISMINT Newsletter No. 4*, Januar 1996).

Ein wesentlicher Bestandteil der Initiative ist der Vergleich der bestehenden Modelle. Dieser Vergleich bestand in der Phase I des "Model Intercomparison Experiments" in der Aufstellung einfacher Ausgangsexperimente für Eisschild und Schelfeis. Die angewandten physikalischen Mechanismen sind festgelegt und die Resultate der einzelnen Modelle sollten auf ihre numerische Genauigkeit hin verglichen werden (*Description of the Model Intercomparison Experiments*, zusammengestellt von P. Huybrechts und T. Payne, 1994, *Annals of Glaciology*, 23, im Druck).

8.1 Modellexperiment für das Schelfeis

Für das Schelfeisproblem wurde ein einfaches Modell der freien, uniaxialen Schelfeisausbreitung mit vollständiger Symmetrie senkrecht zur Fließrichtung, analog zu einer analytischen Lösung aus Oerlemans und Van der Veen (1984), entworfen. Auf einem horizontalen Gitter mit einem Punktabstand von 5000 m und 21×21 Gitterpunkten wird ein Schelfeis definiert, dessen Fließrichtung parallel zur x - Achse verläuft. Alle Ableitungen und Geschwindigkeiten senkrecht zur Fließrichtung sind aus Symmetriegründen Null. Der Massenfluß wird im folgenden immer auf eine Einheit der Modellbreite normiert angegeben.

An der *grounding line* wird ein Zufluß von $4 \times 10^5 \text{ m}^3/\text{a}$ definiert, während für die entgegengesetzte Seite Bedingungen einer freien Schelfeisfront erfüllt sein sollen (siehe Kapitel 5.1). Der horizontale Materialeintrag über den Modellrand entspricht einer Eismächtigkeit von 1000 m und einer horizontalen Geschwindigkeit von 400 m a^{-1} als Randbedingungen. Als weitere Antriebsgröße wird eine zeitlich und räumlich konstante Akkumulation von $0,3 \text{ m a}^{-1}$ eingeführt. Die physikalischen Modellparameter sind folgendermaßen festgelegt: Es gilt Glen's Fließgesetz mit einem Exponenten $n = 3$, die Gravitationskonstante ist $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ und die Dichten für Eis und Wasser sind $\rho = 910 \text{ kgm}^{-3}$ und $\rho_w = 1028 \text{ kgm}^{-3}$.

In einem ersten Test sollte die diagnostische Lösung der Geschwindigkeiten für die festgelegte Eismächtigkeitsverteilung aus der analytischen Lösung gefunden werden. Im zweiten Teil wurde für dieselben Randbedingungen aus einer anfänglich konstanten Eismächtigkeit von 1000 m auf dem gesamten Schelfeis die prognostische *steady state* Lösung für Eisdicke und Geschwindigkeit berechnet.

8.2 Ergebnisse für das Geschwindigkeitsexperiment

Im diagnostischen Fall wird die Eismächtigkeit wie in Abb. 8.1 vorgegeben. Aus einer anfänglich konstanten Geschwindigkeit von 400 m a^{-1} an allen Gitterpunkten wurde eine stationäre Lösung ermittelt. Zusätzlich zur Reduzierung auf einen uniaxialen Fall wurden auch die in einem Schelfeis sehr kleinen vertikalen Scherterme $\partial u/\partial z$ und $\partial w/\partial x$ vernachlässigt. Damit erfüllt das Modell dieselben Annahmen, die zu Van der Veen's Lösung geführt haben. Allerdings wird kein vertikal integriertes Gitter verwendet. Die Geschwindigkeiten werden analog dem vollständigen Modell an jedem Gitterpunkt auch in der Vertikalen berechnet.

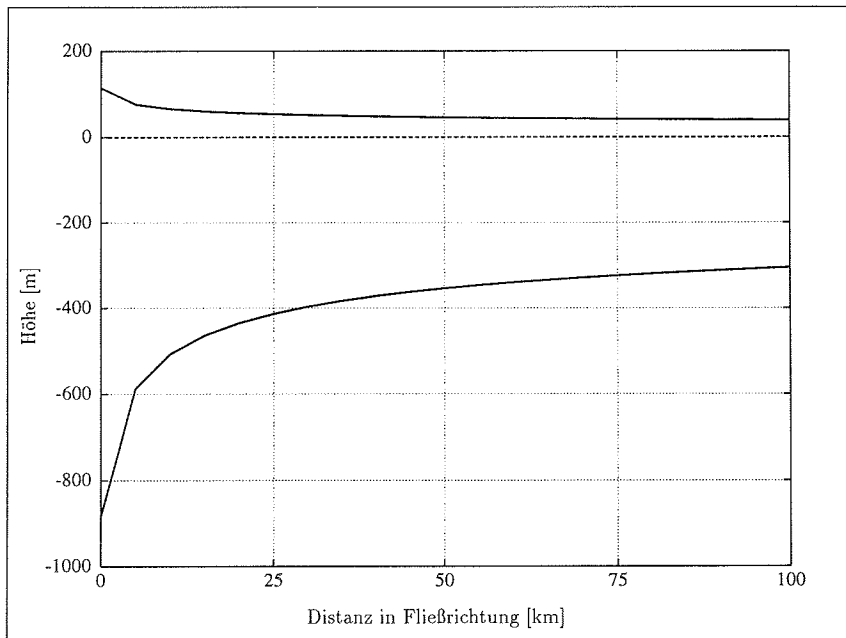


Abbildung 8.1: Vorgegebene Geometrie des Schelfeismodells aus der analytischen Lösung von Van der Veen (Oerlemans und Van der Veen, 1984).

Die Entwicklung der Geschwindigkeiten von $u = \text{const.}$ bis zur stationären Lösung wird in Abbildung 8.2 gezeigt. Zwischen den einzelnen Kurven liegen jeweils etwa 100 000 Iterationsschritte. Für das Erreichen des stationären Zustandes wurden auf

einer Sun Sparc 20 233 Stunden benötigt. Dieser sehr hohe Rechenaufwand resultiert aus der iterativen Lösung der Differentialgleichungen an allen Gitterpunkten über drei vertikale Schichten. Der nichtlineare Charakter der Gleichungen weist ein sehr ungünstiges Konvergenzverhalten auf.

Die maximale Abweichung von der analytischen Lösung liegt unter einem Prozent, wobei die Geschwindigkeiten vor allem im Anfangsbereich des Schelfeises etwas zu hoch berechnet wurden.

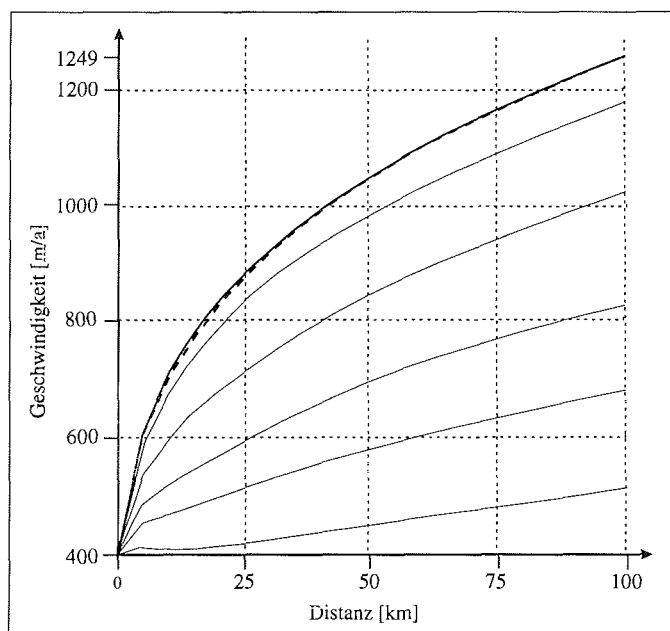


Abbildung 8.2: Ergebnis für die horizontale Geschwindigkeit des diagnostischen Schelfeismodells. Die dicke durchgezogene Linie zeigt das endgültige Resultat der Geschwindigkeit von der Aufsetzlinie bei 0 km bis zur Eisfront bei 100 km. Die dünnen durchgezogenen Linien repräsentieren verschiedene Stadien während der Berechnung. Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf der Geschwindigkeit für die analytische Lösung wieder.

8.3 Das Experiment für die Eismächtigkeiten

Die im vorhergehenden Abschnitt ermittelte Geschwindigkeitsverteilung wurde dazu benutzt, in einem entkoppelten System die Entwicklung der Eismächtigkeiten zu betrachten. Dazu sind die Geschwindigkeiten über die Modellzeit konstant gehalten worden. Im prognostischen Programmteil wurde dann die zeitliche Entwicklung der Schelfeisgeometrie berechnet. Als Abbruchkriterium diente die maximale relative jährliche Mächtigkeitsvariation. Ist die Änderung der Eisdicke überall unter einem Promille, so gilt der erreichte Zustand als ausgeglichen.

Die Ausgangsverteilung der Eismächtigkeiten reichte von 1000 m an der *grounding*

line mit einem konstanten Gradienten von $-0,001$ bis 900 m an der Eisfront. Unabhängig von der Wahl des Zeitschritts, wobei dieser aus Konvergenzgründen nur maximal $0,5$ Jahre betragen konnte, stellte sich das Gleichgewicht nach 286 Jahren ein. Für einen Anfangszustand mit einheitlicher Eisdicke von 1000 m im gesamten Modellbereich müßte der Zeitschritt zur Erfüllung der Konvergenz nochmals erheblich verkleinert werden.

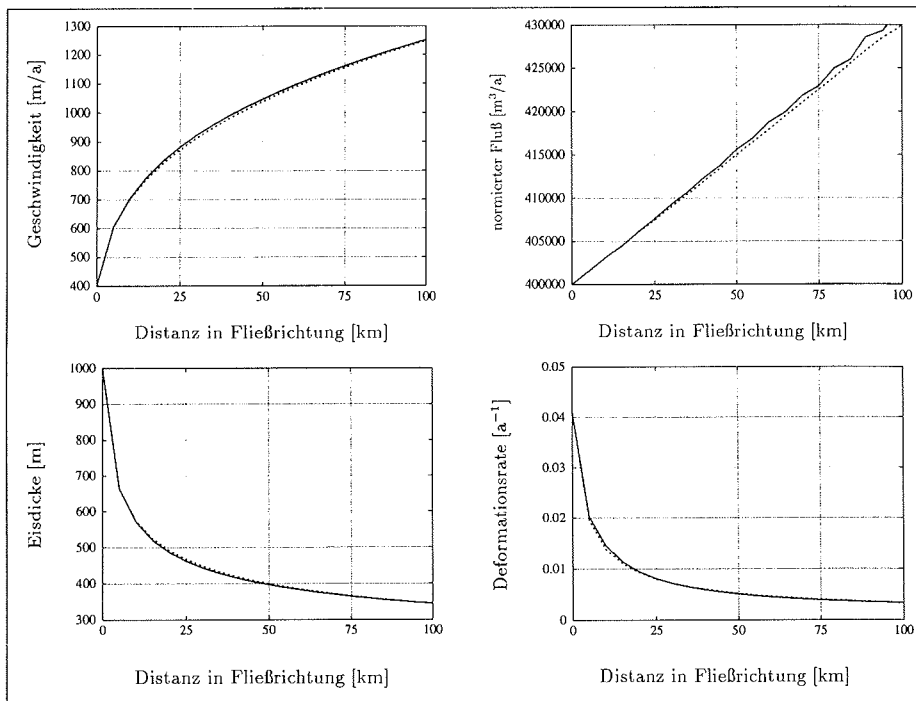


Abbildung 8.3: Ergebnisse für den Modellauf der frei beweglichen Eisdicke mit der Geschwindigkeitsverteilung aus dem diagnostischen Lauf (Diagramm links oben). Neben dem endgültigen Eisdickenprofil (links unten) sind der Fluß pro Breitereinheit (rechts oben) und die longitudinale Deformationsrate (rechts unten) dargestellt. Die durchgezogenen Linien entsprechen den Modellergebnissen, die gestrichelten den Ergebnissen aus der analytischen Lösung.

Erwartungsgemäß ist, wie in der Abbildung 8.3 gezeigt, die endgültig erreichte Eismächtigkeit in weiten Bereichen des Modells minimal geringer als aus dem analytischen Fall vorgegeben. Die Abweichungen betragen aber auch hier maximal ein Prozent. Die kleineren Eismächtigkeiten reichen allerdings nicht aus, die Massenbilanz vollständig ausgeglichen zu halten. Kumulativ über die gesamte zurückgelegte Strecke wird etwa $0,6\%$ zuviel Masse aus dem Schelfeis heraus transportiert. Das entspricht einem Überschuß von $8,6\%$ im Verhältnis zur Gesamtakkumulation auf dem Schelfeis. Auffällig ist, daß dabei numerische Effekte aus der Eisdickenberechnung, die in der Größenordnung von ein bis zwei Metern liegen, eine wichtige Rolle spielen. Diese geringfügige Periodizität ist in der Abbildung 8.3 nicht aufzulösen.

Die Deformationsrate ist, entsprechend den Abweichungen im Geschwindigkeitsprofil, ebenfalls nahe der analytischen Lösung. Lediglich im Bereich der stärksten Neigungsänderung des Schelfeises sind die Werte etwas zu hoch. Als Folge der leicht überschätzten Geschwindigkeiten erfährt das Schelfeis im dynamisch wichtigen Anfangsbereich eine geringfügig höhere Dehnung und damit eine schnellere Ausdünnung. Allerdings sind die Fehler im Verhältnis zu den Absolutwerten nicht signifikant.

Um das Gesamtmodell zu überprüfen, wurde im nächsten Testlauf die freie Entwicklung von Geschwindigkeit und Eisdicke erlaubt. Die Ausgangsdaten entsprechen denen für die reine Eisdickenevolution. Der Zeitschritt wurde allerdings auf 0,1 Jahre reduziert, um das System stabil zu halten. Die Anfangsgeschwindigkeiten wurden für die ursprüngliche Eisdickenverteilung berechnet. Ein Gleichgewichtszustand stellt sich nach 1100 Jahren ein. Allerdings sind hierbei die Abweichungen von den theoretischen Werten größer als im vorangegangenen Versuch (siehe Abb. 8.4).

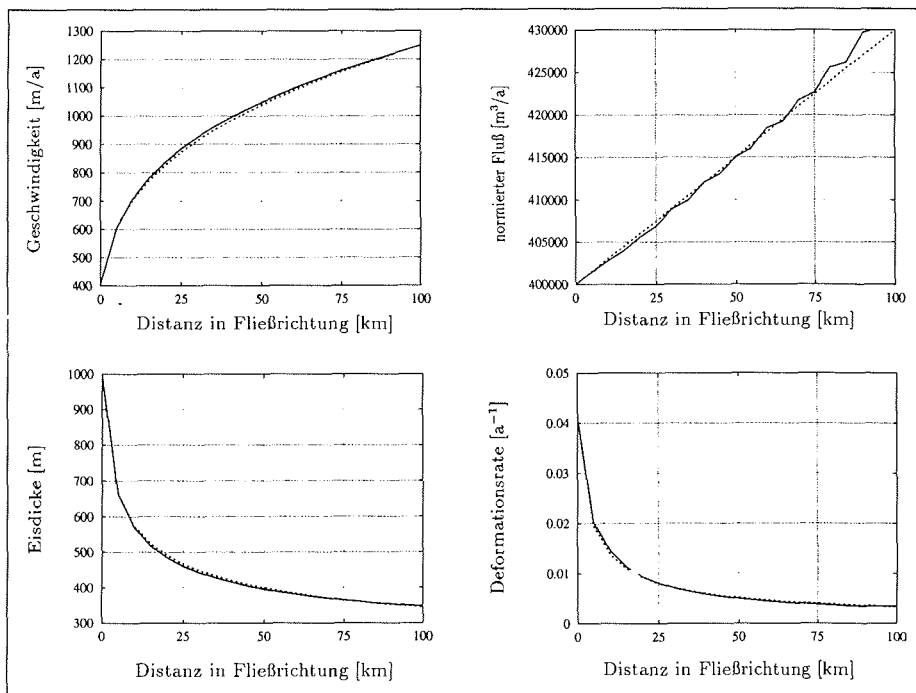


Abbildung 8.4: Ergebnisse für den freien Modelllauf. Neben der Gleichgewichtsgeschwindigkeit (links oben) und dem endgültigen Eisdickenprofil (links unten) sind der Fluß pro Breitereinheit (rechts oben) und die longitudinale Deformationsrate (rechts unten) dargestellt. Die durchgezogenen Linien entsprechen den Modellergebnissen, die gestrichelten Linien den Resultaten aus der analytischen Lösung.

Die Ergebnisse für die Geschwindigkeiten und die Eisdicken erreichen nahezu dieselben Werte wie für die entkoppelten Versuche. Der Einfluß numerischer Unge-

naugigkeiten macht sich aber deutlich stärker bemerkbar, da nun beide Variablen, Geschwindigkeit und Eisdicke, zu jedem Zeitschritt berechnet werden. Es kommt zwar zu einem Gleichgewichtszustand, für den sich das Residuum der Massenbilanzgleichung nicht mehr wesentlich ändert, der Massenfluß ist aber noch deutlich von numerischen Effekten überprägt, eine Instabilität tritt nicht auf. Eine Verbesserung im Massenfluß kann nur durch eine erneute Reduzierung des Zeitschritts erreicht werden. Nach weiteren 250 Jahren, die mit einer Schrittweite von 0.05 Jahren berechnet wurden, ist die Störung durch das diskrete Gitter verschwunden und die Massenbilanz erreicht nahezu die analytischen Werte (Abb. 8.5).

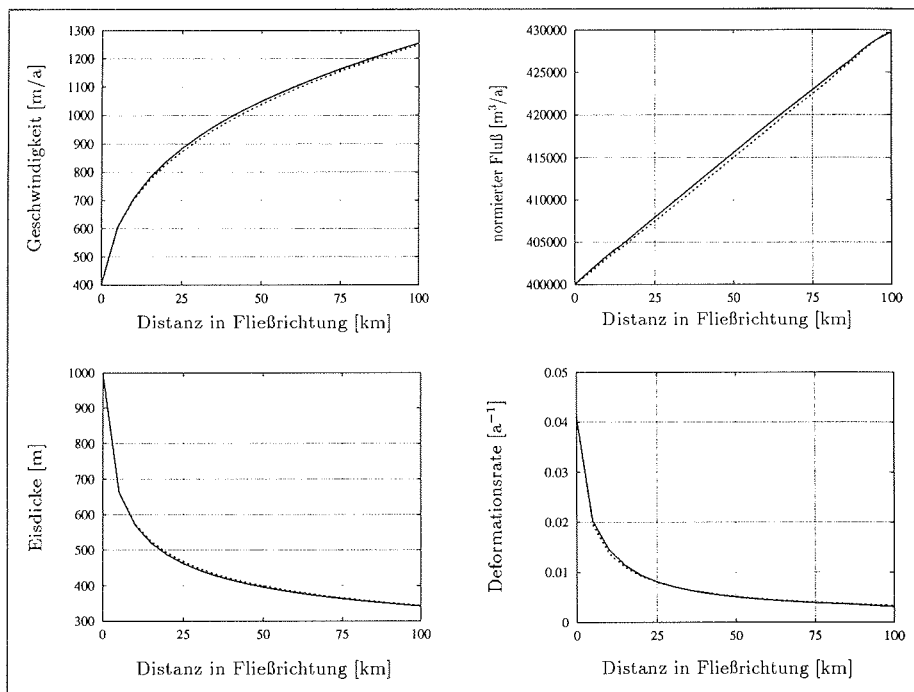


Abbildung 8.5: Ergebnisse für den Lauf mit reduziertem Zeitschritt. Die Anordnung der Diagramme ist analog zu den vorhergehenden Abbildungen.

Die maximale Abweichung der Eismächtigkeiten zwischen zwei Zeitschritten beträgt jetzt weniger als 1 mm, oder entsprechend 2 cm pro Jahr. Die Unterschiede zum vorhergehenden Modellauf sind gering, zeigen aber eine Systematik. Die Geschwindigkeiten in der zweiten Hälfte des Schelfeises nähern sich weniger stark der analytischen Lösung an, sondern sind durchgehend etwas zu hoch. An der Schelfeisfront beträgt die Differenz zwischen analytischer und numerischer Lösung $5,5 \text{ m a}^{-1}$. Die Eisdicke ist dort um 1,7 m kleiner als der analytische Wert. Die Massenbilanz ist immer noch nicht vollständig ausgeglichen. Vor allem im zentralen Schelfeisbereich liegt sie etwas zu hoch, während über die rechte Modellgrenze 0,8% weniger Eis abtransportiert wird, als das Modell aus der Akkumulation erhält. Eine weitere Annäherung an die analytische Lösung könnte durch eine noch engere

Wahl der Konvergenz- und Abbruchkriterien sicherlich erreicht werden, was jedoch erneut den Rechenaufwand in die Höhe treibt. In diesem Stadium ist gezeigt worden, daß das hier entwickelte Modell mit einem reduzierten Gleichungssatz in der Lage ist, die analytische Lösung mit einer befriedigenden Genauigkeit zu reproduzieren. Wie exakt die Lösung letztlich sein wird, hängt von der Bereitschaft ab, die erforderliche Rechenzeit zu investieren.

Kapitel 9

Modellierung der Übergangszone, schematische Studien

Als erster Schritt in der Untersuchung der Deformationsverhältnisse und des Massentransports in der Übergangszone wurde ein relativ einfaches Modell mit vollständiger Symmetrie senkrecht zur Fließrichtung entworfen. Dieses Modell bildet die Basis für eine Vielzahl verschiedener Tests, von denen hier einige diskutiert werden sollen.

Das Modell basiert auf einem ebenen Gitter mit 51×15 Punkten und einem Gitterpunktabstand von 2000 m und 1000 m. Es erstreckt sich damit über eine Fläche von 100×14 Kilometer. Die vertikale Achse ist auf die Eisdicke normiert und durch fünf Gitterpunkte in vier äquidistante Abschnitte aufgeteilt. Daraus folgt eine Gesamtanzahl von 3825 Gitterpunkten. In den hier vorgestellten Versuchen wird stets ein isothermer Eiskörper konstanter Dichte $\rho = 910 \text{ kg m}^{-3}$ betrachtet. Der Fließfaktor $A = 1,5855 \times 10^{-25} \text{ Pa}^{-3} \text{ s}^{-1}$ entspricht antarktischen, kalten Verhältnissen von -20°C (siehe Paterson, 1994). Alle Versuche wurden mit einem Exponenten $n = 3$ im Fließgesetz durchgeführt.

Dieser einfache Versuchsaufbau soll dazu beitragen, klare Aussagen über die Ergebnisse machen zu können, ohne Gefahr zu laufen, schwer zu erkennende Sekundäreffekte falsch zu interpretieren. Sind die grundlegenden Mechanismen der Spannungsbeziehungen und der mechanischen Interaktion von Massenbilanz, Dynamik und Migration der Aufsetzlinie zufriedenstellend untersucht, können erweiterte Modelle den Einfluß thermisch abhängiger oder räumlich variabler Parameter ebenso wie komplizierterer Randbedingungen bewerten.

9.1 Das uniaxiale Plattenmodell

Für die ersten Studien wurden, ähnlich dem EISMINT Schelfeistest, alle Ableitungen senkrecht zur x-Achse und damit zur Fließrichtung Null gesetzt. Das bedeutet, daß keine Untergrundneigungen in y-Richtung bestehen und an den seitlichen Rändern parallel zur x-Achse ungebremstes Gleiten herrscht (*free slip* Randbedingung). Der feste Untergrund weist auf den ersten 60 Kilometern eine gleichmäßige Neigung von -5×10^{-3} auf. Auf den restlichen 40 Kilometern taucht der Boden von -600 m auf -3900 m ab (durchschnittliche Neigung: $-8,25 \times 10^{-3}$), um die Bewegung der Aufsetzlinie in x-Richtung zu begrenzen und damit ihre Position innerhalb des Modellgebietes zu halten.

Die linke Gitternetzgrenze ($x = 0$) wurde als Einstrombereich definiert, durch

den dem Modell Masse zugeführt wird. In der Realität werden solche idealisierten Verhältnisse nicht angetroffen. Prinzipiell entspricht dieses Modell jedoch dem Ausschnitt aus einem sehr breiten, gleichmäßigen Inlandeisabfluß auf den Ozean über einen ungestörten Untergrund.

Für eine Eisplatte einheitlicher Dicke von 500 m wurde eine Geschwindigkeitsverteilung berechnet. Im anschließenden prognostischen Lauf entwickelte sich mit einer konstanten Akkumulationsrate von $0,3 \text{ m a}^{-1}$ Eisäquivalent ein von einem Eisschild gespeistes Schelfeis. Abschmelz- oder Anfrrierprozesse an der Eisunterseite des Schelfeises sind in den hier vorgestellten Modellen nicht wirksam. Als die Eisdicke am Einstromrand 1330 m erreicht hatte, erfolgte eine neue Festlegung der Randbedingungen. Die Akkumulation wurde beibehalten, die Eisdicke am linken Rand über der ganzen Breite auf 1330 m festgelegt. Mit einer definierten Oberflächenneigung von $-0,0135$ auf dem Rand folgt zusammen mit der konstanten Eisdicke nach der Spannungsgleichung von Herterich (Gl. 5.19) eine vertikale Geschwindigkeitsverteilung und daraus ein auf die Breite normierter Eiseintrag von $14\,203 \text{ m}^3 \text{ a}^{-1}$.

Die ursprünglich aus Gleichung 5.19 erhaltene vertikale Geschwindigkeitsverteilung stellte allerdings keine numerisch stabile Randbedingung für prognostische Versuche dar. Die Eismächtigkeit zeigte auf den ersten Gitterpunkten in Fließrichtung eine im Lauf der zeitlichen Entwicklung zunehmende periodische Störung. Da die Randbedingung für den Eiseintrag aus dem Ansatz für scherungsdominiertes Fließen entwickelt wurde, stimmt sie nicht mit dem diesem Modell zugrundegelegten Formalismus überein, da hier auch im gegründeten Eis die Longitudinalspannungen berücksichtigt werden. Die vertikale Geschwindigkeitsverteilung mußte daher modifiziert werden.

Die Herleitung der Geschwindigkeitsverteilung für den Fall des vollen Spannungssystems ist nicht trivial. Daher wurde aus einem Analogschluß ein verbessertes Profil berechnet. Die Anwesenheit deviatorischer Longitudinalspannungen vermindert den Scherspannungsanteil in der Kräftebilanz zwischen Antriebsspannung und dagegen wirkenden Spannungen. Eine geringere Scherspannung führt zu einem flacheren Verlauf des Geschwindigkeitsprofils (siehe auch Paterson, 1994, S.267). Um nun den Eiszufluß konstant zu halten, wurde das Geschwindigkeitsprofil gedehnt, ohne die resultierende mittlere Geschwindigkeit von $10,67 \text{ m a}^{-1}$ zu verändern.

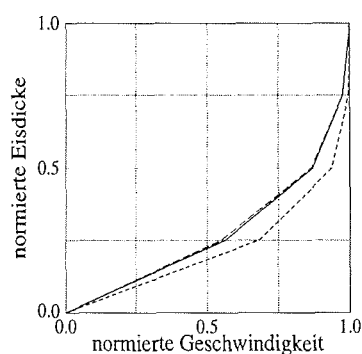
In einer mehreren Eisdicken entsprechenden Entfernung vom Rand befindet sich der Eisschild nach einer Entwicklung von mehr als eintausend Jahren nahe am Gleichgewichtszustand. Die lokale Massenbilanz ist ausgeglichen und damit scheint die Annahme gerechtfertigt, von einem stabilen Geschwindigkeitsfeld auszugehen. In Gleichung 5.19 hängt die relative vertikale Geschwindigkeitsverteilung weder von der Eisdicke, noch von der Oberflächenneigung ab. Unter der Annahme, daß dies auch für den allgemeinen Spannungsfall weiterhin gültig ist, kann diese relative Verteilung auch auf den Modellrand übertragen werden. Die Berechnungen ergeben unter Berücksichtigung der Erhaltung der mittleren Geschwindigkeit auf dem Rand aus dem relativen Geschwindigkeitsprofil eine neue Oberflächengeschwindigkeit:

$$u_s = 4 \times 10,67 / (0,5 \times 1,0 + 0,976 + 0,870 + 0,565 + 0,5 \times 0,0) \quad (9.1)$$

Daraus errechnet sich wiederum das vertikale Geschwindigkeitsprofil für das einströmende Eis. Die Zahlenwerte sind in Tabelle 9.1 wiedergegeben. Die Verwen-

Tabelle 9.1: Die benutzten Werte für das Vertikalprofil der Einströmgeschwindigkeit in m a^{-1} . Die eng gestrichelte Kurve in der nebenstehenden Abbildung zeigt die vertikale Geschwindigkeitsverteilung für reine Scherung. Der aus dem Modell abgeleitete Verlauf (lang gestrichelt) deckt sich beinahe vollständig mit der angepaßten Kurve (durchgezogene Linie). Weitere Erläuterungen im Text.

aus Gl. 5.19	aus dem Modell	angepaßte Kurve
13,69	14,67	14,67
13,65	14,32	14,41
12,85	12,77	12,71
9,37	8,30	8,30
0	0	0



dung dieser Werte führte zu einem zufriedenstellenden Resultat, wenngleich die Eismächtigkeit auf der zweiten Gitterpunktsreihe immer noch nicht korrekt ist und damit die Ergebnisse in diesem Bereich beeinträchtigt sind.

Die sehr sensible Reaktion der Eismächtigkeiten auf das Geschwindigkeitsprofil am Rand und der hohe Zeitaufwand für die erforderlichen Tests verhinderte bisher eine optimale Anpassung.

Ein Versuch, die aus dem Modell erhaltenen Werte mit Hilfe der Gleichung 5.19 zu reproduzieren, führte zu einem Exponenten von $n+1 = 2,9$ anstelle von $n+1 = 4$ in der Berechnung des Terms für die vertikale Verteilung. Für diesen Wert sind ebenfalls die Geschwindigkeitswerte errechnet und in Tabelle 9.1 aufgelistet worden. Der graphische Vergleich zeigt eine gute Anpassung der Ergebnisse aus der modifizierten Formel an das aus dem Modell erhaltene Profil. Inwieweit diese Beziehung allerdings gültig ist, muß erst noch in weiteren Versuchen bewertet werden.

9.1.1 Gleichgewichtsgeometrie und Geschwindigkeitsfeld

Mit diesen Geschwindigkeitswerten als resultierende Einstromrandbedingung und dem Randübergang für eine Schelfeisfront auf der gegenüberliegenden Seite konvergierte das Modell nach 1670 Jahren Modellzeit zu einem Gleichgewichtszustand, der in Abb. 9.1 oben dargestellt ist.

Die Aufsetzlinie befindet sich bei Kilometer 44 und liegt damit auf dem gleichmäßig geneigten Teil des Untergrundes, etwa 16 Kilometer vom Übergang zur Tiefsee entfernt. Die Eisdicke reduziert sich auf diesen 44 Kilometern von anfänglich 1330 m auf 590 m am Eintritt in das Schelfeis. Auf den anschließenden 56 Kilometern Schelfeis dünnt der Eiskörper um weitere 331 m auf eine Frontmächtigkeit von 259 m aus. Die mittlere Antriebsspannung liegt damit im zentralen Eisschild in der Größenordnung

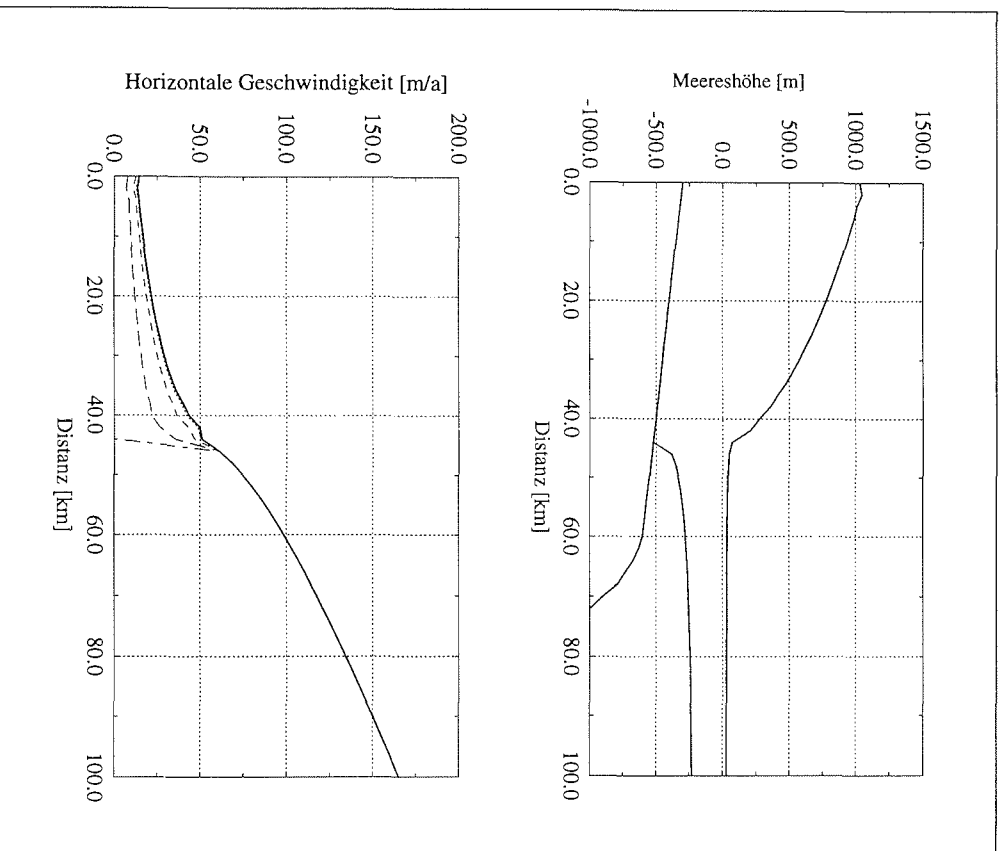


Abbildung 9.1: Geometrie und Horizontalgeschwindigkeiten des Eiskörpers in einem Schnitt längs zur Fließrichtung. In der oberen Graphik sind Eisober- und unterkante und der Untergrund über das Profil aufgetragen. Die untere Abbildung zeigt die Geschwindigkeiten für die einzelnen Schichten, wobei die dicke, durchgezogene Linie die Oberflächengeschwindigkeit darstellt. Die Werte für 75% der Eismächtigkeit ist gepunktet gezeichnet, kann aber kaum von den Werten für die Oberfläche unterschieden werden. Darunter folgen die Kurven für 50%, 25% und 0% der Eisdicke.

von 200 kPa, während sie im Schelfeis auf Werte um 0,7 kPa abnimmt (siehe auch Abb. 9.11).

Die Geschwindigkeiten verlaufen kontinuierlich und bis auf die ersten, von den Randbedingungen beeinflussten Gitterpunkte, streng monoton steigend entlang des gesamten Profils (Abb. 9.1, unten). Die Werte der größten Beschleunigung finden sich um die Position der Aufsetzlinie zwischen $x = 35$ km und $x = 55$ km, während die Geschwindigkeitszunahme danach im Schelfeis nahezu linear verläuft. Dieses Ergebnis stimmt qualitativ gut mit den Beobachtungen im Feld aus Kapitel 7, Abb. 7.5, überein.

Auffallend ist eine Abweichung der Geschwindigkeiten in den oberen Schichten des gegründeten Eises an der Aufsetzlinie vom erwarteten stetig zunehmenden Profil. Von Kilometer 42 nach Kilometer 44 nimmt die Oberflächengeschwindigkeit nur um $1,34 \text{ m a}^{-1}$ zu, während davor und dahinter die Zunahme $6,22 \text{ m a}^{-1}$ bzw. $9,88 \text{ m a}^{-1}$ auf zwei Kilometer betragen. Mit zunehmender Tiefe schwächt sich dieser Effekt ab und ist in der letzten Schicht über dem Boden nicht mehr zu erkennen. Die enge Begrenzung auf einen Gitterpunktsabstand weist darauf hin, daß es sich wahrscheinlich um einen numerischen Effekt handelt. Eine plausible Erklärung liegt allerdings bisher nicht vor.

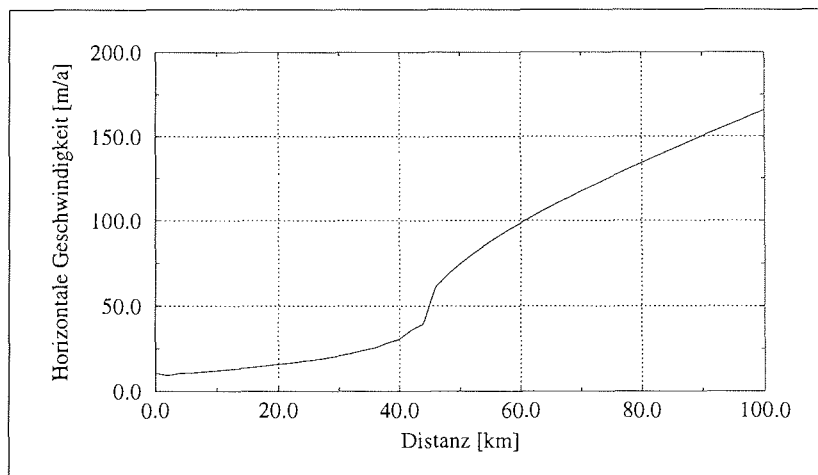


Abbildung 9.2: Über die Eismächtigkeit gemittelte Horizontalgeschwindigkeit längs des Fließprofils.

In der mittleren Horizontalgeschwindigkeit (Abb. 9.2), die für die Berechnung des Massenflusses verwendet wird, ist dieses Verhalten nicht unmittelbar zu erkennen. Sie steigt von $10,67 \text{ m a}^{-1}$ bei $x = 0$ im gegründeten Bereich allmählich bis auf $39,61 \text{ m a}^{-1}$ an der Aufsetzlinie bei $x = 44$ km an. Im anschließenden Schelfeis wird eine Zunahme von $126,04 \text{ m a}^{-1}$ auf die Austrittsgeschwindigkeit von $165,65 \text{ m a}^{-1}$ am rechten Modellrand beobachtet. Der steile Anstieg zwischen dem letzten gegründeten Gitterpunkt und dem ersten Schelfeispunkt resultiert

hauptsächlich aus dem sehr starken Gradienten der basalen Geschwindigkeit, die innerhalb dieser zwei Kilometer von 0 m a^{-1} auf $60,68 \text{ m a}^{-1}$ ansteigt und sich so bis auf 99,46% der Oberflächengeschwindigkeit nähert.

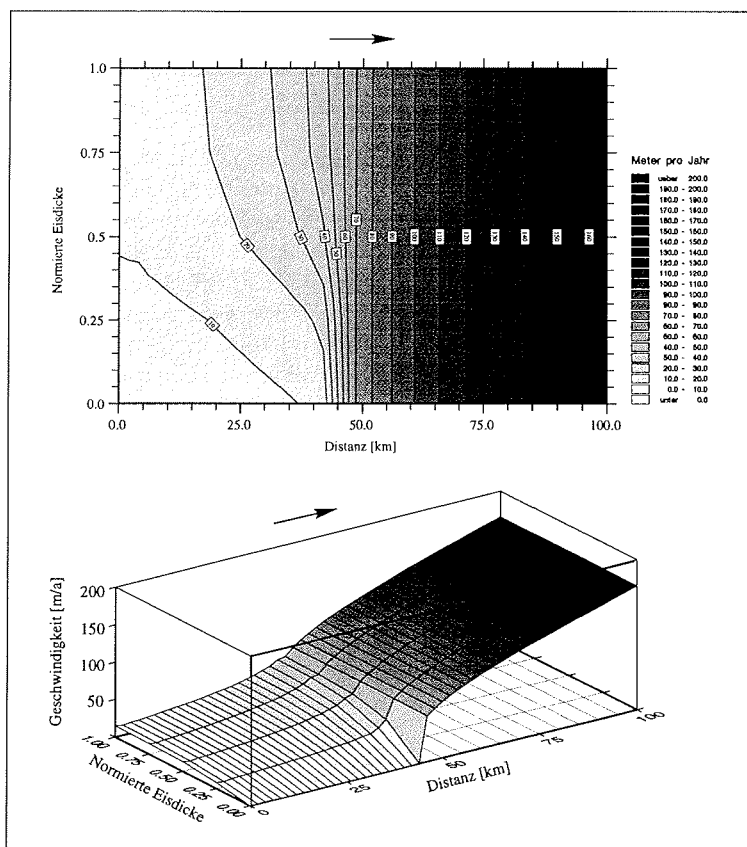


Abbildung 9.3: Verteilung der horizontalen Geschwindigkeit in einem Vertikalschnitt parallel zur Fließrichtung. Der obere Teil stellt die Isolinienverteilung innerhalb des normierten Eiskörpers dar. Im unteren Teil ist die Variation der Geschwindigkeit als vertikale Achse in einem Box-Modell aufgetragen. Die Pfeile geben die Fließrichtung wieder.

Um einen besseren Eindruck der räumlichen Entwicklung der Horizontalgeschwindigkeit zu erhalten, wurde diese in Abb. 9.3 einmal in einem Vertikalschnitt längs der betrachteten Fließlinie als Isolinienverteilung und einmal in einer dreidimensionalen Darstellung aufgetragen. Der Abstand zwischen den Isolinien entspricht dem Gradienten der Geschwindigkeit. Hieraus ist ersichtlich, daß die größten Gradienten seeseitig der Aufsetzlinie im untersten Bereich des Eiskörpers auftreten. Die Geschwindigkeiten im Schelfeis zeigen keine vertikale Variation mehr, während im Eisschild landeinwärts der Aufsetzlinie eine klare Richtungsänderung des Gradienten

zu beobachten ist. Die perspektivische Darstellung in Abb. 9.3 (unten) bedarf einiger Eingewöhnung in der Betrachtungsweise, vermittelt dann aber eine gute räumliche Interpretation des Verhaltens der dargestellten Variablen. Als zweite horizontale Achse neben der Fließrichtung ist die normierte Eisdicke gewählt worden, so daß sozusagen auf einen flach gelegten Vertikalschnitt geblickt wird. Die vertikale Achse gibt dann den Wert der Variablen wieder. Dieses *Box-Modell* ist in Anlehnung an die Arbeit von Lestringant (1994) gewählt worden, um zusätzlich zu den Vorteilen des räumlichen Eindrucks eine bessere Möglichkeit des Vergleichs anzubieten. In dieser Darstellung fällt besonders die schnelle Anpassung der basalen Geschwindigkeit an die Schelfeisverhältnisse auf. Von einem Gitterpunkt zum anderen scheint das Geschwindigkeitsfeld vollkommen tiefenunabhängig zu sein.

Eine nähere Betrachtung der vertikalen Gradienten der horizontalen Geschwindigkeit erlaubt Abb. 9.4. Hier sind die Werte für die vier tiefergelegenen Schichten jeweils auf die Oberflächengeschwindigkeit normiert, um das Verhältnis deutlich zu machen. Im allgemeinen ist die Verteilung innerhalb des gegründeten Eiskörpers nahe den in Gleichung 9.1 verwendeten Konstanten. Allerdings scheint die relative Geschwindigkeit in der unteren Hälfte der Eisschicht gegen die Aufsetzlinie etwas abzunehmen. Der beobachtete Effekt ist gering und kann, wie die Schwingung an den ersten Gitterpunkten zeigt, auch von einer nicht optimal gewählten Randbedingung hervorgerufen sein. Der Einfluß der Aufsetzlinie und eine dadurch definierte Übergangszone ist nur auf einer geringen Distanz landeinwärts dieser Grenzlinie festzustellen. Erst bei Kilometer 40 und damit zwei Gitterpunkte vor dem Punkt des Aufschwimmens verändert sich das Vertikalprofil der Geschwindigkeiten. Sie konvergieren in allen Tiefenbereichen innerhalb von vier Kilometern beinahe auf den Oberflächenwert. Die Eisdicken liegen auf diesem Abschnitt zwischen 780 m und 590 m. Auch wenn die Aussage durch den gewählten horizontalen Gitterabstand eingeschränkt ist, zeigt sich, daß hier der unmittelbare Einfluß der nahen Aufsetzlinie auf maximal die ersten landseitigen fünf Kilometer und damit fünf bis acht Eisdicken beschränkt ist. Dieses Ergebnis liegt in der auch von den meisten anderen Autoren angenommenen Größenordnung für den unmittelbaren Übergang von Eisschild- zu Schelfeisbedingungen (Herterich, 1987; Paterson, 1994). Inwiefern jedoch indirekte Auswirkungen der Anwesenheit eines Schelfeises, etwa durch die Erhöhung der deviatorischen Longitudinalspannung, die Form und Dynamik des Eisschildes beeinflussen, bleibt noch zu klären.

Die fehlende Scherkraftübertragung an der Unterseite von Schelfeis liefert die Begründung dafür, daß in den Schelfeismodellen die horizontale Geschwindigkeit als tiefenunabhängig angenommen wird. Aus dem rechten Teil der Abbildung 9.4 wird deutlich, daß dies strenggenommen nicht der Fall ist. Aus Gründen der erzielbaren Genauigkeit numerischer Verfahren sollte diese Graphik jedoch mit Vorsicht beurteilt werden. Der gleichmäßige Verlauf verleitet zu der Annahme, daß es sich um eine reelle Schelfeiseigenschaft handelt. Die einzigen Ausreißer befinden sich wieder in den oberen Schichten und an den ersten Gitterpunkten im Schelfeis. Die vertikale Änderung der Horizontalgeschwindigkeit ist demnach längs des ganzen Schelfeises nachzuweisen, ist aber auch nahe der Aufsetzlinie unter einem Promille des Absolutbetrages. Geschwindigkeitsdifferenzen von 0,1 Promille zwischen Oberfläche und Unterseite treten noch in einem Abstand von 16 Kilometern von der Aufsetzlinie

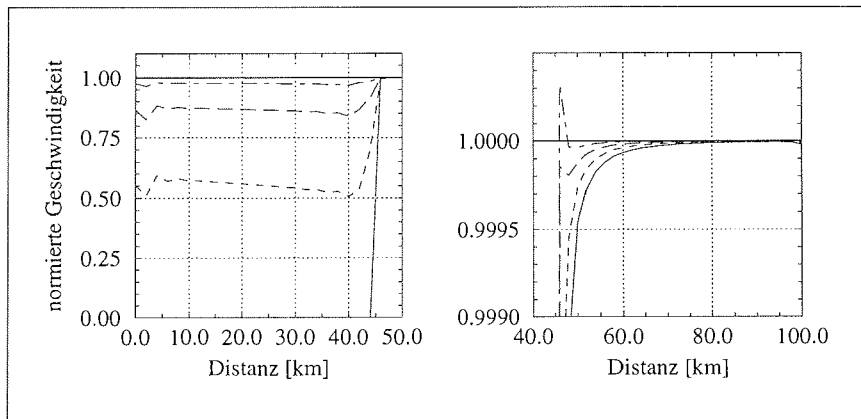


Abbildung 9.4: Auf die Oberflächenwerte normierte Horizontalgeschwindigkeit in den verschiedenen vertikalen Gitterebenen im Eisschild (links) und im Schelfeis (rechts).

auf. Eine Beeinflussung dynamischer Prozesse im Schelfeis durch diese minimalen Gradienten besteht jedoch sicherlich nicht. Aufgrund dieses Ergebnisses kann die horizontale Ausdehnung der Übergangszone auf der Schelfeisseite auf wenige Eismächtigkeiten begrenzt werden.

Die vertikale Geschwindigkeit ist im Verhältnis zur horizontalen Geschwindigkeit um zwei Größenordnungen kleiner und zeigt ein auffallend anderes Muster. Abb. 9.5 ist nach dem gleichen Schema aufgebaut, wie Abb. 9.3. Zu beachten ist jedoch, daß in diesem Fall die Fließrichtung für die untere Graphik um 180° gedreht wurde, um die Anschaulichkeit zu wahren. Andernfalls wäre eine flächige Draufsicht nicht möglich gewesen.

Im wesentlichen folgt die vertikale Geschwindigkeit an der Oberfläche und an der Unterseite dem geometrischen Profil aus Abb. 9.1. Daraus erklärt sich auch der räumliche Versatz der Maxima, da das steilste Gefälle der Oberfläche kurz vor der Aufsetzlinie bei Kilometer 42 auftritt, während die größte Steigung der Unterseite unmittelbar an die Aufsetzlinie bei Kilometer 44 anschließt. Die höchsten vertikal nach oben gerichteten Geschwindigkeiten werden daher zwischen Kilometer 44 und 51 an der Eisunterseite gefunden. Der Gradient der vertikalen Geschwindigkeit bleibt durch die gesamte Eissäule in einer schräg einfallenden Zone direkt an der Aufsetzlinie (Kilometer 42 bis 47) nahezu konstant bei $0,3 \text{ m a}^{-1} \text{ km}^{-1}$.

Im gesamten gegründeten Bereich sind die Geschwindigkeiten, anders als etwa in alpinen Gletschern, wegen der fehlenden Ablation am Eisschildende negativ. Für die Existenz von basalem Schmelzen könnten in den betreffenden Gebieten ebenfalls positive Geschwindigkeiten auftreten. Eine neutrale Fläche ohne vertikale Bewegung innerhalb des Eiskörpers kann sich erst im Schelfeis ausbilden. Die konstante Akkumulation von $0,3 \text{ m a}^{-1}$ ist gleichbedeutend mit einer zusätzlichen vertikalen Geschwindigkeitskomponente dieses Betrages. Dies ist der Grund dafür, daß sich die $0,0 \text{ m a}^{-1}$ Isolinie im größten Teil des Schelfeises in der unteren Hälfte des Eiskörpers

befindet. Unter dynamischen Gesichtspunkten sollte daher zumindest im Schelfeis die $-0,3 \text{ m a}^{-1}$ Isolinie als neutrale Fläche betrachtet werden. Die Oberflächenwerte für die vertikale Geschwindigkeit auf dem Schelfeis liegen im Bereich von $-0,31$ bis $-0,32 \text{ m a}^{-1}$. Die zugehörige Isolinie taucht wegen der Nähe zum Modellrand daher in Abb. 9.5 nicht auf. Dies bedeutet, daß fast im gesamten Schelfeiskörper die eisdynamische Bewegung nach oben gerichtet ist, was auch aus der stärkeren Neigung der Unterseite gegenüber der Schelfeisoberfläche folgen muß. Der starke Gradient nahe der Aufsetzlinie könnte zusammen mit der in Abb. 9.5 bei Kilometer 50 zu sehenden, weit nach oben reichenden, positiven Geschwindigkeit, ein Grund für die in der Übergangszone oft beobachteten lokalen Depressionen sein (Smith, 1991).

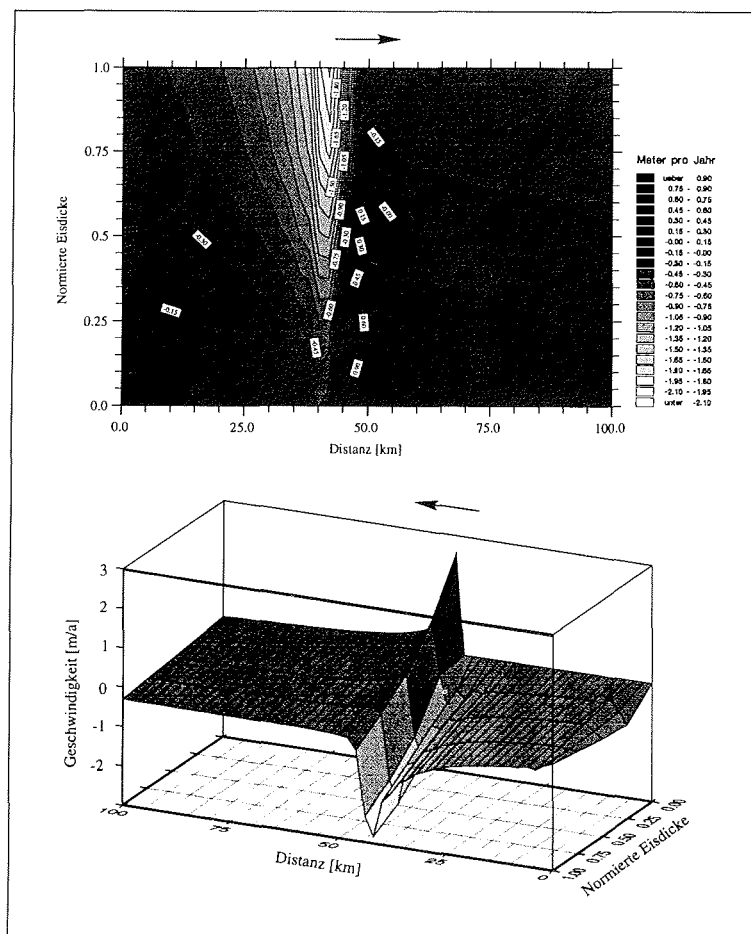


Abbildung 9.5: Verteilung der vertikalen Geschwindigkeit in einem Schnitt parallel zur Fließrichtung. Die Darstellung ist analog zu Abb. 9.3. Allerdings ist die Fließrichtung (angegeben durch die Pfeile) des Box-Modells gedreht, um eine optimale Perspektive zu erreichen.

9.1.2 Massenbilanzbetrachtungen

Das gesamte Eis, das über den Rand bei $x = 0$ in das Modell einströmt, muß zwischen der außerhalb liegenden Eisscheide und dem Modellrand deponiert werden. Unter der Annahme einer konstanten Akkumulationsrate kann damit der Abstand der Eisscheide berechnet werden. Im vorliegenden Fall ist die Linie verschwindender Horizontalgeschwindigkeit parallel zur Aufsetzlinie und $L_1 = 47,343$ km vom linken Rand des Modellgitters entfernt.

Der Untergrund ist innerhalb des Modells gleichmäßig in Fließrichtung geneigt. Um nun vergleichbare Eisschildgeometrien aus vereinfachten Betrachtungen zu berechnen, wird diese Neigung des Bettes bis zur Eisscheide extrapoliert. Analog zu der Entwicklung in Paterson (1994, S.242f), kann eine Beziehung der Eismächtigkeit auch für einen geneigten Untergrund abgeleitet werden, sofern die Gesamtausdehnung L von der Eisscheide bis zum Rand des Eisschildes und die maximale Eisdicke H_i bekannt sind.

Ist h_i die Untergrundhöhe an der Eisscheide, h_L die Untergrundhöhe am Eisschildrand $x = L$ und H die Eismächtigkeit im Abstand x von der Eisscheide, dann gilt für reine Scherspannungsverhältnisse, ohne die Anwesenheit deviatorischer Longitudinalspannungen:

$$L^{\frac{n+1}{n}} - x^{\frac{n+1}{n}} = K \left(\frac{1}{2} H^{\frac{2n+2}{n}} + \frac{n+1}{n} H^{\frac{n+2}{n}} (h - h_L) \right) \quad (9.2)$$

$$\text{mit } K = \left(\frac{2A}{(n+2)a} \right)^{\frac{1}{n}} \rho g$$

und es folgt

$$1 - \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{(n+1)}{n}} = \frac{0,5 H^{\frac{(2n+2)}{n}} + \frac{n+1}{n} H^{\frac{(n+2)}{n}} (h - h_L)}{0,5 H_i^{\frac{(2n+2)}{n}} + \frac{n+1}{n} H_i^{\frac{(n+2)}{n}} (h_i - h_L)} \quad (9.3)$$

Die Extrapolation der Eisschildoberfläche aus dem Modell, ohne Berücksichtigung des angrenzenden Schelfeises, liefert zusammen mit L_1 eine Abschätzung der Eisschildausdehnung L . Wäre kein Schelfeis vorhanden, würde sich der Rand des Eisschildes zwischen Profilkilometer 45 und 50 befinden. Damit liegt L in der Größenordnung von 90 km bis 100 km. Aus Gleichung 9.3 ist ersichtlich, daß für eine feste Ausdehnung L theoretisch unendlich viele Oberflächenprofile möglich sind. Die maximale Eisdicke und damit das Profil wird durch die rheologischen Eigenschaften des Eises bestimmt. Im vorliegenden Fall ist die horizontale Ausdehnung nur näherungsweise bekannt, womit auch die maximale Eisdicke nur innerhalb einer gewissen Schwankungsbreite ermittelt werden kann. Es wurden daher iterativ an die Gleichgewichtsgeometrie des Modells angepaßte Eisschildprofile berechnet. In Abb. 9.6 sind ein Profil, das mit der Eismächtigkeit auf dem Rand ($H = 1330$ m) übereinstimmt und ein Profil, das die beste Kurvenanpassung aufweist, zusammen mit der Modelleisdicke aufgetragen. Für das Profil bester Kurvenanpassung wurden L und H_i frei variiert und aus den Ergebnissen und der Gleichung 9.2 der Fließparameter $A = 1,2934 \times 10^{-25} \text{ Pa}^{-3} \text{ s}^{-1}$ bestimmt. Die daraus resultierende Temperatur für das dargestellte Eisschildprofil beträgt $-21,8$ °C. Die Abweichungen von der Modellkurve betragen, abgesehen von den Randpunkten, weniger als 3 m.

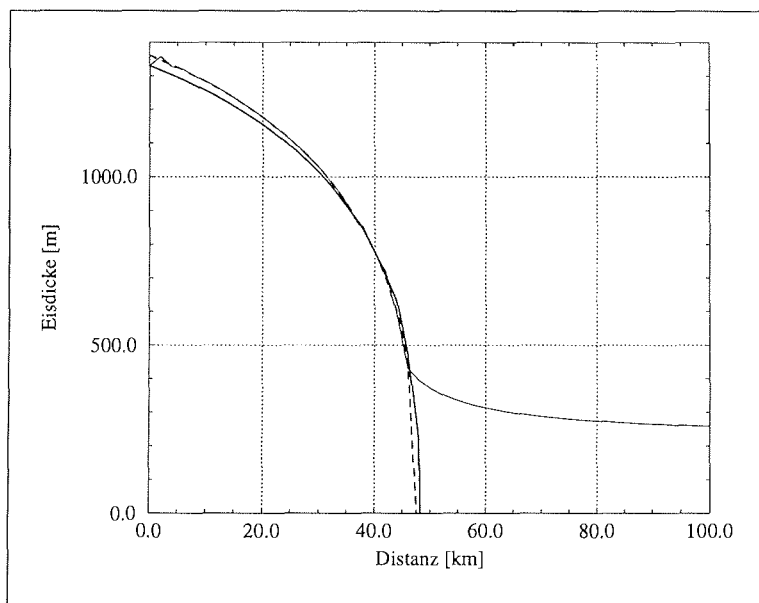


Abbildung 9.6: Eisdickenprofil aus dem Modellergebnis und für theoretische, scheidungsdominierte Eisschilde. Das dickere, durchgezogene Profil stellt die Eisdickenverteilung für ein Eisschild mit einer Ausdehnung von 95,609 km und einer Gipfelmächtigkeit von 1470,4 m, das gestrichelte Profil die Eisschildmächtigkeiten für eine laterale Ausdehnung von 94,950 km und einer maximalen Mächtigkeit von 1510 m dar. Die dünne durchgezogene Linie entspricht der Eisdicke aus dem Modellergebnis.

Der Vergleich des in den Randbedingungen identischen Profils mit dem Modellergebnis liefert auf dem größten Teil der Fließlinie zu geringe Eismächtigkeiten. Erst bei Kilometer 40 übersteigen die analytischen Eismächtigkeiten jene aus dem Modell. Die Eisdicken nahe der Aufsetzlinie sind durch die unterschiedlichen gültigen Mechanismen nicht mehr vergleichbar. Im numerischen Modell steigen die Geschwindigkeiten deutlich an und der Eiskörper dünnt dadurch rasch zum Schelfeis hin aus, während am Rand des reinen Eisschildes die Geschwindigkeiten auf Null zurückgehen und die Reduzierung der Eisdicke allein durch Ablation erreicht werden muß.

Der Vergleich der Profile legt den Schluß nahe, daß die nicht optimal beschriebene Randbedingung bei $x = 0$ km für die unterschiedliche Eisdickenverteilung verantwortlich ist. Für den Fall einer rückwirkenden Kraft des Schelfeises müßte eine Verdickung des Eisschildes auch schon auf den ersten Kilometern landeinwärts der Aufsetzlinie zu beobachten sein und nicht erst nach 10 Kilometern. Daher scheint aus dem Vergleich der Eisdickenprofile der Schluß gerechtfertigt, daß für ein uniaxial expandierendes Schelfeis ohne seitliche Reibung die Systeme *Eisschild* und *Schelfeis* dynamisch entkoppelt sind.

Der Schelfeisteil des Modellgebietes wurde in diesem Modellversuch, abweichend von den EISMINT Experimenten, ebenfalls mit den vollständigen Gleichungen berechnet. Bei den EISMINT Tests wurde zur Vergleichbarkeit der Modelle nur ein reduzierter Gleichungssatz verwendet, der physikalisch, nicht jedoch numerisch, den gängigen Schelfeismodellen entsprach. Eine Schwierigkeit der Gegenüberstellung von den hier berechneten Modellergebnissen und den analytischen Resultaten ist die fehlende vertikale Abhängigkeit der Variablen in der analytischen Lösung. Da die vertikale Variation jedoch, wie im Fall der horizontalen Geschwindigkeit schon gezeigt, mit zunehmendem Abstand von der Aufsetzlinie sehr schnell auf minimale Werte absinkt, wurden die Vergleichsprofile in Abb. 9.7 für das Schelfeis ab dem ersten Gitterpunkt nach der Aufsetzlinie berechnet.

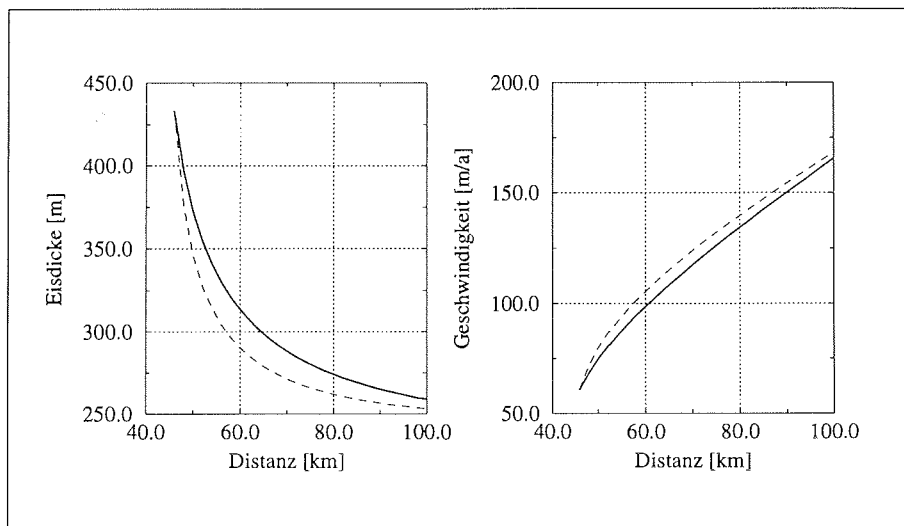


Abbildung 9.7: Modellvergleich von Geschwindigkeit und Eisdicke im Schelfeis mit der Lösung aus Oerlemans und Van der Veen (1984). Die Modellergebnisse sind als durchgezogene Linien ab dem ersten seeseitigen Gitterpunkt nach der Aufsetzlinie (Profilkilometer 46) aufgetragen. Die analytisch berechneten Werte sind durch die gestrichelten Linien dargestellt.

Die Eisdickenvariation sowie die damit aus dem Massenfluß resultierenden Geschwindigkeiten ergeben sich aus der Formulierung von Oerlemans und Van der Veen (1984, S.64f.), für ein scherspannungsfreies Schelfeis:

$$H = \left(\frac{C}{a} - \frac{u_a^{n+1} \left(\frac{C}{a} H_a^{n+1} - 1 \right)}{(a x + H_a u_a)^{n+1}} \right)^{-1/(n+1)}, \quad (9.4)$$

wobei H_a und u_a die Anfangswerte für Eisdicke und Geschwindigkeit, a die Akkumulationsrate, x die Profilposition und C eine Materialkonstante sind.

Da die Randbedingungen für den Masseneintrag, Eisdicke und Geschwindigkeit auf dem ersten Gitterpunkt identisch sind, besteht kein Unterschied in der Massenbilanz (Abb. 9.8). Die Profile für die Eisdicke und Geschwindigkeit in Abb. 9.7 weichen allerdings erheblich von den Modellresultaten ab.

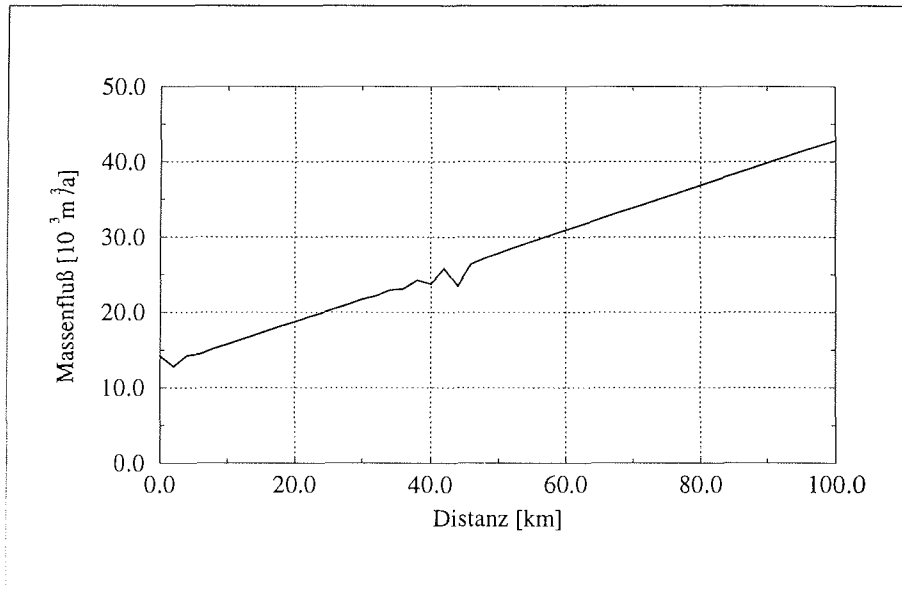


Abbildung 9.8: Auf die Einheitsbreite normierter Massenfluß längs der Fließrichtung

Aus einer anfänglichen Eisdicke von 432 m dünnt das Modell auf eine Mächtigkeit von 259 m aus, während die analytische Lösung eine Eisdicke an der Front von 253 m aufweist. Die beiden Profile würden sich jedoch bei einer Verlängerung des Profils wieder stärker annähern. Die größten Abweichungen sind in einem Abstand von 8 km (Profilkilometer 52) von der Aufsetzlinie mit 27,3 m, oder rund 8% der Eisdicke zu beobachten. Das Schelfeis expandiert auf den ersten Kilometern bei gleichem Masendurchsatz langsamer, als es aus der scherungsfreien Theorie zu erwarten ist. Entsprechend liegen die resultierenden Modellgeschwindigkeiten durchgehend unter den Ergebnissen aus Gleichung 9.4. Die maximale Abweichung beträgt 6,86 m/a oder rund 7% bei Profilkilometer 60.

Aus diesen Ergebnissen folgt, daß sich ein Schelfeis bei Berücksichtigung aller Terme in der Spannungsbeziehung nahe der Aufsetzlinie weniger duktil verhält, als es die vereinfachte Theorie vorhersagt. Für Schelfeise großer horizontaler Ausdehnung werden sich die Verhältnisse an der seeseitigen Eisfront nicht sehr von den analytischen Ergebnissen unterscheiden. Die Gradienten innerhalb der ersten 30 bis 40 Kilometer dagegen zeigen eine wesentlich stärkere Abweichung. Der Grund für dieses unterschiedliche Verhalten liegt darin, daß die für die Entwicklung des analytischen Ausdrucks verwendete Annahme $\sigma_{xx} = -\sigma_{zz}$ lokal erst in einem Abstand mehrerer Kilometer von der Aufsetzlinie gültig ist. Nahe der Aufsetzlinie unterscheiden sich $\dot{\epsilon}_{xx}$ und $\dot{\epsilon}_{zz}$ um bis zu $7 \times 10^{-3} \text{ a}^{-1}$. Die effektive Deformationsrate unterscheidet sich

damit von ihrem analytischen Wert und führt zu den beobachteten geringeren Dehnungsraten. Die Scherdeformationsrate $\dot{\epsilon}_{zz}$ dagegen ist innerhalb des Schelfeises um zwei bis drei Größenordnungen kleiner als die Deformationsraten der Hauptachsen und spielt daher nur eine untergeordnete Rolle. Bezogen auf die Gesamtdynamik hat dieser Effekt keinen Einfluß. Das transportierte Eisvolumen entspricht einer ausgeglichenen Massenbilanz, wie in Abb. 9.8 zu erkennen ist. Die akkumulierte Schneemenge wird, wie für das Gleichgewicht zu erwarten, vollständig abtransportiert. Nur im landseitigen Bereich nahe der Aufsetzlinie ist eine numerische Störung zu erkennen, die von dem plötzlichen Übergang der Randbedingungen von *no slip* zu *free slip* hervorgerufen wird. Direkt am Modellrand ist die Massenbilanz aus der schon erläuterten Randwertproblematik ebenfalls verletzt, was allerdings keine Beeinträchtigung des Gesamtsystems bewirkt.

9.1.3 Der Spannungszustand im Eiskörper

Der Spannungszustand in einem Eiskörper bestimmt über das Fließgesetz dessen Deformation. Die schon mehrfach angesprochene Dominanz von Scherspannungen im Eisschild, bzw. deviatorischen Longitudinalspannungen im Schelfeis, ist in den Abb. 9.9 und 9.10 deutlich zu sehen. Während jedoch das Schelfeis völlig scherspannungsfrei ist, existieren im Eisschild deutlich von Null verschiedene deviatorische Longitudinalspannungen, die an der Oberfläche dieselbe Größenordnung erreichen wie die Scherspannungen. In den tieferen Bereichen nimmt dieses Verhältnis immer mehr ab und bereits bei der halben Eisdicke ist die Scherspannung schon um mindestens einen Faktor 10 höher als τ_{xx} .

Eine starke Zunahme des Gradienten der Longitudinalspannung setzt in den tieferen Eislagen erst wenige Kilometer vor dem Übergang zum Schelfeis ein. Die maximalen Spannungswerte werden mit über 100 kPa an der Schelfeisunterseite vier Kilometer hinter der Aufsetzlinie erreicht. Dieses, mit hohen Dehnungsraten verknüpfte Maximum liegt bereits im Bereich der Festigkeitsgrenze von Gletschereis und es folgt, daß es bei der beschriebenen Geometrie an einem abrupten Übergang von einem gefrorenen Eisschild zu einem frei schwimmendem Schelfeis zur Bildung von Bodenspalten kommen kann. Bereits nach zehn Kilometern sind die Spannungswerte wieder unter 80 kPa gefallen und nehmen unabhängig von der Tiefe gegen die Schelfeisfront hin langsam ab. Für das beschriebene Modell uniaxialer, ungebremster Bewegung wurde an keiner Stelle, ausgenommen des physikalisch nicht realistischen Eintrittsrandes, Kompression festgestellt.

Die vertikale Scherspannung erreicht ihre maximalen Beträge von über 200 kPa am Boden des Eisschildes an derselben Stelle, an der der hohe Gradient der Longitudinalspannung einsetzt. Innerhalb von nur fünf Kilometern sinkt die Scherspannung im Schelfeis auf Werte nahe 0 kPa ab. Die in den ersten Schelfeiskilometern immer noch hohen Scherspannungen sind, wie oben erläutert, mit ein Grund für das veränderte Dickenprofil des Schelfeises. Innerhalb des Schelfeises spielen Scherspannungen keine Rolle. Im gegründeten Bereich fällt auf, daß der vertikale Spannungsgradient nicht konstant ist. Mit zunehmender Tiefe nimmt der Gradient ab. Die maximalen Scherspannungswerte finden sich trotzdem am Boden des Eisschildes. Eine Erklärung hierfür könnte in der stark von der Übergangszone geprägten Verteilung der vertikalen Geschwindigkeit liegen.

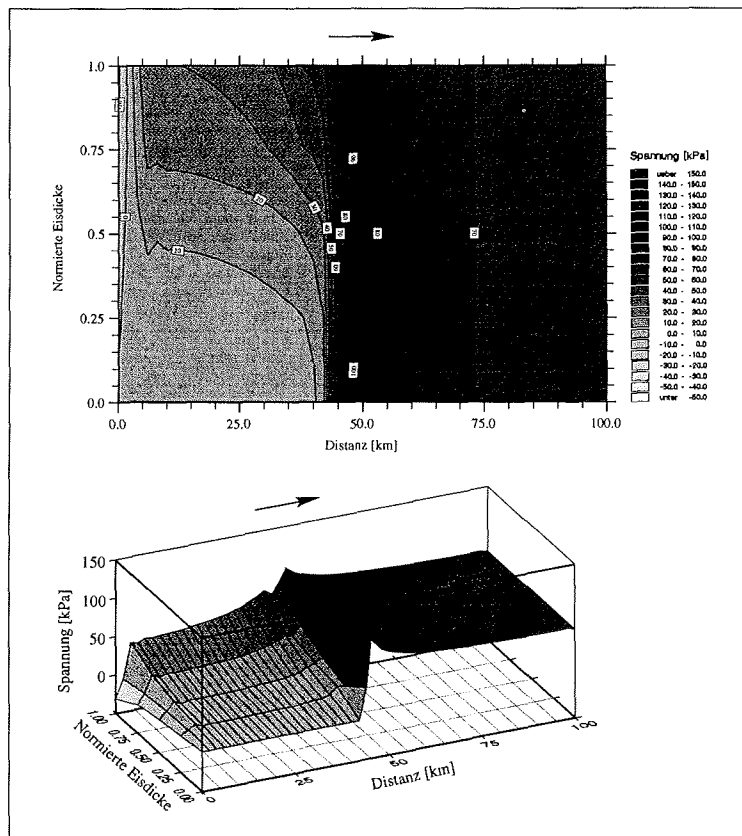


Abbildung 9.9: Verteilung der deviatorischen Longitudinalspannung τ_{xx} in einem Vertikalschnitt parallel zur Fließrichtung, die durch die Pfeile angegeben wird.

Eine grobe Abschätzung der Kräftebilanz zeigt, daß im Eisschild die basale Scherspannung durch die aus der Oberflächenneigung resultierende Antriebsspannung kompensiert wird. Abweichungen von diesem Gleichgewicht fordern die Existenz von deviatorischen Longitudinalspannungen, um die Bilanz auszugleichen. Der in Abb. 9.11 dargestellte Vergleich dieser einzelnen Spannungsgrößen bestätigt diese Annahme. Die Summe von mittlerer deviatorischer Longitudinalspannung und vertikaler Scherspannung kompensiert über 80% der Antriebsspannung. Im Eisschild ist allerdings ein Restfaktor ähnlich dem *variational stress term* von Van der Veen (1987) nicht zu vernachlässigen, der diese, der Bewegung entgegenwirkende, Verzögerungsspannung durch interne Scherung im Eiskörper darstellt.

In der Übergangszone nahe der Aufsetzlinie zeigt sich eine geringfügige Verschiebung der Maxima in den einzelnen Spannungskomponenten. Der Gitterpunktabstand von 2000 m führt zu einem relativ abrupten Übergang der Oberflächenneigung an der Aufsetzlinie. Da für die Berechnung der Spannungen zentrale Differenzen verwendet wurden, weist die gemittelte Oberfläche an diesem Punkt aber eine geringere Neigung, und damit eine geringere Antriebsspannung, auf als am benachbarten

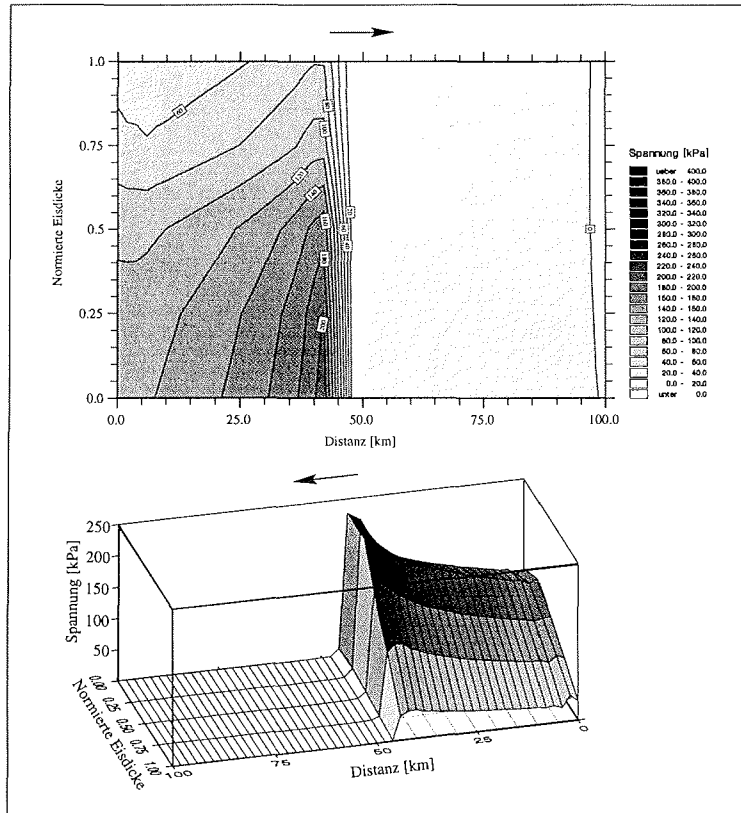


Abbildung 9.10: Verteilung der vertikalen Scherspannung τ_{xz} in einem Vertikalschnitt parallel zur Fließrichtung. Aus Gründen der besseren Darstellung ist das Boxmodell wie in Abb. 9.5 um 180° gedreht.

Inlandeispunkt. Das Maximum der basalen Scherspannung liegt ebenfalls auf der gegründeten Seite sehr nahe an der Aufsetzlinie, kurz bevor die Randbedingung wechselt. Das Maximum der deviatorischen Longitudinalspannung dagegen entsteht durch die starke Mobilisierung des Eises nach dem Wegfall der *no slip* Randbedingung und befindet sich daher erst jenseits der Aufsetzlinie auf der Schelfeisseite des Eiskörpers. Hier gehen die anderen beiden Spannungskomponenten sehr schnell gegen Null, während die Longitudinalspannung als Antriebskraft der Schelfeisexpansion bis zur Modellgrenze hin bestehen bleibt. Erneut kann an der Einstromseite des Modells die Problematik der exakten Wahl der Randbedingung beobachtet werden. Die Verwendung von zentralen Differenzen bei der Spannungsberechnung weitet die Störung noch über einen zusätzlichen Gitterpunkt hin aus. Der stetige Verlauf der Kurven innerhalb des Modells deutet jedoch darauf hin, daß sich diese numerischen Randeekte nicht in das Modellgebiet hinein fortpflanzen.

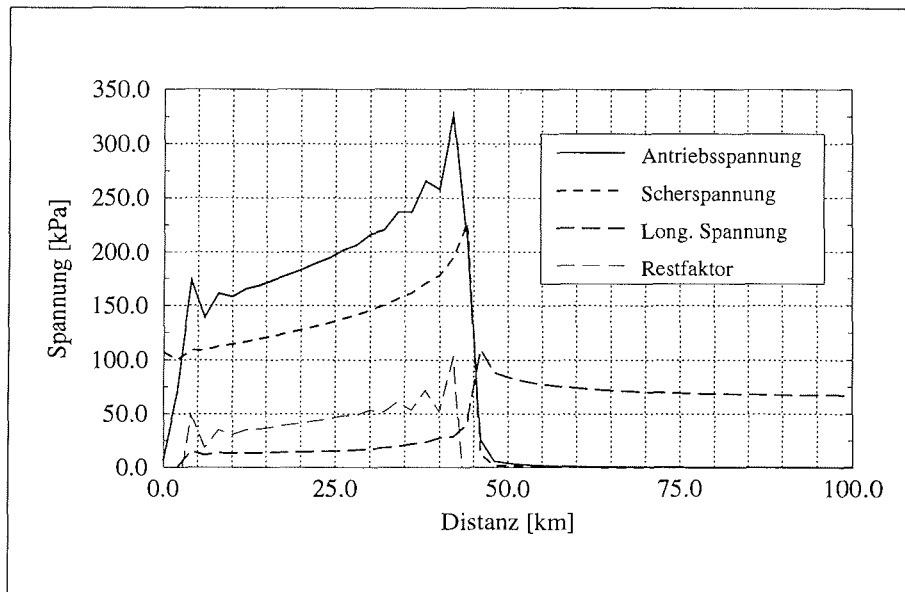


Abbildung 9.11: Antriebsspannung, basale Scherspannung und mittlere deviatorische Longitudinalspannung parallel zur Fließrichtung. Die Differenz zwischen Antriebsspannung und der Summe aus Scherspannung und Longitudinalspannung ergibt den Restfaktor.

9.1.4 Sensitivitätstest zur Gitterweite

Ein kritischer Punkt bei der Modellierung ist die Relation zwischen der Gitterweite und der räumlichen Variablenvariation. In den großskaligen Eisschild- und Schelfeismodellen liegt das Interesse auf den globalen Mechanismen. Kleinräumige Effekte können bei typischen Abständen der Gitterpunkte von 20 bis 30 km nicht aufgelöst werden. Die in der Übergangszone zwischen Eisschild und Schelfeis wirkenden Mechanismen weichen vermutlich nur in einem relativ begrenzten Raum von einigen Eismächtigkeiten lateraler Ausdehnung vom allgemeinen dynamischen Verhalten des jeweiligen Regimes ab. Die gewählte Gitterweite muß, soll die Variation in ausreichender Genauigkeit erfaßt werden, deutlich kleiner als der vage Begriff *einige Eismächtigkeiten* sein. Das Dilemma zwischen möglichst hoher Genauigkeit und dafür minimal benötigter Rechenzeit läßt sich nur begrenzt lösen. Der gewählte Gitterpunktabstand von 2000 m in Fließrichtung ist, wie im ersten Teil dieses Kapitels gezeigt, ausreichend klein, um die Änderung der Spannungsverhältnisse nahe der Aufsetzlinie aufzulösen. Was damit allerdings nicht gezeigt werden kann ist, ob der in der Natur nicht existente, plötzliche Übergang von am Boden angefrorenem Eis zu freiem Gleiten durch die Wahl der Gittergröße beeinflusste Effekte erzeugt. Aus diesem Grund wurde bei ansonsten gleicher Modellkonfiguration die Gitterweite in Fließrichtung von 2000 m auf 1000 m halbiert. Aus den bereits in den vorhergehenden Abschnitten gewonnenen Erkenntnissen erschien es ausreichend, die Ausdehnung des Schelfeises auf 16 km zu begrenzen. Damit vergrößert sich die Punktzahl im Mo-

dellgitter nur um 19,6% auf 4575 Punkte. Die benötigte Rechenzeit zur Ermittlung des Gleichgewichtszustandes kann damit gegenüber einer Verdoppelung der Gitterpunkte wesentlich verringert werden. Eine weitere Reduzierung der Schelfeislänge ist, wie Versuche gezeigt haben nicht möglich, da sonst die frontale Randbedingung in den Bereich der von der Übergangszone beeinflussten Eisdynamik gerät und die Ergebnisse nicht mehr vergleichbar wären. Eine Verkürzung des Eisschildes erschien wegen der Schwierigkeit der Wahl optimaler Randbedingungen nicht ratsam. Selbst für identische Eisschildverhältnisse zeigte sich eine sehr hohe Sensibilität von Geschwindigkeit und Eismächtigkeit bezogen auf die Einstrombedingung. Die für das 2 km Gitter bereits angepaßte vertikale Geschwindigkeitsverteilung auf dem Rand führte auf dem engeren Netz zu starken Störungen insbesondere der Eismächtigkeit. Auf den ersten Gitterpunkten lag die Mächtigkeitsvariation bei über 100 m. Erst eine erneute Festlegung der vertikalen Geschwindigkeitsänderung, bei Beibehaltung des Gesamtmasseintrages, führte zu einer Amplitudenreduktion der numerischen Störung.

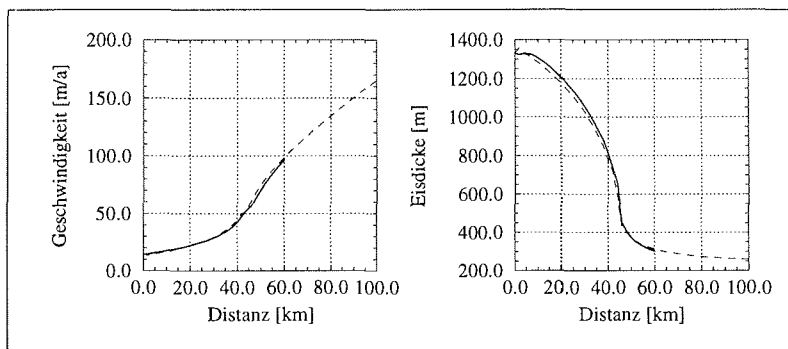


Abbildung 9.12: Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Gitterweiten in x -Richtung von 2000 m (gestrichelte Linie) und 1000 m (durchgezogene Linie).

Eine weitgehende Abschwächung des Randeffectes wie im uniaxialen Fall konnte jedoch nicht erreicht werden. Mit dem gewählten Gitterpunktsabstand ist das System so sensibel, daß bereits Unterschiede der Einstromgeschwindigkeit im Prozentbereich eine um den Faktor vier bis fünf höhere Auswirkung auf die periodische Eismächtigkeitsänderung ausüben. Solange jedoch nur die Verhältnisse in der Übergangszone von Interesse sind, spielen die Randeffecte keine Rolle, da ihre Abklingzeit zwischen sieben und zehn Kilometern liegt.

Die Vergleichbarkeit der zwei Modelle wird jedoch durch einen anderen Effekt erschwert. Die höhere Auflösung des feineren Gitters hat zur Folge, daß die Position der Aufsetzlinie genauer festgelegt wird. Für das durchgeführte Experiment verschiebt sich diese Linie um einen Kilometer in Fließrichtung. Die resultierenden Profile für Geschwindigkeit und Eisdicke verändern sich daher auch und müssen somit für einen Vergleich erst auf einheitliche Ausgangswerte gebracht werden. Nach einer Modellzeit von 720 Jahren hat sich für das feinere Gitter ein Gleichgewichtszustand eingestellt. Die Eismächtigkeiten, wie auch die Geschwindigkeiten, weichen, abgesehen von den ersten Kilometern, nur geringfügig von der Lösung für das 2-km-Gitter ab,

wenn die Verschiebung der Aufsetzlinie berücksichtigt wird (Abb. 9.12). Bei den Geschwindigkeiten liegen die maximalen Differenzen bei 4% des Absolutwertes, bei den Eismächtigkeiten bei 3%. In Anbetracht der problematischen Randbedingungen und der leicht veränderten Dynamik durch die Verschiebung der Aufsetzlinie kann davon ausgegangen werden, daß Gittereffekte die Lösung im Bereich der Übergangszone nicht beeinflussen. Am Einstromrand muß allerdings eine verbesserte Theorie erarbeitet werden, um die Störungen zu minimieren.

9.2 Erweiterung des Plattenmodells zur Simulation eines Auslaßgletschers

Das bisher besprochene uniaxiale Plattenmodell nützt die Dreidimensionalität des Programms nicht aus. Alle Gradienten der Variablen senkrecht zur Fließrichtung werden nicht berücksichtigt. Die bisherigen Ergebnisse wären daher auch mit einem zweidimensionalen Fließlinienmodell zu erzielen gewesen. Die reale Analogie zum vorliegenden Modell stellt ein nicht mehr durch seitliche Randbedingungen beeinflusstes Strömungsband innerhalb eines sehr breiten Inlandeisabflusses auf den Ozean dar. Der einfachste denkbare Fall, in dem die seitlichen Ränder eine Rolle spielen, ist die Situation eines Auslaßgletschers, der in einem Durchbruchstal des kontinentalen Randgebirges Material aus dem Eisschild in den Ozean transportiert. Eine idealisierte Form eines solchen Gletschers stellt das schon verwendete Plattenmodell dar, wenn an den seitlichen Modellgrenzen die Geschwindigkeiten auf Null gesetzt werden. Damit wirkt an den Seiten, ebenso wie am Boden des Eisschildes eine Scherspannung der Fließbewegung entgegen. Mit der Annahme eines Grenzwertes für die mittlere horizontale Scherspannung an den Seiten $\tau_{xy}(\max) = \tau_0$ kann mit einer stark vereinfachten theoretischen Analyse ein Gradient der Eisdicke längs der Fließlinie angegeben werden. Ist Y die halbe Gletscherbreite, so gilt angenähert (Paterson, 1994):

$$\frac{dH}{dx} = \frac{2\tau_0}{\rho g Y (1 - \rho/\rho_w)} \quad (9.5)$$

Daraus folgt, daß der Eisdickengradient in Fließrichtung umgekehrt proportional zur Breite des Gletschers ist. Die Absolutwerte werden erst durch die Fließparameter und die dynamischen Größen festgelegt.

Bei parallelen *no slip* Rändern existiert keine seitliche Divergenz und die Fließlinien verlaufen im diagnostischen Fall nach wie vor entlang der x -Achse. In der zeitlichen Entwicklung wird sich auch ein Mächtigkeitsgradient in Richtung der y -Achse einstellen, da das Eis am Rand nicht so schnell abtransportiert wird wie in der Mitte des Gletschers. Ein Teil des Eisvolumens am Rand wird dann entsprechend dem Mächtigkeitsgradienten Richtung Gletschermitte transportiert, und damit verändert sich die bisher lineare Form der Fließlinien.

Die seitlichen Scherkräfte verhindern einen ungehinderten Abfluß des Eises vom Kontinent. Bisher wirkte der deviatorischen Longitudinalspannung im Schelfeis der hydrostatische Druck des Wassers an der Schelfeisfront entgegen. Die aus dem Freibord resultierende Kraftdifferenz führte zur Expansion des Eiskörpers. Nun steht dieser Longitudinalspannung auch die seitliche Scherung entgegen. Als Folge nimmt

die Eisdicke zu, bis die Longitudinalspannung Werte erreicht, die die Scherspannung kompensiert und zusätzlich die Expansion in einem Gleichgewicht zur Massenbilanz hält. Die Erhöhung der Eisdicke setzt sich bis zur Aufsetzlinie fort und vermindert dort die, den Eisabfluß aus dem Inland kontrollierende Oberflächenneigung. Dies wiederum führt zu einem Absinken der Antriebsspannung in diesem Gebiet. Die vielzitierte rückwirkende Spannung (*back stress*) kann somit als Differenz zwischen der originären Antriebsspannung eines ungestörten Eisschildes und der resultierenden Antriebsspannung bei Anwesenheit eines, in seiner freien Ausdehnung behinderten Schelfeises interpretiert werden.

Mit der *no slip* Randbedingung an den Seiten wurde versucht, das Plattenmodell als Analogie zu einem Auslaßgletscher in einen Gleichgewichtszustand zu rechnen. Dabei ergaben sich mehrere Schwierigkeiten. Die Wahl des Zeitschritts entscheidet über die Stabilität des Modells. Je kleiner der Zeitschritt aber gewählt wird, desto größer ist auch der Rechenbedarf, bis ein Gleichgewicht erreicht wird. In Abhängigkeit der Gittergröße ergeben sich sehr leicht numerische Instabilitäten im prognostischen Teil des Programms, die außerdem vom gewählten numerischen Verfahren abhängen. Eine größere Anzahl benötigter Iterationen akkumuliert solche Fehler zusätzlich und kann zu völlig unrealistischen Lösungen führen. Einen relativ ernüchternden Überblick über die möglicherweise auftauchenden Probleme und numerischen Gemeinheiten gibt Kapitel 19.1 in Press et al. (1992).

Die auftretenden Irregularitäten in einer Advektionsgleichung, wie etwa der Eisdickengleichung 4.27, werden üblicherweise durch Einführung eines schwachen, künstlichen Diffusionsterms abgeschwächt oder herausgefiltert. Für das uniaxiale Experiment war dies nicht notwendig, da das Konvergenzverhalten sehr stabil war. Die Einführung neuer Randbedingungen an den Seiten führte zu Variablenvariationen senkrecht zur Hauptfließrichtung und damit zu einem zweidimensionalen Problem in der Eismächtigkeitsentwicklung. Eine Einführung künstlicher Diffusion zur numerischen Fehlerkompensation erwies sich dabei allerdings als schwierig, da die Sensitivität der Geschwindigkeiten schon auf geringe Veränderungen der Eisdicke in der Übergangszone sehr hoch ist. In Abb. 9.13 ist für einen Zeitpunkt während der prognostischen Rechnung der Einfluß des Diffusionsterms veranschaulicht.

Selbst für einen nur geringen Ausgleich zweier vermeintlicher Unstetigkeiten, mit einer Korrektur von 27 m, oder 3,9% und an der Stelle geringerer Eismächtigkeit von 30 m, oder 6%, verändert sich die Geschwindigkeitsverteilung dramatisch. Die Geschwindigkeit fällt am ersten Punkt im Schelfeis von vorher $22,5 \text{ m a}^{-1}$ auf $8,9 \text{ m a}^{-1}$ um über 60% ab.

Daraus ist ersichtlich, daß zumindest im Modell der Eismächtigkeitsgradient in der Übergangszone eine äußerst sensible Rolle in Bezug auf die Massenbilanz spielt. In der Realität wird sich aus dem Fließverhalten der geforderte Gradient dynamisch einregeln. Charakteristische Gradienten in der Übergangszone werden deshalb eine große Stabilität aufweisen, da bei einer Abweichung sofort eine dynamische Rückstellung erfolgen sollte.

Die Berechnung des Gleichgewichtszustandes konnte bisher noch nicht abgeschlossen werden. Die durch den labilen Systemzustand geforderten kleinen Zeitschritte und

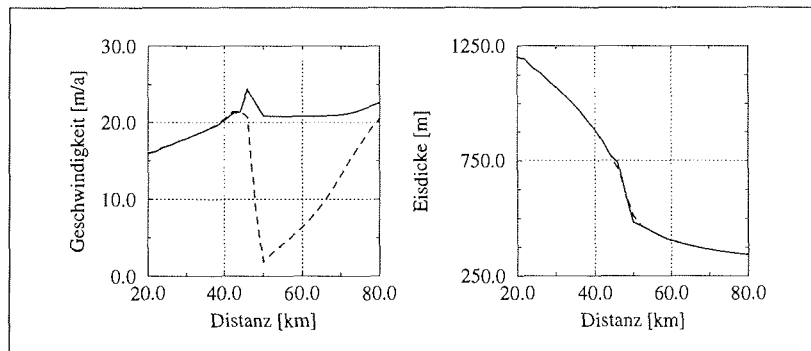


Abbildung 9.13: Effekt der künstlichen Diffusion in der Eismächtigkeitsentwicklung auf die Oberflächengeschwindigkeit. Die durchgezogene Linie ist jeweils das unkorrigierte Modellergebnis. Die gestrichelte Geschwindigkeitskurve zeigt die Reaktion auf die Einführung eines Diffusionsterms, der die Eismächtigkeit entsprechend der gestrichelten Dickenkurve verändert. Die gezeigten Geschwindigkeitsprofile sind jeweils Gleichgewichtszustände für die entsprechende Eismächtigkeitsverteilung. Das Gesamtmodell befindet sich noch nicht in einem Gleichgewichtszustand.

das enge Konvergenzkriterium wirkten sich sehr nachteilig auf die Rechengeschwindigkeit aus. Nach über 450 Jahren Modellzeit, für die auf einer CRAY *J90* etwa 1200 Stunden Rechenzeit erforderlich waren, ist die Massenbilanz auf der zentralen Fließlinie noch weit von einem ausgeglichenen Zustand entfernt. Die Transportraten zeigen noch einen erhöhten Zufluß in das Schelfeis, so daß mit einem weiteren Anwachsen der Eisdicke im Bereich des Schelfeises zu rechnen ist. Ohne die Kenntnis des Gleichgewichtszustandes bleiben alle Schlußfolgerungen aus dem transienten Zustand vorläufig. Aus der zeitlichen Entwicklung können jedoch einige Reaktionen, wengleich noch nicht quantitativ, so doch qualitativ bewertet werden.

Die erwartete Änderung der Eisdicken nach dem Wechsel zu festgehaltenen, seitlichen Randgeschwindigkeiten geht eindeutig vom Schelfeis aus. Die Reduzierung der Geschwindigkeiten führt zu einer Verdickung im größten Teil des Schelfeises, wobei an der seeseitigen Front die geringsten Zunahmen beobachtet werden.

Die Ableitung der Horizontalgeschwindigkeit an der Schelfeisfront hängt in der dritten Potenz von der Eismächtigkeit ab (Gl. 5.13). Im Fall einer geringen Erhöhung der Eismächtigkeiten vergrößert sich der Geschwindigkeitsgradient erheblich stärker und wirkt somit der Entwicklung der Eismächtigkeiten entgegen. Dieser Effekt kann in Abb. 9.14 am rechten Modellrand beobachtet werden.

Im gegründeten Bereich ist die Geschwindigkeit schon vorher mit der herrschenden Scherspannung am Boden im Gleichgewicht. Die Fläche auf der diese, den Abfluß verhindernde Kraft wirkt, ist durch die Modellbreite von 14 km sehr viel größer als die hinzugekommenen seitlichen, der Eisdicke entsprechenden Flächen. Damit ist keine starke Veränderung des Abflußverhaltens zu erwarten. Im Schelfeis dagegen wirken nun die oben erläuterten Mechanismen. In Abb. 9.14 ist klar zu sehen, wie die Eismächtigkeitsgradienten vor allem in den höheren Bereichen des Eisschildes durch

den Stauereffekt des Schelfeises vermindert werden. Zur besseren Verdeutlichung ist dafür eine Kurvenanpassung berechnet worden, die die starken numerischen Störungen auf den ersten Kilometern unterdrückt.

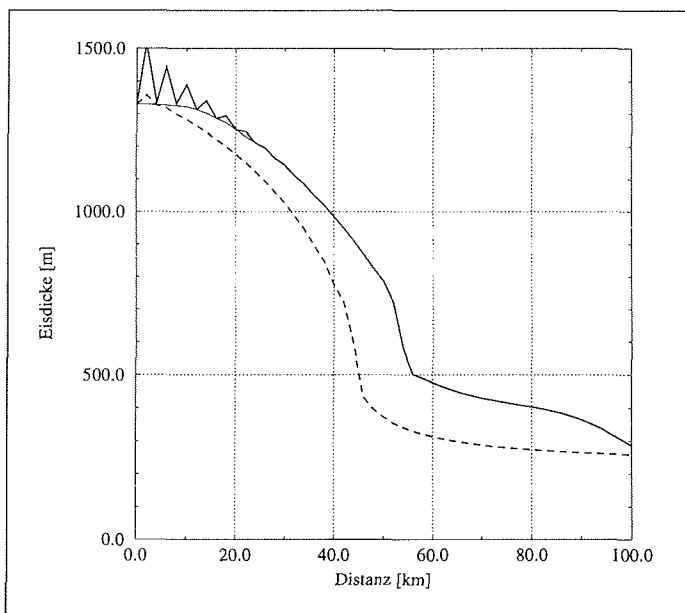


Abbildung 9.14: Vergleich der Eismächtigkeiten auf der zentralen Fließlinie des seitlich gebremsten Plattenmodells mit dem uniaxialen Plattenmodell (gestrichelte Linie). Für den bisherigen transienten Zustand wurde eine Anpassung der Eismächtigkeiten auf den stark gestörten ersten Kilometern berechnet (dünne durchgezogene Linie).

Die in den 450 Jahren der bisherigen Entwicklung auf dem Schelfeis im Mittel um 116 m angewachsene Eisdicke, hat zu einer Verschiebung der Aufsetzlinie um 12 km in Fließrichtung geführt. Im Eisschild geht die Zunahme der Mächtigkeit von 318 m an der ursprünglichen Aufsetzlinie bis auf Null am festgehaltenen linken Rand zurück. Damit reduziert sich der Eisdickengradient auf den ersten acht Kilometern von $-8,5 \times 10^{-3}$ auf $-6,1 \times 10^{-4}$.

Der Absolutwert der Einstromgeschwindigkeit ist nach Gleichung 5.19 proportional zur dritten Potenz der Oberflächenneigung. Verringert sich diese auch nur geringfügig, vermindert sich auch die Eisgeschwindigkeit über den Rand und damit der Zustrom in das Modell. Die mittlere Einstromgeschwindigkeit sollte damit von $10,67 \text{ m a}^{-1}$ auf nur noch $0,72 \text{ m a}^{-1}$ (vertikale Verteilung: $0,982 \text{ m a}^{-1}$, $0,958 \text{ m a}^{-1}$, $0,854 \text{ m a}^{-1}$, $0,555 \text{ m a}^{-1}$ und 0 m a^{-1}) zurückgehen. Bisher ist jedoch eine dynamische Änderung der Einstromrandbedingung während des Modellaufs nicht vorgesehen. Für das uniaxiale Modell stellte die Vorgabe der Einstromgeschwindigkeiten die geeignete Randbedingung dar, da damit für eine feste Konfiguration von Eisdicke und Oberflächenneigung ein Eisschild entsprechender Ausdehnung berechnet

wurde. Für eine weiterhin konstante Eisdicke auf dem linken Modellrand verändert sich mit den neuen Randbedingungen allerdings die Oberflächenneigung und damit die Geschwindigkeit. Das Modell ist mit den alten Randbedingungen somit überbestimmt. Aufgrund der nicht angepaßten Einstromgeschwindigkeit ist nicht nur das Transportvolumen zu hoch, sondern es kommt auch zu den beobachteten starken periodischen Störungen auf den ersten Gitterpunkten. An jedem Punkt eines Eisschildes existiert für den Gleichgewichtsfall nur eine lokale Lösung, die hier nicht mehr im Einklang mit den Randbedingungen steht. Ergebnisse für die variable Geschwindigkeitsrandbedingung liegen noch nicht vor.

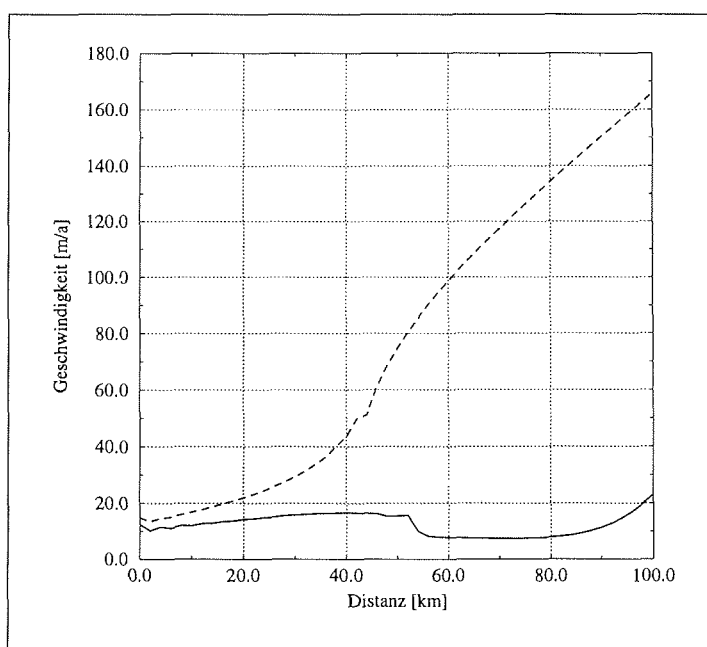


Abbildung 9.15: Vergleich der Oberflächengeschwindigkeiten auf der zentralen Fließlinie des seitlich gebremsten Plattenmodells mit den entsprechenden Geschwindigkeiten des uniaxialen Plattenmodells (gestrichelte Linie).

Die vorwiegend im Schelfeis wirkende zusätzliche Scherspannung zeigt, wie in Abb. 9.15 dargestellt, deutliche Auswirkungen auf die Geschwindigkeit. Innerhalb des Eisschildes ist immer noch eine leichte Zunahme zu verzeichnen, während die Geschwindigkeit auf dem größten Teil des Schelfeises nahezu konstant ist. An der Aufsetzlinie ist der Eisdickengradient zu klein, um den Gleichgewichtsverhältnissen einer Übergangszone zu entsprechen. Die Geschwindigkeit nimmt daher zum Schelfeis hin ab. Auf den letzten 15 km wird eine, im Verhältnis zu den Absolutwerten, starke Geschwindigkeitszunahme beobachtet, die aus der frontalen Randbedingung resultiert. Da sich die Eismächtigkeiten an der Schelfeisfront, ausgehend vom Gleichgewichtszustand des uniaxialen Modells, noch nicht stark verändert haben, ist auch der Geschwindigkeitsgradient noch vergleichbar.

Einen Überblick über den gegenwärtigen Zustand von Eisdicke und Oberfläche-

schwindigkeit gibt Abb. 9.16. Abgesehen von den Störungen im Einstrombereich entwickelt sich ein regelmäßiges, zur zentralen Fließlinie symmetrisches Eismodell. Ein deutlicher Einfluß der veränderten Randbedingungen auf die Eismächtigkeiten ist erst nahe der Aufsetzlinie zu beobachten. Im gegründeten Teil sind die Eismächtigkeiten am Rand kleiner als in der Mitte des Gletschers, was mit dem Rückstauereffekt zu erklären ist. An den Seiten sind die Geschwindigkeiten Null und die Eisdicke wächst analog zur Akkumulationsrate, solange noch kein effektiver transversaler Transport eingesetzt hat. In der Mitte dagegen wird zusätzlich zur Akkumulation Eis aus dem Hinterland dem Übergangsbereich zugeführt, das wegen der kleineren Schelfeisgeschwindigkeiten nicht vollständig abtransportiert werden kann. Im Schelfeis existiert kein verzögernder Mechanismus an der Eisfront und der Transport ist in der Gletschermitte effektiver als an den Seiten. In der Geschwindigkeitsverteilung in Abb. 9.16 weisen die auffallenden Sprünge an der Aufsetzlinie auf die noch nicht korrekt ausgebildete Übergangszone hin. Vom Beginn des Schelfeises bis zur Eis-

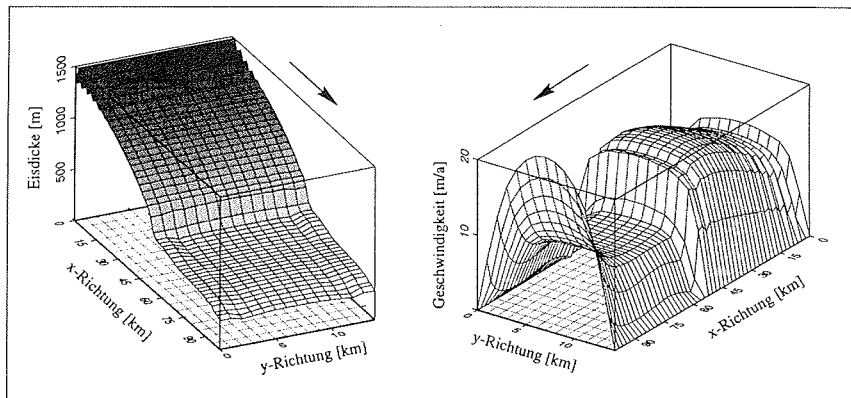


Abbildung 9.16: Räumliche Darstellung der Eisdicke und der Oberflächengeschwindigkeit des transienten Zustandes. Der Pfeil gibt jeweils die Fließrichtung an.

front zeigt sich ein zunehmender Einfluß des transversalen Eistransports. Während nahe der Aufsetzlinie die Eisdicke senkrecht zur Hauptfließrichtung kaum variiert, bildet sich in Richtung Eisfront ein konvexes Dickenprofil aus (Abb. 9.17). Bereits in den ersten Kilometern des Schelfeises wird auf beiden Seiten eine Ausdünnung festgestellt, die aus der Existenz lokaler Maxima der transversalen Geschwindigkeit in diesen Bereichen erklärt werden kann. Der Einfluß ist im mittleren Teil des Schelfeises weniger ausgeprägt, als an der Aufsetzlinie und an der Eisfront und verschiebt sich dort gegen die Gletschermite. Die x -Komponente der Eisgeschwindigkeit, parallel zur Hauptfließrichtung, zeigt dagegen keinerlei Anzeichen für die Bildung des beobachteten Eisdickenprofils. Mit zunehmender Entfernung von der Aufsetzlinie nimmt das Geschwindigkeitsprofil eine parabolische Form an. Damit müßten die Eisdicken längs der Schelfeismitte gegenüber dem Rand vermindert sein. Dies wird jedoch durch den transversalen Eistransport überkompensiert und es findet in geringem Umfang ein konvergenter Massentransport statt. Die starke Änderung des Geschwindigkeitsgradienten von der ersten Schelfeishälfte zur zweiten wird sich in der weiteren zeitlichen Entwicklung weitgehend auf Null reduzieren.

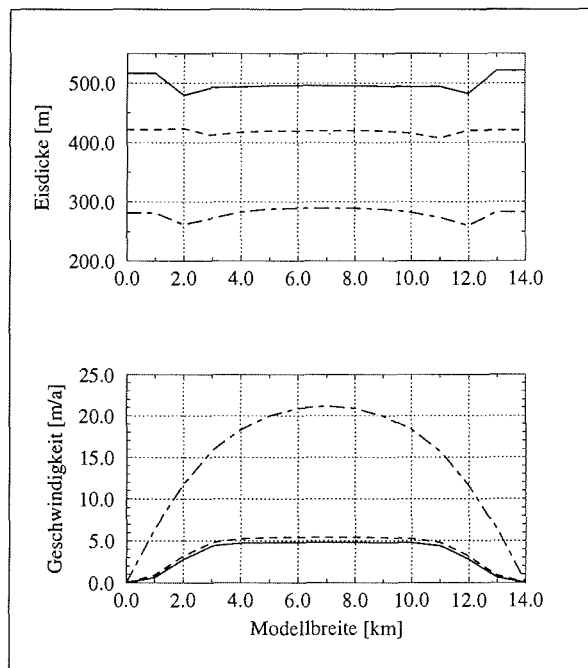


Abbildung 9.17: Querprofile von Eismächtigkeit und der Geschwindigkeit u (in x -Richtung) an drei Stellen längs der Hauptfließrichtung bei Profilkilometer 60 (durchgezogene Linie), 80 (gestrichelte Linie) und 100 (punkt-strich Linie).

9.3 Annäherung an die Realität: Das Buchtmodell

Das erweiterte Plattenmodell mit seitlicher Reibung ist ein wertvolles Instrument, dynamische Prinzipien des gebremsten Abflusses von Eis über die Aufsetzlinie zu studieren. Durch die reine *no slip* Randbedingung an den seitlichen Rändern ist der Bezug zur Realität nur begrenzt herstellbar. Eis reagiert unter sich nur langsam ändernder Belastung im allgemeinen duktil. Übersteigen die Spannungen jedoch einen Grenzwert, so kommt es zur Rißbildung und der Öffnung von Spalten. Speziell in den engen Kanälen der Ausflußgletscher werden an den seitlichen Rändern Scherungsbänder einer völlig zerstörten Eisstruktur beobachtet, die vom Überschreiten dieses Festigkeitsgrenzwertes hervorgerufen werden (Frolich und Doake, 1988). Diese Scherungsbänder entkoppeln das schnellströmende Eis vom benachbarten, ruhenden Material und vermindern somit weitgehend die Ausbildung von Scherkräften. Ein der Realität besser angepaßtes Modell sollte daher in einer geeigneten Weise ein seitliches Gleitgesetz berücksichtigen.

Hier wurde ein anderer Weg gewählt und zur Annäherung an reale Verhältnisse die zugrundeliegende Bodentopographie verändert (siehe Abb. 9.18). Das Eis fließt

von drei Seiten über geneigte Flächen Richtung Zentrum. Auf den Rändern ist das Eis unbewegt, wie es einer Eisschneise entspricht. Am vierten Modellrand gilt für schwimmendes Eis die Randbedingung der Schelfeisfront. Aufliegendes Eis wird als am Boden festgefroren angenommen. Die horizontale Dimension des Modellgitters wurde auf 51×51 Punkte erweitert und die horizontalen Gitterpunktabstände auf 1000 m in beiden Achsenrichtungen festgelegt. Damit stellt das Modellgebiet eine Bucht von 50×50 km dar, durch dessen vierte Seite die Gesamtakkumulation der Modellfläche abfließt.

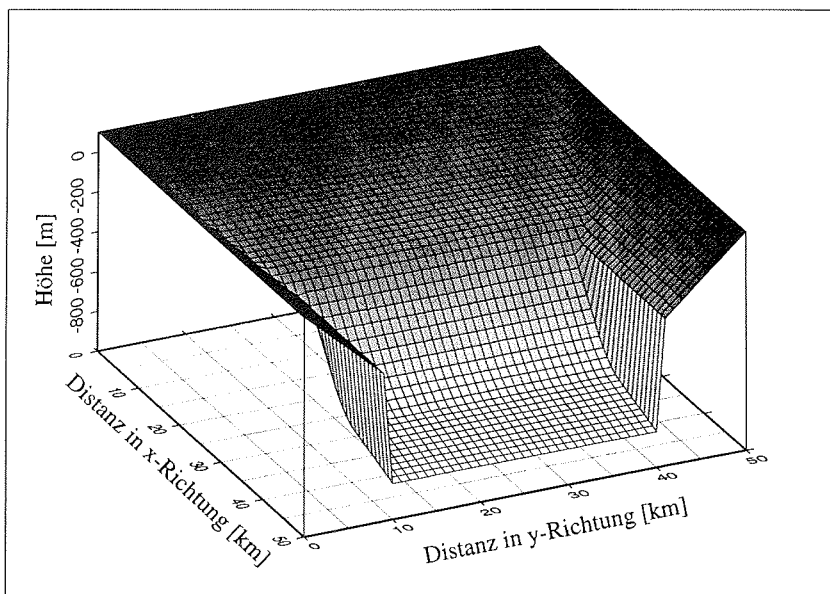


Abbildung 9.18: Bodentopographie des Buchtmodells mit dem Tiefwassertrog im vorderen zentralen Bereich des Modellgebietes. Die drei Festlandränder besitzen jeweils eine konstante Höhe von 100 m über NN.

Die Neigung des Untergrundes, dessen Höhe auf den drei seitlichen Begrenzungen überall 100 m beträgt, mißt in der zur x -Achse parallelen Hauptfließrichtung $-0,01$, an den seitlichen Ränder in Richtung Zentrum $-0,04$. Jeweils im Abstand von zehn Gitterpunkten von den seitlichen Rändern und nach 29 Gitterpunkten in x -Richtung ist ein Trog mit einer maximalen Tiefe von -820 m ausgebildet, während sich der Rand des Troges konstant bei -260 m befindet. Der Grund ist, analog zum uniaxialen Plattenmodell, die Begrenzung der Mobilität der Aufsetzlinie.

Die rheologischen Startbedingungen entsprechen denen des Plattenmodells. Mit einer anfänglich räumlich konstanten Eisdicke von 100 m und einer Akkumulationsrate von $0,3 \text{ m a}^{-1}$ wurde die Modellierung begonnen. Nun sind, wie schon erwähnt für unterschiedliche maximale Eisdicken auch beliebig viele Eisschildprofile entsprechender Ausdehnung möglich, solange der Eisschild in seiner Expansion nicht behindert wird. Ob diese freie Gleichgewichtseinstellung auch für das Buchtmodell gilt, bleibt noch zu überprüfen. In diesem Versuch wurde bei Erreichen einer Eismächtigkeit

von 860 m bei $x = 0$ die Eisdicke auf dem Rand festgehalten, um mit Sicherheit zu einem stabilen Eisschild zu gelangen, dessen Übergang zum Schelfeis sich nahe der Geländeversteilung ausbildet.

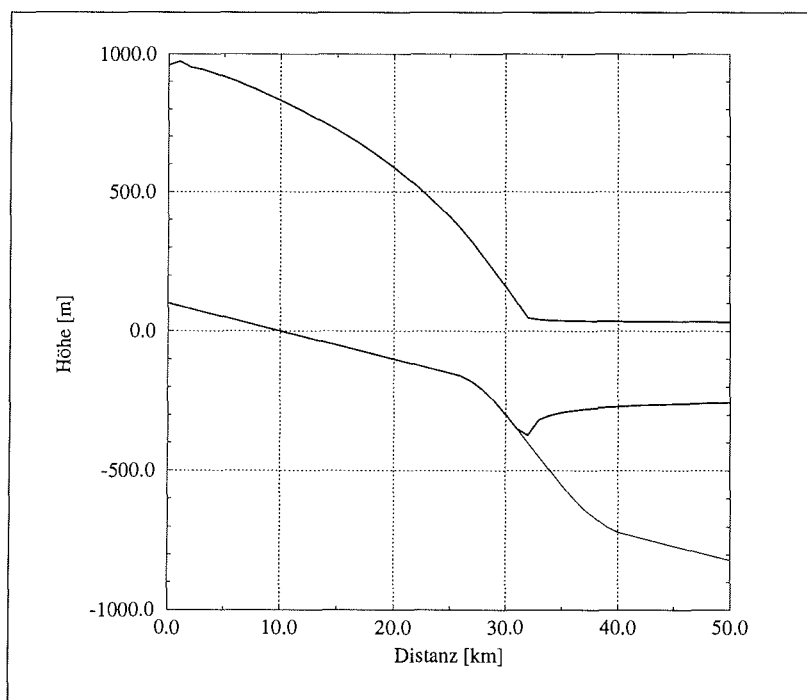


Abbildung 9.19: Geometrie des Eisschildes längs der Zentrallinie. Die Abbildung zeigt die Eisoberkante und die Eisunterkante, sowie den Untergrund, der sich bei Kilometer 27 versteilt und damit dem Abbruch des Festlandssockels entsprechen soll.

Der vorliegende, noch nicht vollständig im Gleichgewicht befindliche Zustand wurde nach 1250 Jahren Modellzeit erreicht. Die Berechnung der diagnostischen Geschwindigkeitsgleichung an den insgesamt 13 005 Gitterpunkten erfordert ein Vielfaches an Rechenzeit im Vergleich zu den vorangegangenen Versuchen. Das Modell wurde daher auf der Cray C90 des Deutschen Klimarechenzentrums in Hamburg installiert. Selbst auf dieser äußerst leistungsfähigen Großrechenanlage benötigte der bisher erreichte Modellzustand eine Rechenzeit von etwa 800 Stunden. Für zukünftige Versuche ist es daher unumgänglich die Effektivität der numerischen Lösung zu verbessern. Inzwischen befindet sich das Modell nahe dem Gleichgewicht und die Geschwindigkeitsänderungen zwischen den einzelnen Zeitschritten sind erheblich kleiner als bei Beginn des Versuchs. Damit reduziert sich die erforderliche Anzahl an Iterationen des diagnostischen Programnteils pro Zeitschritt auf einige wenige, gegenüber mehreren tausend in den ersten Modelljahren. Die modellzeitliche Entwicklung ist, am rechenzeitlichen Maßstab gemessen, erheblich schneller geworden.

Im gegenwärtigen Entwicklungszustand löst sich der Eisschild bei Profilkilometer 31 vom Untergrund ab. Die Aufsetzlinie befindet sich damit mehrere Kilometer vor dem Knickpunkt im steileren Bereich des "Kontinentallanges" (Abb. 9.19). Die Fließrate ist zum momentanen Zeitpunkt über die Schwelle so hoch, daß der Ablösepunkt nicht die tiefste Stelle des Schelfeises markiert. Obwohl die Eismächtigkeit vom letzten gegründeten Punkt zum ersten Schelfeispunkt von 455,4 m auf 427,2 m abnimmt, befindet sich bei letzterem die Eisunterkante um 22,8 m tiefer, als am Ablösepunkt. Aus dem Massenflußdiagramm auf der Zentrallinie (Abb. 9.20) ist jedoch zu sehen, daß in diesem Bereich noch keine Massenerhaltung vorliegt.

Im hier betrachteten, komplexeren System wird der Gleichgewichtszustand bei konstanter Akkumulation nicht mehr durch eine linear anwachsende Massenbilanzkurve charakterisiert. Insbesondere auf dem Schelfeis existiert ein zusätzlicher seitlicher Massenzufluß, der die Form der Kurve verändert. Von der Eisscheide bis an die Aufsetzlinie ist dieser Effekt jedoch noch gering und der Kurvenverlauf sollte im Gleichgewicht nahezu einer Geraden entsprechen.

Der Gesamtzustand des Systems kann aber auch mit Hilfe der globalen Massenbilanz beurteilt werden. Die Gesamtakkumulation über dem Modellgebiet muß über die Modellgrenzen abtransportiert werden. Zur Zeit ist diese Bedingung nicht erfüllt. Aus dem Inland um Profilkilometer 15 bis 20 wird noch zuviel Masse in Richtung Schelfeis transportiert. Die Eismächtigkeiten auf den letzten Eisschildkilometern 25 bis 31 sind zu gering. Da die Ablösung des Eises erst in der steilen Zone geschieht, sollte zur Erfüllung der Massenerhaltung über den Geländeknick ein Düseneffekt entstehen, durch den die Geschwindigkeiten in diesem Bereich gegenüber den angrenzenden Gebieten deutlich erhöht sind. Bisher kann dies in den transienten Zuständen nicht bestätigt werden. Die Geschwindigkeiten sind im gegründeten Bereich nahe der Aufsetzlinie beinahe konstant, obwohl die Antriebsspannung kontinuierlich zunimmt, da die Zunahme der Oberflächenneigung die Abnahme der Eisdicke übertrifft.

Die globale Massenbilanz zeigt zur Zeit ein geringes Massendefizit. Über die Eisfront von Schelfeis und den benachbarten Eiskanten wird ein Volumen von $7,62 \times 10^8 \text{ m}^3$ pro Jahr abtransportiert, während auf der gesamten Modellfläche im gleichen Zeitraum $7,5 \times 10^8 \text{ m}^3$ als Niederschlag abgelagert werden. Der sehr steile Anstieg des Transportvolumens im Schelfeis in Abb. 9.20 zeigt die Bedeutung des lateralen Zuflusses. Ohne diesen Beitrag wäre die Massenbilanz der Zentrallinie für einen Endwert von $15 \times 10^3 \text{ m}^3 \text{ a}^{-1}$ im Gleichgewicht. Bisher wird dieser Betrag um 110% übertroffen. Eine aussagekräftige quantitative Angabe über den Fluß auf der zentralen Fließlinie kann allerdings erst für den ausgeglichenen Zustand gemacht werden. Bei Profilkilometer 30 nahe der Aufsetzlinie ist die Transportrate mit $7525 \text{ m}^3 \text{ a}^{-1}$ schon in der Größenordnung des theoretischen Wertes von $9000 \text{ m}^3 \text{ a}^{-1}$. In der Übergangszone selbst verringert sich der Fluß jedoch und führt damit zu einer weiteren Verdickung der Eissäule in dieser Region.

Abgesehen von der Verdickung auf dem ersten Gitterpunkt im Schelfeis zeigt die Geometrie entlang der zentralen Fließlinie in Abb. 9.19 ein sehr charakteristisches Bild des Übergangs von Eisschild zu Schelfeis. Die Verdickung bei Profilkilometer 32 resultiert aus dem Massenungleichgewicht mit einem lokalen Minimum der Trans-

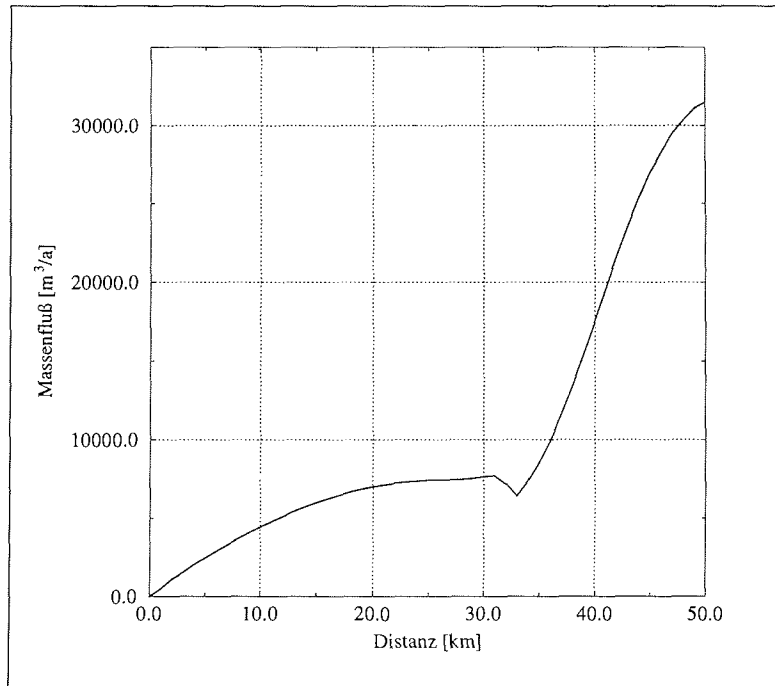


Abbildung 9.20: Transversalnormierter Fluß entlang der zentralen Fließlinie des Modells. Die Aufsetzlinie befindet sich bei Kilometer 31. Auf den ersten Kilometern im Schelfeis ist ein deutliches Massendefizit zu verzeichnen.

portraten bei Kilometer 33 und stellt somit die Situation eines expandierenden Eisschildes dar. Der mittlere Eismächtigkeitsgradient im Schelfeis ist mit $-2,8 \times 10^{-3}$ nur etwa halb so groß wie im uniaxialen Plattenmodell. Ein wesentliches Merkmal der Eisschildgeometrie ist die vollkommen gleichförmige Neigungsänderung bis an den Ablösepunkt. Es zeigt sich keinerlei Durchpauzeffekt des Untergrundes, was einen Hinweis darauf liefert, daß die Eisbewegung durch die Oberflächengradienten und nicht durch Undulationen des Untergrundes bestimmt wird.

Die Betrachtung der gesamten Modelloberfläche im gegenwärtigen Zustand zeigt keinerlei auffällige Störungen (Abb. 9.21). Die seitlichen Anstiege aus dem Schelfeis weisen eine geringe Welligkeit auf, die sich an manchen Stellen in den Haupteischild fortsetzen. Diese Strukturen sind aber wahrscheinlich auf transiente Effekte zurückzuführen und sollten im endgültigen Gleichgewichtszustand nicht mehr beobachtet werden. Die Geometrie an der Aufsetzlinie zeigt eine deutliche Absenkung im zentralen Teil des Modells. In Richtung Modellrand verstärkt sich der Einfluß der geneigten Seiten und der konvergente Fluß resultiert in einer Erhöhung der Eisdicke in den Ecken der, durch den Eisschild gebildeten Bucht. Im größten Teil des Eisschildes selbst ist kaum ein transversaler Oberflächengradient zu verzeichnen. Daher sollte es hier zu einem nahezu uniaxialen Abfluß des Eises parallel zur x -Achse kommen, mit Ausnahme der unmittelbaren Randbereiche.

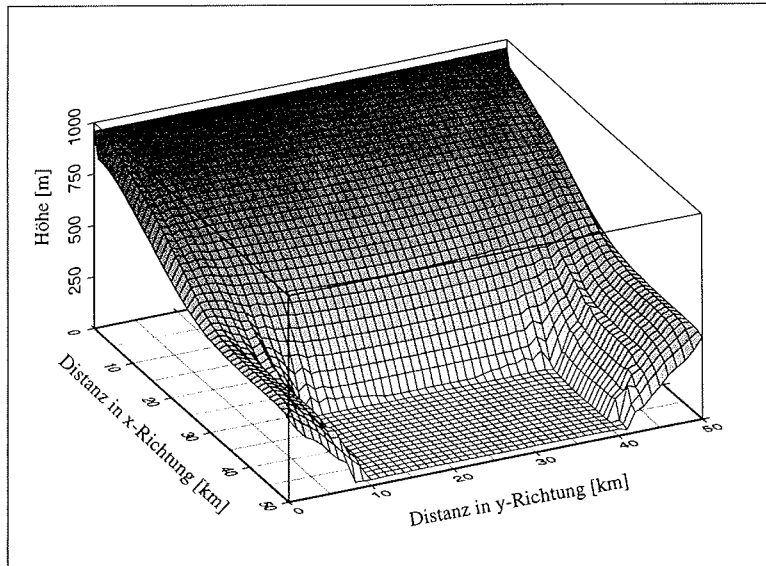


Abbildung 9.21: Eisoberfläche des transienten Modellzustandes.

In der Abbildung der Oberflächenform sind lokale Minima der Eisdicke an den seitlichen Rändern des Schelfeises weniger gut zu sehen. Diese jeweils nur auf einem Gitterpunkt beobachtete Mächtigkeitsreduktion liegt in einer Größenordnung von 5 – 10% der Eisdicke, was zu einer Absenkung der Oberfläche um 2 – 4 m führt. Solche lokalen Depressionen werden auch in der Realität in manchen Übergangsbereichen von Schelfeisen gefunden. Falls dieses Phänomen auch noch im ausgeglichenen Zustand existiert, verdeutlicht es die Fähigkeit des Modells, selbst kleinräumige Effekte der Eisdynamik zu reproduzieren. Die Entwicklung dieser Depressionen sollte dann Ziel einer weiteren Untersuchung sein.

Die genauere Form des Schelfeisquerschnitts erschließt sich in Abb. 9.22. Die obere Kurve gibt die Eismächtigkeitsverteilung parallel zur y -Achse nahe der Eisfront wieder. Auf den jeweils neun Kilometer breiten gegründeten Abschnitten beiderseits des Schelfeises ist die Eisdicke relativ konstant, zeigt jedoch die Fluktuationen, die auch in Abb. 9.21 zu erkennen sind. Jeweils vom Ablösepunkt in Richtung Schelfeismitte bildet der Eiskörper die nur drei bis vier Kilometer breite Depression aus. Im Gegensatz zum Modell des Auslaßgletschers existieren hier zwei lokale Maxima der Eisdicke, symmetrisch in einem Abstand von sieben Kilometern von der Mittellinie, wobei die Abweichung von der mittleren Eisdicke von 285 m nur etwa 6,5 m beträgt. Die Bildung dieser getrennten Maxima folgt aus dem effektiveren Eistransport in der Schelfeismitte. In den Randdepressionen erreicht die Transversalgeschwindigkeit, wie im unteren Teil von Abb. 9.23 zu sehen ist, ihr jeweiliges Maximum. Das Material wird von dort Richtung Mittellinie transportiert. Im Zentralbereich des Schelfeises weist die Geschwindigkeit der Hauptfließrichtung ihren größten Wert und damit maximale Transportraten in x -Richtung auf (Abb. 9.22 unten). Beiderseits

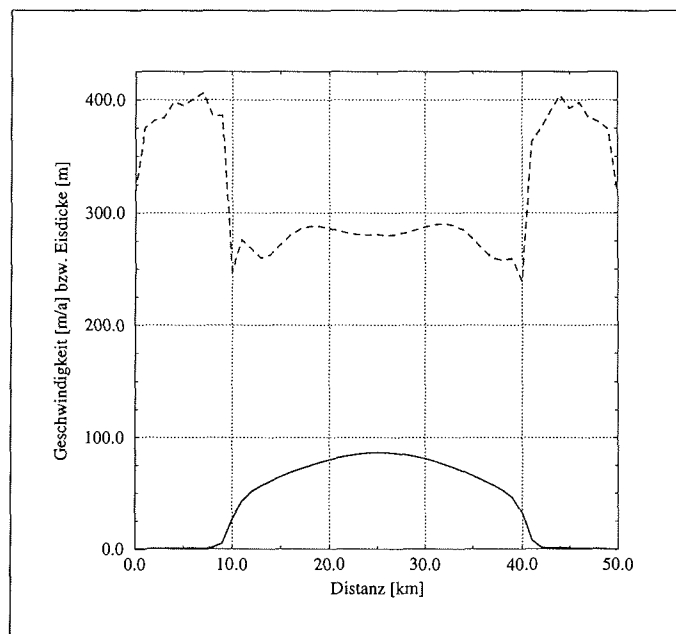


Abbildung 9.22: Eisdicke (gestrichelte Linie) und longitudinale Oberflächengeschwindigkeit (durchgezogene Linie) auf einem Profil parallel zur y -Achse nahe der Eisfront.

der Mittellinie ist der Abtransport Richtung Eisfront jedoch schon so wirksam, daß das seitlich eintretende Eis die Eisdicke der Schelfeismitte nicht mehr in dem Maße beeinflusst, ein zentrales Maximum entstehen zu lassen.

Ein Vergleich der longitudinalen und transversalen Geschwindigkeiten in Abb. 9.23 liefert im vorderen Bereich des Schelfeises bei Kilometer 40 in x -Richtung nahe den seitlichen Aufsetzlinien beinahe gleichgroße Beträge von etwa 36 m a^{-1} . Hier, an den Maxima der transversalen Geschwindigkeit, fließt das Eis in einem Winkel von 45° Richtung Schelfeismitte. Nur in den angrenzenden gegründeten Zonen wird eine noch größere Abweichung der Bewegungsrichtung von der Hauptfließrichtung gefunden.

Beide Geschwindigkeitskomponenten weisen in den Schelfeisecken deutlich erhöhte Werte auf, die in Abb. 9.23 als ausgeprägte Rücken hervortreten. An diesen Stellen existiert ebenfalls ein verstärkter konvergenter Fluß. Die großen Eismächtigkeitsgradienten in beiden Koordinatenrichtungen bei der Anwesenheit von sozusagen zwei Aufsetzlinien sorgen für eine stärkere Mobilisierung und damit höhere Geschwindigkeiten. Dieser Effekt setzt sich noch mehrere Kilometer in den Eisschild fort.

In den Vertikalprofilen der Geschwindigkeiten in Abb. 9.24 sind die Aufsetzlinien jeweils deutlich durch das Einsetzen eines starken Geschwindigkeitsgradienten zu erkennen. Die Maxima der transversalen Komponente sind verhältnismäßig breit

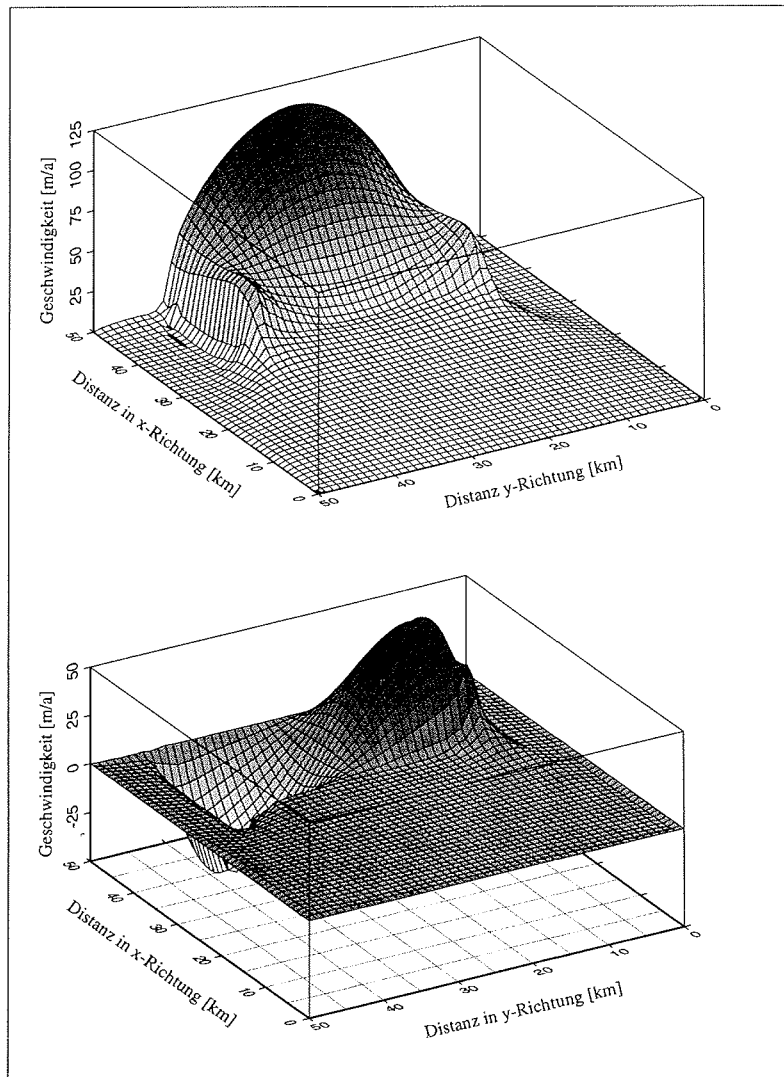


Abbildung 9.23: Die longitudinale Oberflächengeschwindigkeit in x -Richtung (oben) und die transversale Oberflächengeschwindigkeit in y -Richtung im gesamten Modellgebiet.

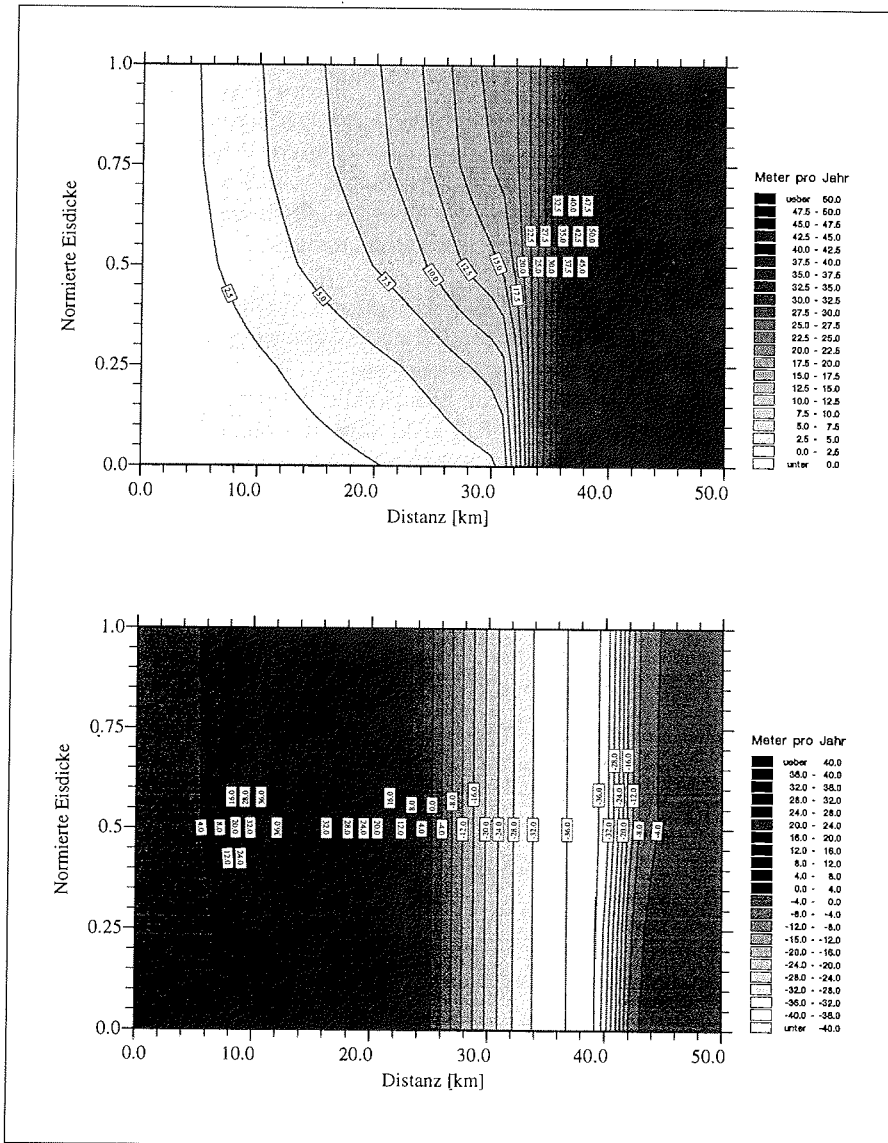


Abbildung 9.24: Vertikalprofile der longitudinalen Horizontalgeschwindigkeit u in x -Richtung längs der zentralen Fließlinie (oben) und der transversalen Horizontalgeschwindigkeit v in y -Richtung quer zur Hauptfließrichtung bei $x = 40$ km (unten).

ausgeprägt. Der Gradient in den zentralen zehn Kilometern des Schelfeises ist nahezu konstant. Direkt seeseitig der Aufsetzlinien besteht eine etwa drei Kilometer breite Zone sehr großer Gradienten. Die Geschwindigkeit steigt hier um rund 10 m a^{-1} pro Kilometer an. Diese Werte werden an der rückwärtigen Aufsetzlinie nur geringfügig übertroffen. Die generelle Tiefenstruktur unterscheidet sich nicht von den Ergebnissen der anderen Modelle. Im Eisschild ist der Vertikalgradient deutlich ausgeprägt. In den gegründeten seitlichen Regionen dagegen ist dieser Effekt durch die geringen Geschwindigkeiten nicht so klar zu erkennen. Die bisherigen Ergebnisse liefern keinen Hinweis darauf, daß das Geschwindigkeitsfeld durch den Knick des Untergrundes bei Kilometer 28 signifikant gestört ist. Auch hier zeigt sich, daß der Massentransport durch solche Undulationen des Untergrundes nicht beeinflusst wird, vorausgesetzt sie induzieren keine Veränderung der basalen Randbedingung.

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt soll auf eine Analyse der Spannungsverhältnisse verzichtet werden, da diese im transienten Modellzustand keine wesentlichen Einsichten in die Dynamik des ausgeglichenen Systems liefern.

Die bisherigen Ergebnisse zeigen, daß die prinzipielle Ausprägung der Übergangszone sich im echten dreidimensionalen Fall nicht vom uniaxialen Modell unterscheidet. Die Ausbildung des Eisschildes ist jedoch deutlich von den lateralen Randbedingungen beeinflusst. Inwieweit sich damit auch das dynamische Verhalten in der Übergangszone und der Betrag ihrer Ausdehnung verändert, kann aus den transienten Zuständen noch nicht abgeleitet werden.

Kapitel 10

Ein Schritt in Richtung Verständnis

Die Erfahrungen mit dem in dieser Arbeit entwickelten Modell lassen sich unter verschiedenen Aspekten betrachten. Wenngleich der Rechenaufwand enorm ist, so wurde doch gezeigt, daß es möglich ist, die Komplexität der Stokesgleichungen für das beschleunigungsfreie Fließen in einem geschlossenen Modell zu simulieren. Abgesehen von geringfügigen Problemen auf dem Rand sind die Ergebnisse stabil und eröffnen erstmals die Möglichkeit, direkte Aussagen über die Verhältnisse in der Übergangszone zu treffen.

Ein nicht zu unterschätzender Punkt ist allerdings der enorme Zeitaufwand für die Berechnung der einzelnen Modellexperimente. Die vorliegenden wenigen und in ihrem Charakter eher einfachen Studien haben einige hundert CPU-Rechenstunden einer Cray *J90* und einer Cray *C90* konsumiert. Ausschlaggebend dafür ist einerseits die Komplexität der diskretisierten Gleichungen (siehe Anhang) und andererseits die nicht lokale Lösung bei der Anwesenheit von longitudinalen, deviatorischen Spannungen.

Der Vergleich mit einem einfachen Schelfeismodell (Determann, 1991) mit reduzierten Gleichungen zeigt, daß bei den hier durchgeführten Berechnungen eine um den Faktor 20 höhere Anzahl an arithmetischen Operationen zur Bestimmung des Residuums an jedem Gitterpunkt erforderlich ist. Die ebenfalls aufwendigere Berechnung des nichtlinearen Faktors der effektiven Scherspannung ist dabei noch nicht berücksichtigt. Im Gegensatz zu einem nur in zwei Dimensionen rechnenden reinen Schelfeismodell erfolgt die Berechnung der Gleichungen auf einem dreidimensionalen Gitter. Die Zahl der notwendigen Operationen ist daher nochmals um den Faktor der vertikalen Schichtanzahl erhöht. Daraus folgen, allein aus arithmetischen Gründen, Rechenzeiten, die um zwei Größenordnungen über denen der vereinfachten Modelle liegen. Ein hoher Grad an Optimierung ist daher zwingend erforderlich.

Neben diesen Unterschieden in der reinen Berechnung verändert sich mit jedem zusätzlichen Term in den Gleichungen das Konvergenzverhalten. Bisher wurde noch kein direkter Vergleich zwischen dem vollständigen und dem reduzierten Modell durchgeführt, es scheint sich aber aus numerischen Überlegungen und der Erfahrung anderer Modellierer zu bestätigen, daß das vollständige Gleichungssystem eine erheblich größere Anzahl an Iterationen benötigt, um eine stabile Lösung zu produ-

zieren. Ziel kann es daher nur sein, die Signifikanz der einzelnen Terme zu bewerten und das Gesamtsystem soweit zu reduzieren, wie es ohne Verlust wichtiger Modelleigenschaften möglich ist.

Eine weitere Erkenntnis ist die starke Sensibilität des Modells auf die exakte Festlegung der Randbedingungen. Bisher liegt noch keine befriedigende Theorie vor, um Einstromverhältnisse so zu definieren, daß ohne zwischenzeitliche Anpassung ein stabiles und realistisches Ergebnis erzielt wird. Selbst bei einfacheren Dirichlet-Randbedingungen treten teilweise Oszillationen, speziell in der Eisdicke an den ersten Gitterpunkten nahe des Randes auf. Solche numerischen Effekte, die auch mit der Tendenz zur Gitterseparierung zusammenhängen können, bei der jeweils die geraden und ungeraden Reihen in Iterationsrichtung gegen zwei verschiedene Lösungen konvergieren, erfordern numerische Maßnahmen. Eine Möglichkeit ist die Wahl unterschiedlicher Gitterweiten innerhalb des Modells. Die Randbereiche und die Zonen des Hauptinteresses werden hochaufgelöst behandelt, während die dazwischen liegenden Gebiete problemlos auch auf einem Gitter größerer Maschenweite realistisch wiedergegeben werden können. Die Einführung der künstlichen Diffusion muß mit Vorsicht behandelt werden, um nicht gegen die physikalischen Mechanismen des Modells zu verstoßen. Transportbedingte Fehlerursachen können mit dem Einsatz von *upwind*-Verfahren manchmal vermieden werden. Es sind daher noch einige Schritte nötig, um das Modell zu optimieren, wobei jeder weitere Modellversuch neue Erkenntnisse, nicht nur über das eigentliche Untersuchungsobjekt *Übergangszone*, sondern auch über die numerischen Eigenschaften und Verbesserungsmöglichkeiten erbringt.

Trotz der genannten Problematik ist das Modell in der Lage, das kombinierte System von Eisschild und Schelfeis für beliebige Formen des Untergrundes und angemessene Randbedingungen auf einer physikalisch optimierten Grundlage stabil zu berechnen. Neben den in dieser Arbeit vorgestellten Gleichgewichtszuständen können auch zeitabhängige Entwicklungen unter veränderlichen Randbedingungen und parametrisierten Materialeigenschaften modelliert werden.

Die bisher in theoretisch/mathematisch orientierten Arbeiten (Hindmarsh, 1993b) begründete Entkopplung der zwei Glazialsysteme Eisschild und Schelfeis konnte mit dem uniaxialen Plattenmodell verifiziert werden. Es besteht durchaus eine Wechselwirkung zwischen den beiden Einheiten. Unter dynamischen Gesichtspunkten ist diese jedoch zu vernachlässigen. Der Übergang zu einem Schelfeis bewirkt im angrenzenden Eisschild allenfalls eine geringfügig erhöhte mittlere Eisdicke (Abb. 9.6). Es kann aus den Ergebnissen geschlossen werden, daß unter den angenommenen Randbedingungen der Eisschild einen inhärenten Gleichgewichtszustand ausbildet. An der Stelle, an der die Bedingung des Schwimmgleichgewichts erfüllt ist, bildet sich, entsprechend dem dort herrschenden Massenfluß, eine Übergangszone zum Schelfeis aus. Ändert sich der Zustand des Eisschildes, so paßt sich das Schelfeis den neuen Bedingungen an. Die vom benachbarten Schelfeis induzierte Mobilisierung des Eiskörpers ist in diesem Modellversuch nur auf vier Kilometern im Eisschild wirksam. Im Vergleich zur Gesamtausdehnung des Eisschildes hat dieser Effekt keinen Einfluß auf die Massenbilanz. Im Gegensatz dazu zeigt sich im Schelfeis ein deutlicher Unterschied zu den theoretisch/analytischen Voraussagen. In den EISMINT Versuchen ist eine

Übereinstimmung des Modells mit der Theorie gezeigt worden, wenn ein reduzierter Gleichungssatz verwendet wird. Die Berechnung mit den vollständigen Gleichungen ergibt jedoch ein Schelfeis, das in Regionen großer Gradienten nicht so leicht deformierbar ist, wie es der analytische Fall vorgibt. Der nichtlineare Charakter des Fließgesetzes führt zu einer Verzögerung der Deformation. Die Massenbilanz wird dadurch nicht verändert. Auch mit diesem Fließverhalten bildet sich am Rand des Eisschildes ein Schelfeis, das in der Lage ist, den Massenfluß am Ort des Aufschwimmens abzutransportieren.

Eine Folge der größeren Eismächtigkeiten ist die potentiell frühere Grundberührung bei einer Zunahme des Massentransports oder einem Absinken des Meeresspiegels. Daher könnten sich in diesen Fällen durchaus Unterschiede in der zeitlichen Entwicklung glazialer Systeme ergeben. Dieser Effekt rechtfertigt kaum den Einsatz eines zeitaufwendigen Modells zur Schelfeisberechnung, wenn ein Weg zur Reduzierung des Systems gefunden werden kann. Dazu sind allerdings noch eine Reihe von Experimenten erforderlich, in denen der Einfluß der einzelnen Komponenten des Spannungstensors auf die Ausbildung des Eiskörpers untersucht wird.

Die geometrische Form des Eisschildes zeigt keine signifikanten Unterschiede zu den bestehenden Modellen. Auf der gesamten, für ein Eisschild realer Dimensionen geringen, Distanz von 44 Kilometern vom Modellrand bis zur Aufsetzlinie ist die deviatorische Longitudinalspannung klein gegenüber den Scherspannungswerten. Das vertikale Profil der Geschwindigkeitsverteilung wird davon merklich beeinflusst. Der Massentransport in der unteren Hälfte der Eissäule ist gegenüber dem in der oberen Hälfte vermindert, ohne daß die Gesamtmassenbilanz dadurch verändert wird. Auswirkungen ergeben sich jedoch für die Berechnung von Trajektorien einzelner Eispartikel innerhalb der Eissäule und damit der Alters-Tiefenzuordnung der Schichten im Eisschild.

Direkt an der Aufsetzlinie erreichen die deviatorischen Longitudinalspannungen Maximalwerte. Dadurch kommt es mit großer Wahrscheinlichkeit bei dieser Modellkonfiguration zur Bildung von Bodenspalten in den ersten Kilometern des Schelfeises nach der Ablösung vom Untergrund. Diese Spalten wirken sich, wenn nicht zusätzlich eine seitliche Fixierung besteht, destabilisierend auf das Schelfeis aus, was mit ein Grund dafür sein kann, daß keine frei schwimmenden Schelfeise existieren.

Leider liegen bisher noch keine Gleichgewichtszustände zu den Modellversuchen mit seitlichen Randeinflüssen vor. Aus den transienten Zuständen nahe dem ausgeglichenen Stadium läßt sich jedoch schon erkennen, daß der Einfluß des Schelfeises auf die Eisschildentwicklung hier nicht vernachlässigt werden darf. Die rücktreibende Kraft, die quantitativ erst nach Erreichen des Gleichgewichts bestimmt werden kann, führt zu einem Stau effekt und einer Verminderung des Oberflächengradienten. Damit wird der Abfluß reduziert und die Eismächtigkeit wächst solange an, bis die Antriebsspannung Werte erreicht, die den Massenfluß wieder in ein Gleichgewicht zur Akkumulationsrate bringt. Ein dickerer Eisschild bindet aber nicht nur mehr Wasser, sondern weist auch geringere Geschwindigkeiten auf und reagiert somit langsamer auf Veränderungen. Das gesamte System wird dadurch gegenüber äußeren Einflüssen stabilisiert.

Wie in den Modellexperimenten gezeigt, besteht eine enorme Wechselwirkung zwischen dem Eismächtigkeitsgradienten und der Geschwindigkeit im Bereich der

Übergangszone. Diese Sensibilität verleiht diesem Abschnitt eine sehr hohe Dynamik. Die Übergangszone wird sich sehr schnell auf Veränderungen im Massenfluß einstellen und mit dieser Reaktion die benachbarten Gebiete beeinflussen.

Die Position der Aufsetzlinie jenseits des Geländeknicks im Buchtmodell von Kap. 9.3 liefert einen Beweis dafür, daß die kleinskalige Geometrie des Untergrundes nicht in der Lage ist, entsprechende Oberflächenstrukturen zu generieren. Die Dynamik wird von der großräumigen Oberflächenneigung bestimmt und durch lokale Strukturen nicht beeinflusst.

Die im Feldexperiment (Kap. 7) gefundenen Oberflächenundulationen können daher nicht direkt auf die Betrauhigkeit zurückgeführt werden. Erst die mittelbar durch das Bodenrelief hervorgerufene Variation der basalen Randbedingung zwischen Zonen mit unbewegtem Eis und Bereichen basalen Gleitens bildet die Ursache der wellenförmigen Eisoberfläche.

Seitlich berandete Schelfeise zeichnen sich neben ihrer größeren durchschnittlichen Dicke vor allem durch transversale Variationen in der Eismächtigkeit aus. Diese sind in hohem Maße von der Breite der Bucht und dem seitlichen Zustrom abhängig. Je nach den Verhältnissen können sich ein zentrales Maximum oder zwei lokale Maxima ausbilden, deren Lage wiederum vom seitlichen Zustrom abhängig ist. In beiden Fällen entsteht an den Rändern eine Zone verminderter Eisdicke, die auch an realen Schelfeisen beobachtet wird. Wie der quantitative Zusammenhang der Mächtigkeitsschwankungen von der transversalen Ausdehnung der Bucht ist, muß erst durch weitere Experimente ermittelt werden.

Aus den bisher vorgestellten Ergebnissen folgt, daß zwischen Eisschild und einem seitlich berandeten Schelfeis eine starke Wechselwirkung besteht, die aus der zusätzlichen Scherspannung an den Rändern des Schelfeises resultiert. Die Dynamik des Gesamtsystems wird dadurch in entscheidendem Maße beeinflusst und die Reaktivität verringert. Wesentliche Erkenntnisse über die quantitativen Größen, vor allem der rücktreibenden Kraft werden von den Ergebnissen des Gleichgewichtszustandes erwartet.

Auf diesem aufbauend sollten Experimente durchgeführt werden, die die Abhängigkeiten der beobachteten Unterschiede zwischen den Modellkonfigurationen von der Geometrie und den Randbedingungen untersuchen. Das hier entwickelte Modell bietet erstmals die Möglichkeit die Wechselwirkungen zwischen den glazialen Einheiten auch quantitativ in drei Dimensionen zu beschreiben und damit die ablaufenden Prozesse besser zu verstehen. Mit der Entwicklung geeigneter Randbedingungen im Einstrombereich eröffnet sich die Möglichkeit, die Auswirkungen klimatischer Variationen auf das System *Übergangszone* zu studieren und damit eine fundierte Bewertung der Stabilitätsdiskussion durchzuführen.

Diese Untersuchungen, zusammen mit der Beurteilung und sinnvollen Reduktion der Einzelterme sollten schließlich zu einem effektiven Modell führen, das in der Lage ist komplexe Systeme zu simulieren und so als Bindeglied zwischen den großen Eisschildmodellen und den gekoppelten Schelfeis/Ozeanmodellen zu fungieren. Es sollte jedoch nicht vergessen werden, daß auch dieser Schritt zu einem besseren Verständnis aufgrund von Modellergebnissen nur die eine Hälfte der Wahrheit ist.

Literaturverzeichnis

- Alley, R. B., D. D. Blankenship, C. R. Bentley und S. T. Rooney (1987b). Till beneath Ice Stream B, 3. Till deformation: Evidence and implications, *Journal of Geophysical Research* **92**(B9): 8921–8929.
- Alley, R. B., D. D. Blankenship, S. T. Rooney und C. R. Bentley (1987c). Till beneath Ice Stream B, 4. A coupled ice – till flow model, *Journal of Geophysical Research* **92**(B9): 8931–8940.
- Alley, R. und I. Whillans (1984). Response of the East Antarctica Ice Sheet to sea-level rise, *Journal of Geophysical Research* **89**(C4): 6487–6493.
- Barcilon, V. und D. R. MacAyeal (1993). Steady flow of a viscous ice stream across a no-slip / free-slip transition at the bed, *Journal of Glaciology* **39**(131): 167–185.
- Bentley, C. R. (1984). The Ross Ice Shelf geophysical and glaciological survey (RIGGS): Introduction and summary of measurements performed, in Bentley, C. und D. Hayes (Hrsgb.), *The Ross Ice Shelf: Glaciology and Geophysics*, Bd. 42 von *Antarctic Research Series*, Washington, DC, S. 1–20.
- Bentley, C. R. (1987). Antarctic ice streams: A review, *Journal of Geophysical Research* **92**(B9): 8843–8858.
- Bindschadler, R., D. MacAyeal und S. Stephenson (1987). Ice stream – ice shelf interaction in West Antarctica, in Van der Veen, C. und H. Oerlemans (Hrsgb.), *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*, Reidel, Dordrecht, S. 161–180.
- Boulton, G. und R. Hindmarsh (1987). Sediment deformation beneath glaciers: Rheology and geological consequences, *Journal of Geophysical Research* **92**(B9): 9059–9082.
- Broccoli, A. und S. Manabe (1987). The influence of continental ice, atmospheric CO₂, and land albedo on the climate of the last glacial maximum, *Climate Dynamics* **1**: 87–99.
- Bronstein, I. und K. Semendjajew (1984). *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun.
- Budd, W., B. McInnes, D. Jenssen und I. Smith (1987). Modelling the response of the West Antarctic Ice Sheet to a climatic warming, in Van der Veen, C. und H. Oerlemans (Hrsgb.), *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*, Reidel, Dordrecht, S. 321–358.
- Budd, W., D. Jenssen und I. Smith (1984). A three-dimensional time-dependent model of the West Antarctic Ice Sheet, *Annals of Glaciology* **5**: 29–36.

- Crabtree, R. und C. Doake (1982). Pine Island Glacier and its drainage basin: Results from radio echo-sounding, *Annals of Glaciology* **3**: 65–70.
- Craddock, C. (1982). Antarctica and Gondwanaland, in Craddock, C. (Hrsgb.), *Antarctic Geoscience*, Nummer 4 in *IUGS Ser. B*, IUGS, University of Wisconsin Press, Madison, S. 3–13.
- Denton, G. und T. Hughes (Hrsgb.) (1981). *The last great ice sheets*, John Wiley, New York. 485 pp.
- Determann, J. (1991). *Das Fließen von Schelfeisen - Numerische Simulationen mit der Methode der Finiten Differenzen*, Bd. 83 von *Berichte zur Polarforschung*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Bremerhaven.
- Determann, J., K. Grosfeld und B. Ritter (1990 (1991)). Melting rates at the bottom of Filchner-Ronne Ice Shelf, Antarctica, from short-term mass-balance studies, *Polarforschung* **60**(1): 25–32.
- Doake, C., R. Frolich, D. Mantripp, A. Smith und D. Vaughan (1987). Glaciological studies on Rutford Ice Stream, Antarctica, *Journal of Geophysical Research* **92**(B9): 8951–8960.
- Doake, C. und D. Vaughan (1991). Rapid disintegration of the Wordie Ice Shelf in response to atmospheric warming, *Nature* **350**: 328–330.
- Doake, C. und E. Wolff (1985). Flow law for ice in polar ice-sheets, *Nature* **314**: 255–257.
- Drewry, D. (Hrsgb.) (1983). *Antarctica: Glaciological and Geophysical Folio*, Scott Polar Research Institute, Cambridge.
- Drewry, D., S. Jordan und E. Jankowski (1982). Measured properties of the Antarctic Ice Sheet: Surface configuration, ice thickness, volume and bedrock characteristics, *Annals of Glaciology* **3**: 83–91.
- Engelhardt, H., N. Humphrey, B. Kamb und M. Fahnestock (1990). Physical conditions at the base of a fast moving Antarctic ice stream, *Science* **248**: 57–59.
- Engelhardt, H. und J. Determann (1987). Borehole evidence for a thick layer of basal ice in the central Ronne Ice Shelf, *Nature* **327**: 318–319.
- Fowler, A. (1979). A mathematical approach to the theory of glacier sliding, *Journal of Glaciology* **23**(89): 131–141.
- Fowler, A. (1987). Sliding with cavity formation, *Journal of Glaciology* **33**(115): 255–267.
- Fox, A. und A. Cooper (1994). Measured properties of the Antarctic Ice Sheet derived from the SCAR Antarctic digital database, *Polar Record* **30**(174): 201–206.
- Frolich, R. und C. Doake (1988). Relative importance of lateral and vertical shear on Rutford Ice Stream, Antarctica, *Annals of Glaciology* **11**: 19–22.

- Fütterer, D. (Hrsgb.) (1987). *Die Expedition ANTARKTIS IV mit FS Polarstern 1985/86 - Bericht zu den Fahrtabschnitten ANT-IV/3-4*, Nummer 33 in *Berichte zur Polarforschung*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Bremerhaven.
- Fütterer, D. (Hrsgb.) (1989). *Die Expedition ANTARKTIS VI mit FS Polarstern 1987/88*, Nummer 58 in *Berichte zur Polarforschung*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Bremerhaven.
- Giovinetto, M., N. Waters und C. Bentley (1990). Dependence of Antarctic surface mass balance on temperature, elevation, and distance to open ocean, *Journal of Geophysical Research* **95**(D4): 3517-3531.
- Giovinetto, M. und C. Bentley (1985). Surface balance in the ice drainage system of Antarctica, *Antarctic Journal of the United States* **20**(4): 6-13.
- Glen, J. (1955). The creep of polycrystalline ice, *Proceedings of the Royal Society London, Ser. A* **228**(1175): 519-538.
- Glen, J. (1958). The flow law of ice. A discussion of the assumptions made in glacier theory, their experimental foundations and consequences, *International Association of Scientific Hydrology* **47**: 171-183.
- Grosfeld, K., N. Blindow und F. Thyssen (1992 (1994)). Bottom melting on the Filchner-Ronne Ice Shelf, Antarctica, using different measuring techniques, *Polarforschung* **62**(2/3): 71-76.
- Hambrey, M. und J. Alean (1994). *Glaciers*, Cambridge University Press.
- Herterich, K. (1987). On the flow within the transition zone between ice sheet and ice shelf, in Van der Veen, C. und H. Oerlemans (Hrsgb.), *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*, Reidel, Dordrecht, S. 185-202.
- Hindmarsh, R. C. A. (1993a). Modelling the dynamics of ice sheets, *Progress in Physical Geography* **17**(4): 391-412.
- Hindmarsh, R. C. A. (1993b). Qualitative dynamics of marine ice sheets, in Pelletier, W. (Hrsgb.), *Ice in the Climate System*, Bd. I 12 von *NATO ASI Series*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, S. 67-99.
- Holton, J. (1979). *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Bd. 23 von *International Geophysical Series*, Academic Press. New York, Kap. Numerical Prediction, S. 173-213.
- Hughes, T. (1973). Is the West Antarctic Ice Sheet disintegrating?, *Journal of Geophysical Research* **78**(33): 7884-7910.
- Hughes, T. (1975). The West Antarctic Ice Sheet: Instability, disintegration and initiation of ice ages, *Reviews of Geophysics and Space Physics* **13**(4): 502-526.
- Hughes, T. (1977). West Antarctic ice streams, *Reviews of Geophysics and Space Physics* **15**(1): 1-46.

- Hughes, T. (1982). On the disintegration of ice shelves: The role of thinning, *Annals of Glaciology* **3**: 146–151.
- Hutter, K. (1983). *Theoretical Glaciology; Material Science of Ice and the Mechanics of Glaciers and Ice Sheets*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Huybrechts, P. (1992). *The Antarctic Ice Sheet and Environmental Change: A Three Dimensional Modelling Study*, Bd. 99 von *Berichte zur Polarforschung*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Bremerhaven.
- Huybrechts, P. (1993). Formation and disintegration of the Antarctic Ice Sheet, *Annals of Glaciology* **20**: 336 – 340.
- Huybrechts, P., A. Letréguilly und N. Reeh (1991). The Greenland Ice Sheet and greenhouse warming, *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology (Global and Planetary Change Section)* **89**: 399–412.
- IfAG (1989). *Ekströmisen, Topographische Karte und Satellitenbildkarte, 1:500 000*, Institut für Angewandte Geodäsie, Frankfurt.
- IPCC (Hrsgb.) (1990). *The IPCC Scientific Assessment. Report prepared for IPCC by Working Group I*, Intergovernmental Panel on Climatic Change, Cambridge University Press, Cambridge.
- Jacobs, S. und J. Comiso (1993). A recent sea-ice retreat west of the Antarctic Peninsula, *Geophysical Research Letters* **20**: 1171–1174.
- Jaeger, J. (1969). *Elasticity, Fracture and Flow*, 3rd Aufl., Methuen, London.
- Kadmina, I., R. Kurinin, V. Masolov und G. Grikurov (1983). Antarctic crustal structure from geophysical evidence: A review, in Oliver, R., P. James und J. Jago (Hrsgb.), *Antarctic Earth Science*, Cambridge University Press, S. 498–502.
- Kamb, B. (1970). Sliding motion of glaciers: Theory and observation, *Reviews of Geophysics and Space Physics* **8**(4): 673–727.
- Kamb, B. (1991). Rheological nonlinearity and flow instability in the deforming bed mechanism of ice stream motion, *Journal of Geophysical Research* **96**(B10): 16585–16595.
- Lange, M. und D. MacAyeal (1989). Numerical models of ice-shelf flow: Ideal/real, *Annals of Glaciology* **12**: 97–103.
- Lapidus, L. und G. Pinder (1982). *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*, J. Wiley sons.
- Lestringant, R. (1994). A two dimensional finite element study of flow in the transition zone between an ice sheet and an ice shelf, *Annals of Glaciology* **20**: 67–72.
- Lewis, E. und R. Perkin (1986). Ice pumps and their rates, *Journal of Geophysical Research* **91**(C10): 11756–11762.

- Lingle, C. (1984). A numerical model of interactions between a polar ice stream and the ocean: Application to Ice Stream E, West Antarctica, *Journal of Geophysical Research* (C89): 3523–3549.
- Liu, H. und K. Miller (1979). Fracture toughness of freshwater ice, *Journal of Glaciology* **22**(86): 135–143.
- Lliboutry, L. (1987). Realistic, yet simple bottom boundary conditions for glaciers and ice sheets, *Journal of Geophysical Research* **92**(B9): 9101–9109.
- MacAyeal, D. (1987). Ice-shelf backpressure: Form drag versus dynamic drag, in Van der Veen, C. und H. Oerlemans (Hrsgb.), *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*, Reidel, Dordrecht, S. 141–160.
- MacAyeal, D. (1989). Large-scale ice flow over a viscous basal sediment: Theory and application to Ice Stream B, Antarctica, *Journal of Geophysical Research* **94**(B4): 4071–4087.
- MacAyeal, D. (1992). Irregular oscillations of the West Antarctic Ice Sheet, *Nature* **359**: 29–32.
- MacAyeal, D. (1995). Lessons in ice-sheet modeling, unpublished manuscript.
- MacAyeal, D., S. Shabatie, C. Bentley und S. King (1986). Formulation of ice shelf dynamic boundary conditions in terms of a coulomb rheology, *Journal of Geophysical Research* **91**(B8): 8177–8191.
- MacAyeal, D. und R. Thomas (1982). Numerical modelling of ice-shelf motion, *Annals of Glaciology* **3**: 189–194.
- MacAyeal, D. und V. Barcilon (1988). Ice-shelf response to ice-stream discharge fluctuations: I. Unconfined ice tongues II. Ideal rectangular ice shelf, *Journal of Glaciology* **34**(116): 121–135.
- Marsal, D. (1976). *Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen in Wissenschaft und Technik*, Zürich.
- McIntyre, N. (1985). The dynamics of ice-sheet outlets, *Journal of Glaciology* **31**(108): 99–107.
- Mercer, J. (1968). Antarctic ice and Sangamon sea level, *International Association of Scientific Hydrology, General Assembly of Bern, 25. Sept. - 7. Oct. 1967*, Nummer 79 in *Reports and Discussions*, S. 217–225. IASH Publ.
- Mercer, J. (1978). West Antarctic Ice Sheet and CO₂ greenhouse effect: A threat of disaster, *Nature* **271**(5643): 321–325.
- Miller, H. und H. Oerter (Hrsgb.) (1990). *Die Expedition ANTARKTIS V mit FS Polarstern 1986/87 - Bericht zu den Fahrtabschnitten ANT-V/4-5*, Nummer 57 in *Berichte zur Polarforschung*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Bremerhaven.

- Miller, H. und H. Oerter (Hrsgb.) (1991). *Die Expedition ANTARKTIS VIII mit FS Polarstern 1989/90 - Bericht vom Fahrtabschnitt ANT-VIII/5*, Nummer 86 in *Berichte zur Polarforschung*, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Bremerhaven.
- Morgan, V., T. Jacka und G. Akerman (1982). Outlet glacier and mass-budget studies in Enderby, Kemp and Mac Robertson Lands, Antarctica, *Annals of Glaciology* **3**: 204–210.
- Morland, L. (1976). Glacier sliding down an inclined wavy bed, *Journal of Glaciology* **17**: 447–462.
- Morland, L. und E. Shoemaker (1982). Ice shelf balances, *Cold Regions Sci. Tech.* **5**: 235–251.
- Moser, H. und O. Reinwarth (1990). Untersuchungen zur Akkumulation auf dem Filchner/Ronne- und Ekström-Schelfeis unter Anwendung von Isotopenmethoden mit ergänzenden stratigraphischen Studien, DFG Abschlußbericht.
- Muszynski, I. und G. Birchfield (1987). A coupled marine ice-stream – ice-shelf model, *Journal of Glaciology* **33**(113): 3–15.
- Oerlemans, J. (1981). Some basic experiments with a vertically-integrated ice sheet model, *Tellus* **33**: 1–11.
- Oerlemans, J. und C. Van der Veen (1984). *Ice Sheets and Climate*, Reidel, Dordrecht.
- Oerter, H., J. Kipfstuhl, J. Determann, H. Miller, D. Wagenbach, A. Minikin und W. Graf (1992). Evidence for basal marine ice in the Filchner-Ronne Ice Shelf, *Nature* **358**: 399–401.
- Paterson, W. (1994). *The Physics of Glaciers*, Pergamon Press.
- Press, W., S. Teukolsky, W. Vetterling und B. Flannery (1992). *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd edition Aufl., Cambridge University Press.
- Robin, G. d. Q. (1979). Formation, flow, and disintegration of ice shelves, *Journal of Glaciology* **24**(90): 259–271.
- Rott, H., P. Skvarca und T. Nagler (1996). Rapid collapse of northern Larsen Ice Shelf, Antarctica, *Science* **271**: 788–792.
- Sanderson, T. (1979). Equilibrium profile of ice shelves, *Journal of Glaciology* **22**(88): 435–460.
- Sanderson, T. und C. Doake (1979). Is vertical shear in an ice shelf negligible?, *Journal of Glaciology* **22**(87): 285–292.
- Schwerdtfeger, W. (1970). The climate of the Antarctic, in Orvig, S. (Hrsgb.), *World Survey of Climatology*, Bd. 14, Elsevier, Amsterdam, S. 253–355.
- Schwerdtfeger, W. (1984). *Weather and Climate of the Antarctic*, Bd. 15 von *Developments in Atmospheric Science*, Elsevier, Amsterdam. 261 pp.

- Shabtaie, S., C. Bentley, R. Bindschadler und D. MacAyeal (1988). Mass-balance studies of Ice streams A, B, and C, West Antarctica, and possible surging behaviour of Ice Stream B, *Annals of Glaciology* **11**: 137–149.
- Shoemaker, E. und L. Morland (1984). A glacier flow model incorporating longitudinal deviatoric stresses, *Journal of Glaciology* **30**(106): 334–340.
- Smith, A. (1991). The use of tiltmeters to study the dynamics of Antarctic ice-shelf grounding lines, *Journal of Glaciology* **37**(125): 51–58.
- Smith, A. und C. Doake (1994). Sea-bed depth at the mouth of Rutford Ice Stream, Antarctica, *Journal of Glaciology* **20**: 353–356.
- Stuiver, M., G. Denton, T. Hughes und J. Fastook (1981). History of the marine ice sheet in West Antarctica during the last glaciation: A working hypothesis, in Denton, G. und T.J. Hughes (Hrsgb.), *The Last Great Ice Sheets*, John Wiley, New York, S. 319–436.
- Suyetova, I. (1966). The dimensions of Antarctica, *Polar Record* (13): 344–347.
- Thomas, R. (1973). The creep of ice shelves: Theory, *Journal of Glaciology* **12**(64): 45–70.
- Thomas, R. (1977). Calving-bay dynamics and ice-sheet retreat up the St. Lawrence Valley system, *Géographie Physique Quaternaire* **31**(3-4): 347–356.
- Thomas, R. (1979a). The dynamics of marine ice sheets, *Journal of Glaciology* **24**(90): 167–177.
- Thomas, R. (1979b). Ice shelves: A review, *Journal of Glaciology* **24**(90): 273–286.
- Thomas, R., S. Stephenson, R. Binschadler, S. Shabatie und C. Bentley (1988). Thinning and groundingline retreat on Ross Ice-Shelf, Antarctica, *Annals of Glaciology* **11**: 165–172.
- Thomas, R., T. Sanderson und K. Rose (1979). Effect of climatic warming on the West Antarctic Ice Sheet, *Nature* **277**: 355–358.
- Thomas, R. und C. Bentley (1978). A model for Holocene retreat of the West Antarctic Ice Sheet, *Quaternary Research* **10**: 150–170.
- Thyssen, F. (1988). Special aspects of the central part of Filchner-Ronne Ice Shelf, Antarctica, *Annals of Glaciology* **11**: 173–179.
- Thyssen, F. und K. Grosfeld (1988). Ekström Ice Shelf, Antarctica, *Annals of Glaciology* **11**: 180–183.
- Van der Veen, C. (1985). Response of a marine ice sheet to changes at the grounding line, *Quaternary Research* **24**: 257–267.
- Van der Veen, C. (1986). Numerical modelling of ice shelves and ice tongues, *Annales Geophysicae* **4**(B 1): 45–54.

- Van der Veen, C. (1987). The West Antarctic Ice Sheet: The need to understand its dynamics, in Van der Veen, C. und H. Oerlemans (Hrsgb.), *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*, Reidel, Dordrecht, S. 1–16.
- Van der Veen, C. und I. Whillans (1989a). Force budget: I. Theory and numerical methods, *Journal of Glaciology* **35**(119): 53–60.
- Van der Veen, C. und I. Whillans (1989b). Force budget: II. Application to two-dimensional flow along Byrd Station strain network, Antarctica, *Journal of Glaciology* **35**(119): 61–67.
- Vaughan, D. und C. Doake (1996). Recent atmospheric warming and the retreat of ice shelves on the Antarctic Peninsula, *Nature* **379**: 328–330.
- Weertman, J. (1957). Deformation of floating ice shelves, *Journal of Glaciology* **3**: 38–42.
- Weertman, J. (1974). Stability of the junction of an ice sheet and an ice shelf, *Journal of Glaciology* **13**(67): 3–11.
- Wetherald, R. und S. Manabe (1988). Cloud feedback processes in a general circulation model, *Journal of Atmospheric Science* **45**: 1397–1415.
- Whillans, I. (1981). Reaction of the accumulation zone portions of glaciers to climatic change, *Journal of Geophysical Research* **86**(C5): 4274–4282.
- Whillans, I., Y. Chen, C. V. der Veen und T. Hughes (1989). Force budget: III. Application to three-dimensional flow of Byrd Glacier, Antarctica, *Journal of Glaciology* **35**(119): 68–80.
- Zwally, H. (1991). Breakup of Antarctic ice, *Nature* **350**: 274.

Anhang A

Die verwendeten Variablen

A	Fließfaktor	$[\text{Pa}^{-3}\text{s}^{-1}]$
\mathbf{A}	Koeffizientenmatrix	
A_0	temperaturunabhängiger Materialfaktor	$[\text{Pa}^{-3}\text{s}^{-1}]$
a	Akkumulation/Ablation	$[\text{ma}^{-1}]$
\mathbf{D}	Diagonalmatrix	
f_s, f_b	Koordinate entlang der Oberfläche	
f^ν	ν -te Ableitung der Funktion f nach x	
g	Gravitationskonstante, $9,81 \text{ ms}^{-2}$	$[\text{ms}^{-2}]$
H	Eismächtigkeit	$[\text{m}]$
H_a	Anfangswert für die Eisdicke	$[\text{m}]$
H_f	Freibordhöhe	$[\text{m}]$
H_i	maximale Eisdicke an der Eisscheide	$[\text{m}]$
h	Höhe relativ zu NN	$[\text{m}]$
h_i	Untergrundhöhe an der Eisscheide	$[\text{m}]$
h_L	Untergrundhöhe am Eisschildrand	$[\text{m}]$
\mathbf{L}, \mathbf{U}	obere und untere Dreiecksmatrix	
L_1	Ausdehnung des Eisschildes außerhalb des Modells bis zur Eisscheide	$[\text{m}]$
N	$= p_e - p_w$, effektiver Druck	$[\text{Pa}]$
n	Exponent im Fließgesetz	
$\mathbf{n}_s, \mathbf{n}_b$	senkrecht nach außen weisender Einheitsvektor an der Grenzfläche Eis-Luft bzw. Eis-Wasser	
$O(\Delta_x)$	Fehlerordnung der Discretisierung	
p	$= -\rho gh$, hydrostatischer Druck	$[\text{Pa}]$
p_e	Auflastdruck der Wassersäule	$[\text{Pa}]$
p_w	tatsächlicher Wasserdruck	$[\text{Pa}]$
Q	Aktivierungsenergie für die Volumendiffusion (im Mittel 60 kJmol^{-1})	$[\text{kJmol}^{-1}]$
q_{x_i}	horizontaler Fluß in Richtung einer Koordinatenachse	$[\text{m}^3\text{a}^{-1}]$
R	universelle Gaskonstante ($8,314 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$)	$[\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}]$
\mathbf{R}	Randbedingungsvektor	
$R_n(x_s)$	<i>Lagrangesches Restglied</i> der Taylorentwicklung	
R_{ij}	resistiver Anteil der vollen Spannungen	$[\text{Pa}]$
$\mathbf{Res}^{(r)}$	Residuum der r -ten Iteration	

S_i	allgemein wirkende Spannungen	[Pa]
s	vertikal normierte Koordinate	
T	Temperatur in Kelvin	[K]
\mathbf{T}	resultierender Spannungsvektor an der Oberfläche	[Pa]
T_0	273,16 K = 0 °C	[K]
t	Zeit	[a]
u, v, w	Geschwindigkeitskomponenten in den Achsenrichtungen	[ma ⁻¹]
\bar{u}, \bar{v}	vertikal integrierten Geschwindigkeitskomponenten	[ma ⁻¹]
u_a	Anfangswert für die Geschwindigkeit	[ma ⁻¹]
u_b	basale Geschwindigkeit	[ma ⁻¹]
u_s	Oberflächengeschwindigkeit	[ma ⁻¹]
w	Relaxationsfaktor	
x, y, z	Koordinatenrichtungen	[m]
Y	halbe Gletscherbreite	[m]
α	Wichtungsfaktor der numerischen Dissipation	
β	Konstante, $7,42 \times 10^{-5} \text{ K(kPa)}^{-1}$	[K(kPa) ⁻¹]
Δ_{sx}, Δ_{sy}	geometrischen Korrekturfaktoren	
δ_{ij}	Kronecker Symbol	
$\dot{\epsilon}$	effektive Deformationsrate	[a ⁻¹]
$\dot{\epsilon}_{ij}$	Deformationsraten	[a ⁻¹]
ρ	Eisdichte, i.a. 910 kgm^{-3}	[kgm ⁻³]
ρ_w	Dichte der Wassersäule, i.a. 910 kgm^{-3}	[kgm ⁻³]
σ_{ii}	Normalspannungen	[Pa]
τ_b	basale Scherspannung	[Pa]
τ_d	Antriebsspannung	
τ_{ij}	deviatorische Spannungen	[Pa]

Anhang B

Die diskrete Schreibweise der Systemgleichungen

1. Vollständig diskretisierte Gleichung für die Geschwindigkeit in x - Richtung

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \Delta_{sy} B_{-\frac{1}{2}k} \right) u_{-j-k} \\ & - \frac{1}{2\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{4} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) u_{-i-k} \\ & + \left(\frac{1}{2\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}i} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}i} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}j} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\Delta k^2 H^2} B_{-\frac{1}{2}k} \left(2\Delta_{sx} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \Delta_{sy} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \left(1 - \Delta_{sx-\frac{1}{2}k}^2 \right) \right) \right) u_{-k} \\ & + \frac{1}{2\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{4} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) u_{+i-k} \\ & + \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \Delta_{sy} B_{-\frac{1}{2}k} \right) u_{+j-k} \\ & + \left(\frac{1}{2\Delta^2 y} B_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \frac{1}{H} \Delta_{sy} \left(B_{+\frac{1}{2}k} - B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{-j} \\ & + \left(\frac{2}{\Delta^2 x} B_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2\Delta x \Delta k} \frac{1}{H} \left(\left(\Delta_{sx} - \frac{1}{4} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{4} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{-i} \\ & - \left(\frac{2}{\Delta^2 x} \left(B_{+\frac{1}{2}i} + B_{-\frac{1}{2}i} \right) + \frac{1}{2\Delta^2 y} \left(B_{+\frac{1}{2}j} + B_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\Delta^2 k H^2} \left(2\Delta_{sx} \left((\Delta_{sx} B)_{+\frac{1}{2}k} + (\Delta_{sx} B)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \Delta_{sy} \left((\Delta_{sy} B)_{+\frac{1}{2}k} + (\Delta_{sy} B)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\left((1 - \Delta_{sx}^2) B \right)_{+\frac{1}{2}k} + \left((1 - \Delta_{sx}) B \right)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) \right) u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{\Delta^2 x} B_{+\frac{1}{2}i} - \frac{1}{2\Delta x \Delta k} \frac{1}{H} \left(\left(\Delta_{sx} - \frac{1}{4} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{4} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{+i} \\
& + \left(\frac{1}{2\Delta^2 y} B_{+\frac{1}{2}j} - \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \frac{1}{H} \Delta_{sy} \left(B_{+\frac{1}{2}k} - B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{+j} \\
& + \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \Delta_{sy} B_{+\frac{1}{2}k} \right) u_{-j+k} \\
& + \frac{1}{2\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{4} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right) u_{-i+k} \\
& + \left(-\frac{1}{2\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}i} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}i} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}j} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta k^2 H^2} B_{+\frac{1}{2}k} \left(2\Delta_{sx} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \Delta_{sy} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \left(1 - \Delta_{sx+\frac{1}{2}k}^2 \right) \right) \right) u_{+k} \\
& - \frac{1}{2\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{4} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right) u_{+i+k} \\
& - \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \Delta_{sy} B_{+\frac{1}{2}k} \right) u_{+j+k} \\
& - \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{2} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) v_{-j-k} \\
& - \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2H} \Delta_{sy} B_{-\frac{1}{2}k} \right) v_{-i-k} \\
& + \left(\frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}i} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}i} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}j} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta k^2 H^2} B_{-\frac{1}{2}k} \left(\Delta_{sx} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \left(\Delta_{sy} - \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) \right) v_{-k} \\
& + \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2H} \Delta_{sy} B_{-\frac{1}{2}k} \right) v_{+i-k} \\
& + \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{2} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) v_{+j-k} \\
& + \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(B_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2} B_{-\frac{1}{2}j} \right) v_{-i-j} \\
& + \left(-\frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(B_{+\frac{1}{2}i} - B_{-\frac{1}{2}i} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \frac{1}{H} \left(\left(\Delta_{sx} - \frac{1}{2} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} - \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{2} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) v_{-j} \\
& - \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(B_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2} B_{-\frac{1}{2}j} \right) v_{+i-j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{8\Delta x \Delta y} (B_{+\frac{1}{2}j} - B_{-\frac{1}{2}j}) + \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \frac{1}{H} \Delta_{sy} (B_{+\frac{1}{2}k} - B_{-\frac{1}{2}k}) \right) v_{-i} \\
& - \frac{1}{\Delta^2 k H^2} \left(\Delta_{sx} \left((\Delta_{sy} B)_{+\frac{1}{2}k} + (\Delta_{sy} B)_{-\frac{1}{2}k} \right) + \frac{1}{2} \Delta_{sy} \left((\Delta_{sx} B)_{+\frac{1}{2}k} + (\Delta_{sx} B)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left((\Delta_{sx} \Delta_{sy} B)_{+\frac{1}{2}k} + (\Delta_{sx} \Delta_{sy} B)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) v \\
& + \left(\frac{1}{8\Delta x \Delta y} (B_{+\frac{1}{2}j} - B_{-\frac{1}{2}j}) - \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \frac{1}{H} \Delta_{sy} (B_{+\frac{1}{2}k} - B_{-\frac{1}{2}k}) \right) v_{+i} \\
& - \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(B_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2} B_{+\frac{1}{2}j} \right) v_{-i+j} \\
& + \left(\frac{1}{4\Delta x \Delta y} (B_{+\frac{1}{2}i} - B_{-\frac{1}{2}i}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \frac{1}{H} \left(\left(\Delta_{sx} - \frac{1}{2} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} - \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{2} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) v_{+j} \\
& + \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \left(B_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2} B_{+\frac{1}{2}j} \right) v_{+i+j} \\
& + \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{2} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right) v_{-j+k} \\
& + \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2H} \Delta_{sy} B_{+\frac{1}{2}k} \right) v_{-i+k} \\
& + \left(-\frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}i} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}i} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}j} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta k^2 H^2} B_{+\frac{1}{2}k} \left(\Delta_{sx} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \left(\Delta_{sy} - \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) \right) v_{-k} \\
& - \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{2H} \Delta_{sy} B_{+\frac{1}{2}k} \right) v_{+i+k} \\
& - \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sx} - \frac{1}{2} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right) v_{+j+k} \\
& + \frac{1}{2\Delta x} (R_{+i} - R_{-i}) - \frac{1}{2\Delta k H} \Delta_{sx} (R_{+k} - R_{-k}) \\
& + \rho g \frac{1}{2\Delta x} (H_{+i} + h_{+i} - H_{-i} - h_{-i}) - (1-s) \Delta_{sx} g \frac{1}{2\Delta k} (\rho_{+k} - \rho_{-k}) \\
& + \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \frac{1}{2H} \left(B_{+\frac{1}{2}k} (w_{+i} - w_{-i} + w_{+i+k} - w_{-i+k}) \right. \\
& \quad \left. - B_{-\frac{1}{2}k} (w_{+i} - w_{-i} + w_{+i-k} - w_{-i-k}) \right) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{B.1}$$

2. Vollständig diskretisierte Gleichung für die Geschwindigkeit in y - Richtung

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{4} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) v_{-j-k} \\
& - \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \Delta_{sx} B_{-\frac{1}{2}k} \right) v_{-i-k} \\
& + \left(\frac{1}{2\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}j} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}i} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}i} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta k^2 H^2} B_{-\frac{1}{2}k} \left(2\Delta_{sy} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \Delta_{sx} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \left(1 - \Delta_{sy-\frac{1}{2}k}^2 \right) \right) \right) v_{-k} \\
& + \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \Delta_{sx} B_{-\frac{1}{2}k} \right) v_{+i-k} \\
& + \frac{1}{2\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{4} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) v_{+j-k} \\
& + \left(\frac{2}{\Delta^2 y} B_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{2\Delta y \Delta k} \frac{1}{H} \left(\left(\Delta_{sy} - \frac{1}{4} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{4} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) v_{-j} \\
& + \left(\frac{1}{2\Delta^2 x} B_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \frac{1}{H} \Delta_{sx} \left(B_{+\frac{1}{2}k} - B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) v_{-i} \\
& - \left(\frac{2}{\Delta^2 y} \left(B_{+\frac{1}{2}j} + B_{-\frac{1}{2}j} \right) + \frac{1}{2\Delta^2 x} \left(B_{+\frac{1}{2}i} + B_{-\frac{1}{2}i} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta^2 k H^2} \left(2\Delta_{sy} \left(\left(\Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}k} + \left(\Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \Delta_{sx} \left(\left(\Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}k} + \left(\Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\left(\left(1 - \Delta_{sy}^2 \right) B \right)_{+\frac{1}{2}k} + \left(\left(1 - \Delta_{sy} \right) B \right)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) \right) v \\
& + \left(\frac{1}{2\Delta^2 x} B_{+\frac{1}{2}i} - \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \frac{1}{H} \Delta_{sx} \left(B_{+\frac{1}{2}k} - B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) v_{+i} \\
& + \left(\frac{2}{\Delta^2 y} B_{+\frac{1}{2}j} - \frac{1}{2\Delta y \Delta k} \frac{1}{H} \left(\left(\Delta_{sy} - \frac{1}{4} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{4} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) v_{+j} \\
& + \frac{1}{2\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{4} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right) v_{-j+k} \\
& + \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \Delta_{sx} B_{+\frac{1}{2}k} \right) v_{-i+k} \\
& + \left(-\frac{1}{2\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}j} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}i} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}i} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta k^2 H^2} B_{+\frac{1}{2}k} \left(2\Delta_{sy} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \Delta_{sx} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \left(1 - \Delta_{sy+\frac{1}{2}k}^2 \right) \right) v_{+k} \\
& - \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \Delta_{sx} B_{+\frac{1}{2}k} \right) v_{+i+k} \\
& - \frac{1}{2\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{4} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right) v_{+j+k} \\
& - \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{2H} \Delta_{sx} B_{-\frac{1}{2}k} \right) u_{-j-k} \\
& - \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{2} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) u_{-i-k} \\
& + \left(\frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}j} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}i} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}i} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta k^2 H^2} B_{-\frac{1}{2}k} \left(\Delta_{sy} \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \left(\Delta_{sx} - \Delta_{sx-\frac{1}{2}k} \right) \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{-k} \\
& + \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{2} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) u_{+i-k} \\
& + \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{2H} \Delta_{sx} B_{-\frac{1}{2}k} \right) u_{+j-k} \\
& + \frac{1}{4\Delta y \Delta x} \left(B_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{2} B_{-\frac{1}{2}i} \right) u_{-j-i} \\
& + \left(-\frac{1}{8\Delta y \Delta x} \left(B_{+\frac{1}{2}i} - B_{-\frac{1}{2}i} \right) + \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \frac{1}{H} \Delta_{sx} \left(B_{+\frac{1}{2}k} - B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{-j} \\
& - \frac{1}{4\Delta y \Delta x} \left(B_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{2} B_{+\frac{1}{2}i} \right) u_{-j+i} \\
& + \left(-\frac{1}{4\Delta y \Delta x} \left(B_{+\frac{1}{2}j} - B_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \frac{1}{H} \left(\left(\Delta_{sy} - \frac{1}{2} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} - \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{2} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{-i} \\
& - \frac{1}{\Delta^2 k H^2} \left(\Delta_{sy} \left(\left(\Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}k} + \left(\Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}k} \right) + \frac{1}{2} \Delta_{sx} \left(\left(\Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}k} + \left(\Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left(\left(\Delta_{sy} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}k} + \left(\Delta_{sy} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) u \\
& + \left(\frac{1}{4\Delta y \Delta x} \left(B_{+\frac{1}{2}j} - B_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \frac{1}{H} \left(\left(\Delta_{sy} - \frac{1}{2} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} - \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{2} \Delta_{sy-\frac{1}{2}k} \right) B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{+i} \\
& - \frac{1}{4\Delta y \Delta x} \left(B_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{2} B_{-\frac{1}{2}i} \right) u_{+j-i} \\
& + \left(\frac{1}{8\Delta y \Delta x} \left(B_{+\frac{1}{2}i} - B_{-\frac{1}{2}i} \right) - \frac{1}{8\Delta y \Delta k} \frac{1}{H} \Delta_{sx} \left(B_{+\frac{1}{2}k} - B_{-\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{+j} \\
& + \frac{1}{4\Delta y \Delta x} \left(B_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{2} B_{+\frac{1}{2}i} \right) u_{+j+i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}j} + \frac{1}{2H} \Delta_{sx} B_{+\frac{1}{2}k} \right) u_{-j+k} \\
& + \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{2} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right) u_{-i+k} \\
& + \left(-\frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}j} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{-\frac{1}{2}j} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{8\Delta x \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}i} - \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{-\frac{1}{2}i} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\Delta k^2 H^2} B_{+\frac{1}{2}k} \left(\Delta_{sy} \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} + \frac{1}{2} \left(\Delta_{sx} - \Delta_{sx+\frac{1}{2}k} \right) \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) \right) u_{-k} \\
& - \frac{1}{4\Delta x \Delta k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{H} \Delta_{sy} B \right)_{+\frac{1}{2}i} + \frac{1}{H} \left(\Delta_{sy} - \frac{1}{2} \Delta_{sy+\frac{1}{2}k} \right) B_{+\frac{1}{2}k} \right) u_{+i+k} \\
& - \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \left(\left(\frac{1}{H} \Delta_{sx} B \right)_{+\frac{1}{2}j} + \frac{1}{2H} \Delta_{sx} B_{+\frac{1}{2}k} \right) u_{+j+k} \\
& + \frac{1}{2\Delta y} (R_{+j} - R_{-j}) - \frac{1}{2\Delta k H} \Delta_{sy} (R_{+k} - R_{-k}) \\
& + \rho g \frac{1}{2\Delta y} (H_{+j} + h_{+j} - H_{-j} - h_{-j}) - (1-s) \Delta_{sy} g \frac{1}{2\Delta k} (\rho_{+k} - \rho_{-k}) \\
& + \frac{1}{4\Delta y \Delta k} \frac{1}{2H} \left(B_{+\frac{1}{2}k} (w_{+j} - w_{-j} + w_{+j+k} - w_{-j+k}) \right. \\
& \quad \left. - B_{-\frac{1}{2}k} (w_{+j} - w_{-j} + w_{+j-k} - w_{-j-k}) \right) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Die glaziale Landschaft	10
2.1	Übersicht des antarktischen Kontinents	14
2.2	Flächen- und Volumenanteile der antarktischen Regionen	15
2.3	Basale Niveaus im westantarktischen Eisschild	16
2.4	Verteilung der mittleren Jahrestemperatur an der Oberfläche in der Antarktis	19
2.5	Verteilung der mittleren Akkumulation an der Oberfläche des antarktischen Kontinents	20
2.6	Modellvorstellung eines kontinentalen, bzw. marinen Eisschildes	22
3.1	Reaktion des Modelleisschildes auf einen plötzlichen Anstieg des Meeresspiegels um 50 m	30
3.2	Isolinien der horizontalen Geschwindigkeitskomponente in der Übergangszone	31
3.3	Fluß durch das Modell für verschiedene Fallstudien	32
3.4	Schematische Skizzen der Übergangszone	34
4.1	Kraft- und Spannungsverhältnisse an einem Festkörper	38
4.2	Vertikale Skalierung des Eisschildmodells	40
5.1	Antrieb und angreifende Kräfte an einem Eiskörper	48
5.2	Kräftebilanz an der Schelfeisfront	49
6.1	Diskretisierung eines Untersuchungsgebietes in einem kartesischen Koordinatennetz	58
6.2	Diskretisierung des Modells in einem kartesischen Koordinatensystem	60
6.3	Numerierungsschema der Gitterpunkte für die Lösung des Gleichungssystems	61
7.1	Übersicht des Ekström-Schelfeises	69
7.2	Oberflächenmodell aus den Ergebnissen der ersten terrestrischen Einmessung	70
7.3	Oberflächengeometrie an der <i>grounding line</i> des Ekström-Schelfeises	71
7.4	Deformationshauptachsen an den Meßpunkten.	73
7.5	Oberflächengeschwindigkeit längs des Profils.	74
7.6	Seismische Tiefensondierung	75
7.7	Ekström <i>grounding line</i> , Geometrie der Oberfläche und des Untergrundes aus den seismischen und geodätischen Messungen	76
7.8	Modellergebnis für die horizontale Geschwindigkeit	80
7.9	Resultat für die Berechnung der vertikalen Scherspannung im skalierten Modell	81

7.10	Antriebsspannung und basale Verzögerungsspannung aus den Modell- ergebnissen	81
7.11	Isolinien-darstellung der Gradienten der horizontalen resistiven Span- nung über das Meßprofil	82
8.1	Vorgegebene Geometrie des Schelfeismodells aus der analytischen Lösung von Van der Veen	86
8.2	Ergebnis für die horizontale Geschwindigkeit des diagnostischen Schelfeismodells	87
8.3	Ergebnisse für den Modellauf der frei beweglichen Eisdicke mit der Geschwindigkeitsverteilung aus dem diagnostischen Lauf	88
8.4	Ergebnisse für den freien Modellauf	89
8.5	Ergebnisse für den Lauf mit reduziertem Zeitschritt	90
9.1	Geometrie und Horizontalgeschwindigkeiten des Eiskörpers in einem Schnitt längs zur Fließrichtung	96
9.2	Über die Eismächtigkeit gemittelte Horizontalgeschwindigkeit längs des Fließprofils.	97
9.3	Verteilung der horizontalen Geschwindigkeit in einem Vertikalschnitt parallel zur Fließrichtung	98
9.4	Auf die Oberflächenwerte normierte Horizontalgeschwindigkeit	100
9.5	Verteilung der vertikalen Geschwindigkeit in einem Schnitt parallel zur Fließrichtung	101
9.6	Eisdickenprofil aus dem Modellergebnis und für theoretische, sche- rungsdominierte Eisschilde	103
9.7	Modellvergleich von Geschwindigkeit und Eisdicke im Schelfeis mit der Lösung von Van der Veen	104
9.8	Auf die Einheitsbreite normierter Massenfluß längs der Fließrichtung	105
9.9	Verteilung der deviatorischen Longitudinalspannung τ_{xx} in einem Ver- tikalschnitt parallel zur Fließrichtung	107
9.10	Verteilung der vertikalen Scherspannung τ_{xz} in einem Vertikalschnitt parallel zur Fließrichtung	108
9.11	Antriebsspannung, basale Scherspannung und mittlere deviatorische Longitudinalspannung parallel zur Fließrichtung	109
9.12	Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Gitterweiten in x - Richtung von 2000 m und 1000 m	110
9.13	Effekt der künstlichen Diffusion in der Eismächtigkeitsentwicklung auf die Oberflächengeschwindigkeit	113
9.14	Vergleich der Eismächtigkeiten auf der zentralen Fließlinie des seitlich gebremsten Plattenmodells mit dem uniaxialen Plattenmodell	114
9.15	Vergleich der Oberflächengeschwindigkeiten auf der zentralen Fließ- linie des seitlich gebremsten Plattenmodells mit den entsprechenden Geschwindigkeiten des uniaxialen Plattenmodells	115
9.16	Räumliche Darstellung der Eisdicke und der Oberflächengeschwindig- keit des transienten Zustandes	116
9.17	Querprofile von Eismächtigkeit und der Geschwindigkeit u (in x - Richtung) an drei Stellen längs der Hauptfließrichtung	117
9.18	Bodentopographie des Buchtmodells mit dem Tiefwassertrog im vor- deren zentralen Bereich des Modellgebietes	118

9.19	Geometrie des Eisschildes längs der Zentrallinie	119
9.20	Transversalnormierter Fluß entlang der zentralen Fließlinie des Modells	121
9.21	Eisoberfläche des transienten Modellzustandes.	122
9.22	Eisdicke und longitudinale Oberflächengeschwindigkeit auf einem Profil parallel zur y -Achse nahe der Eisfront	123
9.23	Die longitudinale Oberflächengeschwindigkeit in x -Richtung und die transversale Oberflächengeschwindigkeit in y -Richtung im gesamten Modellgebiet	124
9.24	Vertikalprofile der longitudinalen Horizontalgeschwindigkeit u in x - Richtung längs der zentralen Fließlinie und der transversalen Hori- zontalgeschwindigkeit v in y -Richtung quer zur Hauptfließrichtung . .	125

Dank

Selbst wenn eine Dissertation den Anspruch eigenständigen wissenschaftlichen Arbeitens beansprucht, so forscht es sich im leeren Raum überaus schlecht. Als kleines Rädchen im weitläufigen Getriebe der Wissenschaft ist nicht nur das große Antriebsrad für die eigene Entwicklung wichtig, sondern auch die vielen stabilisierenden, ermunternden und unterstützenden Schrauben, Muttern, Splinte und andere Rädchen. Selbst der große Rahmen der Umgebung hilft, vielleicht manchmal auch nicht, sich im allgemeinen Wirrwarr zu orientieren.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Heinz Miller, für die Möglichkeit meinen Gedanken über die Materie Eis am AWI eine Gestalt zu geben und das allzeit offene Ohr für die vielfältigen Problemchen, die dabei auftreten. Ebenso gebührt mein Dank Herrn Prof. Klaus Herterich, für die Bereitschaft die mühselige Aufgabe der Erstellung eines Gutachtens zu übernehmen.

Für die geduldige Beantwortung vieler, nicht nur rein glaziologischer Fragen und auch die moralische Unterstützung wird Hans Oerter mein Dank verfolgen. Philippe Huybrechts hat mir mit so manchem Rat geholfen und mich wieder in das richtige Fahrwasser der glaziologischen Modellierung gebracht, wofür ich ihm dankbar bin.

Den größten Dank schulde ich jedoch Chresten Wübber, für seine außerordentliche Geduld mich in stundenlangen Gesprächen zu ertragen, und mich immer wieder von den Strandungsbänken der numerischen Untiefen zu holen.

Außerdem gilt mein Dank der gesamten glaziologischen Arbeitsgruppe, deren Klima, glaziologisch verheerend, eisbrecherisch und auftauend ist. Insbesondere mußte Frederick Jung-Rothenhäusler meine ewigen UNIX Schwächen ausbügeln, während ich Astrid Lambrecht vor allem für ihre unermüdliche Hilfe in so vielen Dingen herzlich danke.

Zuletzt, aber deshalb nicht geringer, geht mein Dank an all meine Freunde, die mir in der manchmal auch nicht so lustigen Zeit zur Seite gestanden sind, vor allem an Susanna Schultze und meine Familie UND

an meine geliebte Landschaft der *Allgäuer Alpen*, in der ich das erste Mal Bekanntschaft mit der Polarforschung schloß, und die mich in vielen Dingen mehr geprägt hat, als so manch vermeintlich wichtiges Ereignis in meinem Leben.

