
Direkte Numerische Simulation von Salzfingern

Thomas Zweigle

Universität Bremen 2011

Direkte Numerische Simulation von Salzfingern

Vom Fachbereich für Physik und Elektrotechnik der
Universität Bremen

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

von

Thomas Zweigle

1. Gutachter: Prof. Dr. Dirk Olbers
2. Gutachter: Priv.-Doz Mag. Dr. Friedrich Kupka

Eingereicht am: 04. April 2011

Datum des Promotionskolloquiums: 01. September 2011

Inhaltsverzeichnis

0.1	Vorwort	vi
1	Einleitung	1
1.1	Definition der doppelt-diffusiven Prozesse	1
1.1.1	Regime der Salzfinger	2
1.1.2	Regime der doppelt-diffusiven Konvektion / Semikonvektion	4
1.1.3	Diffusiver und konvektiver Fall	4
1.2	Kurze Motivation doppelt-diffusiver Prozesse	5
1.3	Zielsetzung	5
2	Rückblick auf bisherige Arbeiten und Motivation von Salz fingern	7
2.1	Situation im Ozean	7
2.2	Meßreihen zur Entstehung thermohaliner Treppenstufen	9
2.3	Numerische Simulationen von Salz fingern	12
2.3.1	Zeitskala der Salzfinger und Einordnung der Simulationen	17
2.4	Weitere relevante doppelt-diffusive Systeme	18
3	Mathematische Grundlagen	21
3.1	Grundgleichungen von Salz fingern und doppelt-diffusiver Konvektion	21
3.1.1	Linearisierte Gleichungen des $2D$ -Fall:	22
3.2	Unterschiede zwischen Salz fingern und Semikonvektion	23
3.2.1	Der Salzfingerfall	24
3.2.2	Semikonvektion	25
3.2.3	Einteilung der Regime nach linearer Theorie	25
4	Numerische Simulationen	29
4.1	Modellbeschreibung	29
4.1.1	Aufbau der Simulationen	29
4.1.2	Verschiedene Vergleichsansätze	32
4.1.3	Einteilung der Simulationen	33
4.2	Zwei-Schichten Modell und lineare Schichtung	34
4.2.1	Momentaufnahmen der Salzfinger	34
4.2.2	Profile von Temperatur und Salzgehalt	39
4.2.3	Effektive Diffusion der Salzfinger	43
4.2.4	Gesetzmäßigkeit der effektiven Diffusion	69
4.2.5	Zusammenfassung	71
4.3	Zwei-Schichtenmodelle und Lewiszahlen	73

4.3.1	Momentaufnahmen verschiedener Entwicklungsstadien	74
4.3.2	Vergleich der turbulenten Flüsse	81
4.3.3	Zusammenfassung	84
5	Zusammenfassung und Ausblick	85
5.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	85
5.2	Ausblick auf anschließende Arbeiten	87
A	Anhang	89
A.1	Linearisieren der Grundgleichungen	89
A.1.1	Stabilitätsanalyse	91
A.2	Der Soretteffekt	93
A.3	Die effektive Diffusion nach Merryfield	97
A.4	Glossar	100
	Literaturverzeichnis	108

Abstract

The phenomena of double-diffusive processes occur when two fluids with molecular diffusivities, operating on different scales, are combined. This process was recognized first by Arons and Stommel and later described with linear theory by Stern in 1960. A gravitationally stable fluid layer, with a stabilizing and a destabilizing component, is the initial state for double-diffusive processes. The release of potential energy by Double-diffusion results in destabilization of this layer. Instability develop and produce local fingerlike structures – the so called saltfingers. These lead to large scale convection of temperature and salinity that is direct against the stabilizing gradients. These kind of processes are not limited to ocean circulation only, Double-diffusion is also found in astrophysics (big Helium-stars), the earth core, metal alloy, refilling of gas reservoirs, etc.

The main objective of this work is an estimation of the effective diffusivities of temperature and salinity, caused by saltfingering and is realized by means of direct numerical simulation (DNS). These effective diffusivities were used to compare the results with published values and test existing parametrisations. In this way, the effective diffusivity of temperature and salinity could be described by parametrisation. Also, the law of effective diffusivities by Merryfield was in well agreement with the effective fluxes, estimated in the salt-finger simulations of this work.

Salt-finger processes were studied in several publications, but, semiconvection in the ocean was never modeled before by direct numerical simulation (DNS). Compared to saltfingering, semiconvection occurs as a process with a much more stable layering – with smaller thermohaline steps (0.5 – 5 m) in contrast to saltfingers (20 – 100 m) – and a narrow parameter range of stability. The developing of effective diffusivity by semiconvection does not arrive at values of saltfingering.

0.1 Vorwort

Erstmals führte Stanley Jevons im Jahre 1857 Salzfingerexperimente in einem Wassertank durch. Etwa 20 Jahre später wurden diese von Lord Rayleigh wieder aufgegriffen. Der Effekt (Entstehung von Salz fingern) wurde jedoch nicht der unterschiedlichen Diffusion von Temperatur und Salzgehalt zugeschrieben, sondern allgemein der Eigenschaft von Flüssigkeiten. Die molekularen Diffusionskoeffizienten wurden von Rayleigh daher vernachlässigt und als nicht ausschlaggebend erachtet. Die doppelt-diffusiven Prozesse gerieten wieder in Vergessenheit und ihre eigentliche Entdeckung wurde um fast hundert Jahre aufgeschoben (Schmitt [69]).

In den 1950er Jahren und den folgenden Jahrzehnten wurden verschiedene Ansätze entwickelt, die zum Verständnis der Bildung von stabilen thermohalinen Treppenstufen beitragen und den vertikalen Austausch von Temperatur und Salzgehalt zwischen den Treppenstufen beschreiben konnten. Einer dieser Ansätze ist die Beschreibung durch doppelt-diffusive Prozesse (wie Salzfinger oder Semikonvektion), die seit 1960 mehrfach aufgegriffen wurden. Diese doppelt-diffusiven Prozesse erwiesen sich als wichtiges Bindeglied zwischen molekularer und konvektiver, bzw. turbulenter Vermischung. Die Entstehung absinkender Fluidelemente welche die turbulenten Flüsse ausmachen, wird durch den Unterschied der molekularen Diffusion zwischen Temperatur und Salzgehalt angeregt. Unter bestimmten Umständen führt dies schließlich zu großskaliger Konvektion von Temperatur und Salzgehalt zwischen stabil geschichteten thermohalinen Treppenstufen. Bis jetzt ist es allerdings noch nicht gelungen, ein geschlossenes Bild über die doppelt-diffusiven Prozesse zu erhalten.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung von Temperatur- und Salzgehaltsflüssen, die in einer stabilen Schichtung aus doppelt-diffusiven Prozessen resultieren. Diese Flüsse liegen nach ihrer Entstehung mehrere Größenordnungen über den diffusiven molekularen Flüssen und ermöglichen es die effektive Diffusion von Temperatur und Salzgehalt zu bestimmen. Bedingt durch die großen Gitterstrukturen gängiger Ozeanmodelle (vertikale Auflösung 100 bis 500 m), werden die doppelt-diffusiven Prozesse nicht aufgelöst. Durch die Parametrisierung der entstehenden Flüsse können diese Prozesse dennoch berücksichtigt werden. Das hier verwendete Modell beschreibt ein wenige Zentimeter großes, hochaufgelöstes Teilgebiet einer Grenzschicht zwischen zwei thermohalinen Stufen. Indem die kleinskalige Struktur der Salzfinger ($\sim 0,5 - 5$ cm) aufgelöst wird, ist es erst möglich die durch doppelt-diffusive Prozesse gesteuerten Flüsse von Temperatur und Salzgehalt zu bestimmen.

Theoretische Aussagen, z.B. durch Turner [85], konnten mit Tankexperimenten erklärt werden, jedoch sind diese auf wenige Spezialfälle beschränkt. Der nächste Schritt, die numerische Untersuchung und Modellierung der (nicht-linearen) doppelt-diffusiven Prozesse in einer Grenzschicht, stellt sich als sehr schwierig dar. Der Skalenbereich der entstehenden Strukturen der Salzfinger ist mit einer durchschnittlichen Größe von $0,5 - 5$ cm sehr klein. Um doppelt-diffusive Effekte betrachten zu können muß die Struktur der

Salzfinger durch das verwendete Gitter aufgelöst werden. Bei einer durchschnittlichen Grenzschichtdicke zwischen zwei thermohalinen Schichten im Ozean von etwa 0,5 – 1 m wird eine sehr hohe Gitterauflösung notwendig, was zu aufwendigen Simulationen führt. Die Betrachtung doppelt-diffusiver Prozesse auf einer gesamten vertikalen Schichthöhe im Ozean mit den auftretenden thermohalinen Treppenstufen (Größenordnung ~ 100 m) konnte aus diesem Grund bislang nicht realisiert werden.

Die Aufteilung dieser Arbeit ist wie folgt:

Kapitel 1 enthält die Definition der auftretenden doppelt-diffusiven Prozesse und umreißt deren einzelne Regime wie Salzfinger und Semikonvektion. In Abschnitt 1.3 werden die Ziele dieser Arbeit besprochen.

In Kapitel 2 ist eine chronologisch geordnete Zusammenfassung der bekannten Untersuchungen der doppelt-diffusiven Prozesse wiedergegeben. Dabei werden die durchgeführten Messreihen vorgestellt, sowie der Nutzen numerischer Simulationen erläutert. Dies motiviert unter anderem, warum doppelt-diffusive Prozesse betrachtet werden und erklärt warum sie noch immer sehr unverstanden sind. Es wird auch deutlich gemacht, welche einflußreiche Stellung doppelt-diffusive Prozesse bei der Bildung thermohaliner Schichten einnehmen. Die Beschreibung von Temperatur- und Salzgehaltsflüssen durch die dazwischen liegende Grenzschicht steht dabei im Vordergrund.

Die lineare Theorie, mit der die doppelt-diffusiven Regime charakterisiert werden, ist in Kapitel 3 erläutert. Dabei zeigt sich, daß die doppelt-diffusiven Prozesse selbst unterschiedliche Prozessabläufe beinhalten, die jeweils gesondert betrachtet werden müssen.

In Kapitel 4 werden die durchgeführten Simulationen dargestellt. Der Modellaufbau und die Ausgangssituationen werden festgelegt und die in der Literatur gängigen Größen erklärt. Die Beschreibung der durchgeführten Simulationen endet schließlich in einer Parametrisierung mit der die effektive Diffusion in Abhängigkeit der Stabilität ermittelt werden kann.

Kapitel 5 gibt eine Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse aus Kapitel 4 wieder. Außerdem werden noch offene Fragen besprochen und weitere mögliche Arbeiten für die Zukunft beschrieben.

1 Einleitung

Arons et al. [2] beschrieben 1956 ein bis dahin unbekanntes Phänomen: Wird ein langes Rohr (~ 2000 m) in den Ozean hinabgelassen und tiefes salzarmes Wasser langsam nach oben gepumpt, so fließt nach Abschalten der Pumpe das Wasser weiter. Dieses Verhalten begründet sich darin, daß sich das tiefe und salzarme Wasser an die Umgebungstemperatur entlang der Röhre anpasst, während der Salzgehalt nicht ausgeglichen werden kann. Durch das ständige Erwärmen behält das Wasser innerhalb der Röhre seinen Auftrieb und bildet ein sich selbst erhaltendes System.

Durch Stern [78] wurde dies in Zusammenhang mit doppelt-diffusiven Prozessen gebracht. Stern erkannte, daß die Röhre für den Transport nicht zwingend notwendig war. Einzig der Unterschied zwischen den beiden molekularen Diffusionskoeffizienten von Temperatur und Salzgehalt war ausschlaggebend, um das von Arons et al. [2] beschriebene Phänomen zu erzeugen.

Die vertikalen Temperatur- und Salzgehaltsflüsse (F_T und F_S), die entgegen der stabilen Dichteschichtung aufgrund der doppelt-diffusiven Prozesse einsetzen, werden hier untersucht. Daraus resultieren die (später beschriebenen) effektiven Diffusionskoeffizienten von Temperatur K_T und Salzgehalt K_S , die mehrere Größenordnungen über den entsprechenden molekularen Diffusionskoeffizienten liegen. Die effektiven Diffusionskoeffizienten beschreiben die doppelt-diffusive Eigenschaft in einer Grenzschicht zwischen zwei stabilen thermohalinen Stufen.

1.1 Definition der doppelt-diffusiven Prozesse

Doppelt-diffusive Prozesse treten auf, sobald zwei Flüssigkeiten mit unterschiedlichen Eigenschaften (z.B. zwei gelöste Stoffe mit unterschiedlichen molekularen Diffusionskoeffizienten) zu einer stabilen Schichtung zusammengeführt werden. Im Ozean wird dieser Prozess durch die molekulare Diffusion von Temperatur T und Salzgehalt S gesteuert. Die molekularen Diffusionskoeffizienten κ_T und κ_S unterscheiden sich dabei um zwei Größenordnungen, mit $\kappa_T \approx 1.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{sec} \gg \kappa_S \approx 1.4 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{sec}$.

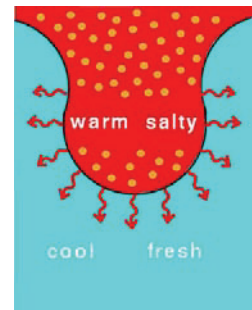
Definition 1.1. 1. Warmes, salzreiches Wasser liegt über kälterem, salzärmerem Wasser. Diese Schichtung definiert den Anfangszustand zur Bildung von **Salzfingern**, $\partial_z \rho(t=0, z) < 0$ (Dichte nimmt nach unten hin zu). Der Temperaturgradient stabilisiert das System ($\partial_z T > 0$), während der Salzgehaltsgradient ($\partial_z S > 0$) destabilisierend wirkt.

2. Kaltes, salzarmes Wasser liegt über wärmerem, salzreicherem Wasser. Dieser Anfangszustand kann zur **Semikonvektion**¹ führen. Es ist $\partial_z \rho(t = 0, z) < 0$ (Dichte nimmt nach unten hin zu). Während der Salzgehaltsgradient ($\partial_z S < 0$) stabilisierend wirkt, ist der Temperaturgradient ($\partial_z T < 0$) destabilisierend.
3. Warmes, salzarmes Wasser liegt über kälterem, salzreicherem Wasser. Diese Form der Schichtung ist an sich stabil ($\partial_z \rho(t = 0, z) < 0$) und wird hier **diffusives Regime**² genannt. Vertikaler Austausch findet durch doppelt-diffusive Prozesse nur direkt an der Grenzschicht oder durch aktives Vermischen (turbulenter Austausch) statt.
4. Kaltes, salzreiches Wasser überlagert wärmeres, salzärmeres Wasser. Die Schichtung dieses **konvektiven Regimes** ist grundsätzlich instabil. Durch die Schwerkraft vermischen sich die Schichten konvektiv, $\partial_z \rho(t = 0, z) > 0$ (Dichte nimmt nach unten hin ab). Doppelt-diffusive Prozesse spielen bei dieser Anordnung keine Rolle.

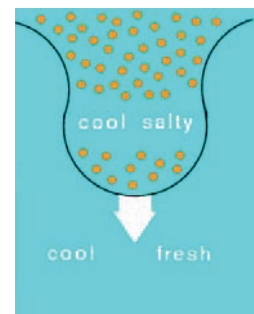
1.1.1 Regime der Salzfinger

Das Regime, in dem die Salzfinger gebildet werden, tritt – wie in Definition 1.1 festgelegt wurde – auf, sobald die Komponente mit der geringeren molekularen Diffusion destabilisierend wirkt, während die schneller diffundierende Komponente die Schichtung stabilisiert.

An der Grenzschicht zwischen zwei geschichteten Flüssigkeiten (warmes, salzreiches Wasser über kaltem, salzarmem Wasser) tritt aufgrund des größeren Diffusionskoeffizienten der Temperatur eine Destabilisierung ein. Dabei ist es unerheblich, ob der Anfangszustand ein lineares Profil aufweist oder zwei separate Schichten mit unterschiedlicher Temperatur und Salzgehalt gewählt wurden. Warme und salzreiche Fluidelemente (Abbildung 1.1(a)) werden durch die Diffusion von Temperatur schwerer, als umgebende Fluidelemente (Abbildung 1.1(b)). Infolge dessen sinken einzelne salzreiche Fluidelemente ab, während gleichzeitig die daneben liegenden kälteren und salzarmen Zellen durch die hinzugewonnene Wärme leichter werden und aufsteigen. Der Salzgehalt innerhalb der auf- und absteigenden Zellen bleibt, aufgrund der weitaus geringeren Diffusion des Salzgehaltes, nahezu unberührt. Dies führt dazu, daß die Zellen, die einmal zur Auf- bzw. Abwärtsbewegung angeregt wurden, durch



(a) Wärmeverlust durch Diffusion von Temperatur



(b) Absinken des „erkalteten“ Salzingers

Abbildung 1.1: Schematische Darstellung eines Salzingers, Merryfield [46]

¹auch doppelt-diffusive Konvektion genannt

²Gargett [17] bezeichnete diesen Zustand auch als „differentielle Diffusion“, ein Vermischungsprozess kann nur mit Hilfe äußerer Einflüsse entstehen, z.B. durch auftretende Wirbel in der Dichteschichtung, Gezeitenwellen, geschichtete (turbulente) Strömungen, etc.

die molekulare Diffusion von Temperatur weiter auf- bzw. absteigen. Die Größe der entstehenden Struktur beträgt je nach Stabilität der Schichtung nur wenige Zentimeter (bis etwa 10 cm Breite) (Stern [78]).

Durch diesen Prozess entstehen in der Grenzschicht im Idealfall vertikale Spalten auf- bzw. abwärtsgerichteter Temperatur- und Salzgehaltsflüsse, die als Salzfinger bezeichnet werden. Erreichen die Salzfinger eine Zone mit gleichen umgebenden Dichteverhältnissen, so erhalten die Auf- und Abwärtsbewegungen keine neue Energie aus der Umgebung und werden durch die Viskosität und Diffusion von Temperatur und Salzgehalt gedämpft.

Die auftretenden möglichen Szenarien sind dabei:

1) Fingerstrukturen, die das gesamte Gebiet durchziehen: Durch die unterschiedlichen Diffusivitäten wird ein Gleichgewicht zwischen den Temperatur- und Salzgehaltsgradienten erzeugt. Abbildung 1.2 zeigt Salzfinger bei unterschiedlicher Stabilität³ R_ρ^f . Dabei wird nur ein Teilgebiet einer Grenzschicht im Übergang zweier thermohaliner Stufen betrachtet. Dies dient zum Ermitteln der vertikalen Temperatur- und Salzgehaltsflüsse zwischen den in der Regel stabilen Schichten. Dieses Szenario wurde in der Vergangenheit schon (eingeschränkt) durch Direkte Numerische Simulationen beschrieben und soll auch hier beschrieben werden.

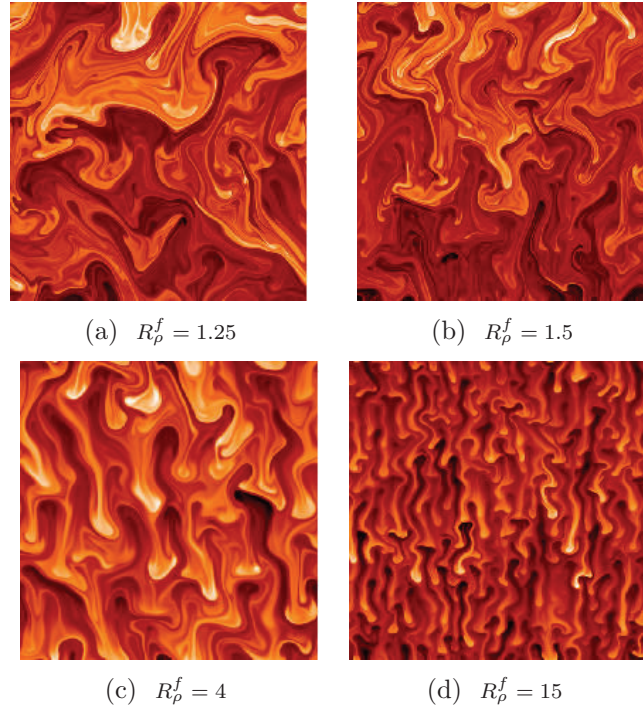


Abbildung 1.2: Salzfinger mit geringer Stabilität R_ρ^f (oben) und hoher Stabilität (unten) der Dichteschichtung. Quelle: Merryfield [46, 51]

2) Salzfinger, die die Schichten vermischen und eine Stufe in Temperatur und Salzgehalt bilden (eine Situation, die aufgrund beschränkter Rechnerkapazität allgemein nicht realisiert werden konnte): In diesem Fall tritt nach einer Wachstumsphase der Salzfinger eine Vermischung ein. Eine neue Schicht entsteht, an deren oberen und unteren Rändern die Salzfinger weiterhin existieren. Schwächere Schichten lösen sich auf und gehen in eine neue Vermischungsphase über. Dieser Prozess hält so lange an, bis das ganze Gebiet mit stabilen Treppenstufen durchsetzt ist (Radko [60, 61]). Hierzu ist jedoch ein weitaus größeres Gebiet notwendig, damit die entstehenden Treppenstufen aufgelöst werden können. Technisch ist dies mit direkten Numerischen Simulationen nicht durchführbar und beschränkt sich auf Modelle, in denen die mutmaßlich entstehen-

³Das Stabilitätsverhältnis ist definiert durch $R_\rho^f = \frac{\alpha \partial_z T}{\beta \partial_z S}$, wobei α und β den thermalen Ausdehnungs-, bzw. salinen Kontraktionskoeffizienten darstellen, siehe Anhang A.4.

den Flüsse von Temperatur und Salzgehalt in bereits parametrisierter Form enthalten sind.

1.1.2 Regime der doppelt-diffusiven Konvektion / Semikonvektion

Im Vergleich zu Salz fingern sind Temperatur und Salzgehalt bei der Semikonvektion genau umgekehrt geschichtet. Damit sind die Auswirkungen der Diffusion von Temperatur und Salzgehalt ebenfalls vertauscht. Die Semikonvektion kann jedoch nicht als „inverser Salzfingerfall“ angesehen werden, sondern bildet eine eigenständige Situation, die gesondert betrachtet werden muß.

Während die Salzgehaltskomponente stabilisierend auf das System wirkt, wird durch Diffusion der Temperaturkomponente eine Destabilisierung der Grenzschicht angeregt. Jedoch reicht eine Störung in der Temperaturkomponente im Allgemeinen nicht aus, um die Bildung von ausgeprägten Fingerstrukturen in Gang zu setzen. Die entstandenen absinkenden Strukturen erhalten durch die Aufnahme von Wärme aus der Umgebung wieder Energie und steigen auf. Dieser Prozess erzeugt eine anders geartete Struktur als im Salzfingerfall. Der Stabilitätsbereich, in dem eine Vermischung durch Semikonvektion stattfindet, ist sehr viel kleiner als bei den Salz fingern. Dies gestaltet die Beschreibung und Modellierung der Semikonvektion ungleich schwieriger.

Theoretisch wurde die Semikonvektion kurz nach (Wieder-) Entdeckung der Salzfinger von Veronis [88], Huppert und Moore [28] beschrieben. Numerische Simulationsreihen wurden bisher nur für den astrophysikalischen Bereich durchgeführt (vergleiche Abschnitt 2.4) und fehlen bisher für den ozeanographischen Parameterbereich.

1.1.3 Diffusiver und konvektiver Fall

Das diffusive Regime wird als passives Regime betrachtet. Im Gegensatz zu den Salz fingern oder der Semikonvektion ist diese Situation gegenüber doppelt-diffusiven Prozessen stabil geschichtet. Tritt jedoch eine von außen zugeführte Störung auf (z.B. eine horizontal geschichtete (turbulente) Strömung), so bietet sich an den Übergängen der einzelnen gestörten Schichten zusätzlich die Möglichkeit einer Destabilisierung durch einen diffusiven Prozess (Gargett [17]). In arktischen Regionen beispielsweise lassen die Profile von Temperatur und Salzgehalt erkennen, daß sowohl Salzfinger (tiefe Schichten), als auch Semikonvektion (obere Schichten) möglich sind. Dazwischen existiert ein schmaler Übergangsbereich, der das diffusive Regime begünstigt. Bei den in Abschnitt 4.3 durchgeführten Simulationen wurde ein Wechsel vom Salzfingerregime zu einem diffusiven Regime beobachtet.

Das konvektive Regime hingegen ist bei der Betrachtung doppelt-diffusiver Prozesse nur von geringem Interesse. Eine Destabilisierung der Grenzschicht ist allein durch die Schwerkraft bedingt, was direkt ein konvektives Vermischen zur Folge hat. Sobald durch Konvektion die vorhandene Schichtung „verrührt“ wurde und die Grenzflächen der Filamente ausreichend groß sind, wird durch molekulare Diffusion eine Homogenisierung

bewirkt. Jedoch erzeugen doppelt-diffusive Prozesse in diesem Fall keine Konvektion, wie dies bei den Salz fingern beobachtet wurde.

1.2 Kurze Motivation doppelt-diffusiver Prozesse

Durch die molekulare Diffusion von Temperatur oder Salzgehalt ist eine sehr große Zeitskala t , mit

$$t \sim \frac{H^2}{\kappa_\chi}, \quad \text{für } \chi = T, S \quad (1.1)$$

verbunden, wobei H (m) die Höhe der zu durchdringenden Schicht und κ_χ die molekulare Diffusion darstellt. Die Veränderung einer (z.B. im Ozean beobachteten) stabilen Grenzschicht wird dadurch mehrere Jahre andauern und wäre praktisch nicht zu beobachten. Von äußeren Einflüssen abgesehen stellen Salzfinger und Semikonvektion die beiden einzigen Situationen / Prozessabläufe dar, die in der Lage sind, in einer (in Ruhe befindlichen) stabilen Schichtung entgegen der stabilisierenden Komponente Temperatur- und Salzgehaltsflüsse zu erzeugen. Dabei werden die Flüsse der molekularen Diffusion, die diesen Prozessablauf erzeugen, weit überschritten. Abhängig von der Stabilität einer zugrunde liegenden Schichtung ergeben diese (nicht-linearen) Prozesse eine effektive Diffusion mit signifikanten Auswirkungen auf die Entwicklung von Grenzschichten. Gerade weil $\kappa_T \gg \kappa_S$ folgt effektiv $K_T < K_S$, was die bestehende Ausgangslage ohne Kenntnis doppelt-diffusiver Prozesse dramatisch verändert.

Der gesamte (kleinskalige) doppelt-diffusive Prozess wird durch eine effektive Diffusion wiedergegeben. Die Kenntnis dieser effektiven Diffusion, z.B. durch eine Funktion der Stabilität, kann gängigen Ozeanmodellen einen neuen Anstoß geben.

1.3 Zielsetzung

Das Hauptziel dieser Arbeit war die Ermittlung der effektiven Diffusion von Temperatur K_T und Salzgehalt K_S im Salzfingerfall. Gewonnen werden diese aus den Flüssen von Temperatur und Salzgehalt, die durch doppelt-diffusive Prozesse angetrieben werden.

Mit Hilfe des vom Massachusetts Institute of Technology entwickelten Ozeanmodells MITgcm [1] wurden die doppelt-diffusiven Prozesse in hochaufgelösten Simulationsreihen realisiert. Dabei wurde ein Teilgebiet (bis 25 cm) einer stabilen Grenzschicht zwischen zwei thermohalinen Treppenstufen dargestellt. Durch Direkte Numerische Simulationen (DNS) wurden neben den Flüssen auch die Strukturen der Salzfinger ermittelt, die in der Regel eine Größe von wenigen Zentimetern aufwiesen.

Mit Hilfe der ermittelten effektiven Diffusion von Temperatur und Salzgehalt sind Rückschlüsse auf Parametrisierungen der Flüsse an den Grenzschichten (Gebiet zwischen zwei thermohalinen Treppenstufen) möglich. Eine Parametrisierung erfolgte in Abhängigkeit der Stabilität. Die effektive Diffusion wird mit bestehenden Studien verglichen. Dabei werden verschiedene Ansätze aus der Literatur überprüft.

Wie weit der Unterschied zwischen der molekularen Diffusion von Temperatur und Salzgehalt in den entstehenden Flüssen eine Rolle spielt, wird unter anderem in Abschnitt 4.3 geklärt. Daneben kann durch die Simulationsreihe aus jenem Abschnitt die Struktur der Salzfinger sehr genau wiedergegeben werden.

2 Rückblick auf bisherige Arbeiten und Motivation von Salzfingern

Im folgenden Kapitel wird ein Überblick bisheriger Untersuchungen zu Salzfingern gegeben. Nach ersten Tankexperimenten wurde durch Meßkampagnen, in Regionen die alle Voraussetzungen für die Bildung von Salzfingern aufweisen, der Einfluß doppelt-diffusiver Prozesse belegt. Numerische Simulationen belegen schließlich diesen sehr wichtigen Prozess und ermöglichen die Untersuchung eines breiten Parameterbereiches.

2.1 Situation im Ozean. Was macht die Salzfinger so interessant?

Um 1960 wurden von Stern [78] die Salzfinger durch lineare Theorie beschrieben. Obwohl die Salzfinger in den anfänglichen Beschreibungen nur als Randerscheinung angesehen waren, wurde dennoch schnell die Bedeutung dieser Entdeckung für großskalige Ereignisse klar. Dabei stellte Stern die horizontale Wellenlänge der am schnellsten anwachsenden Instabilität vor, welche allgemein als die Breite d eines Salzfingers¹ (bei Rayleighzahl $Ra_T = 1$) bekannt wurde. Nur wenig später wurde von Veronis [88] die doppelt-diffusive Konvektion (Semikonvektion) mit Hilfe von linearer Theorie beschrieben. Beide Autoren gelangten später zu der Ansicht, daß diese Prozesse in der Lage sind, einen meßbaren Einfluß auf die vorhandene Schichtung auszuüben.

Die Situation, die Stern [78] erläutert, tritt im offenen Ozean am häufigsten auf. Hingegen vermutete Veronis [88], daß die doppelt-diffusive Konvektion hauptsächlich in Küstenregionen anzutreffen sei, wo z.B. durch Gezeiten warmes, salzreiches Wasser unter kaltes, salzarmes Wasser geschichtet werden kann. Aus den gemessenen Profilen von Temperatur und Salzgehalt wurde jedoch ersichtlich, daß die Bedingungen für die Semikonvektion auch im tiefen Ozean und in arktischen Regionen vorliegen (Kelly et al. [31], Merryfield [49]). Eine von Stern formulierte Hypothese, daß die Umverteilung des Salzgehaltes (z.B. Schichtbildung) innerhalb weniger Tage durch die Salzfinger erreicht wird, ist durch Beobachtungen (bzw. Meßreihen) bisher nicht bestätigt worden. Andere Effekte (ausgelöst z.B. durch Niederschlag, Verdunstung, Gezeiten, interne Wellen, etc.) können die Salzfinger teilweise überlagern und damit den vertikalen Salzgehaltstransport massiv beeinflussen. Veronis war daher der Meinung, daß die Bildung von Stufen

¹ $d = \left(\frac{\nu \kappa_T}{g \alpha \partial_z T} \right)^{1/4}$, wobei ν die kinematische Viskosität, g die Erdbeschleunigung, α der thermale Ausdehnungskoeffizient und $\partial_z T$ der mittlere Temperaturgradient zwischen zwei Schichten ist.

in dieser Situation auch ohne die Salzfinger erklärt werden könnte.

Als Turner [85] im Zusammenhang mit den Salz fingern das vier-drittel Flußgesetz² für den vertikalen Salzgehaltsfluß F_S mit Hilfe von Tankexperimenten im Labor beschrieb, konnte erstmals der Salzgehaltsfluß durch die Salzfinger abgeschätzt werden. Dies kann als die erste Parametrisierung der (effektiven) Salzgehaltsflüsse angesehen werden. Dieses Prinzip ist seither eine gebräuchliche Beschreibung der entstehenden Flüsse in den Grenzschichten.

Den Salzgehaltsfluß berechnete Turner durch

$$F_S \approx C (\Delta S)^{4/3}, \quad (\text{A.89})$$

wobei ΔS den mittleren Unterschied im Salzgehalt zweier Schichten darstellte. $C = \left(\frac{g\kappa_T^3}{\nu^2}\right)^{1/3}$ war dabei eine Konstante. Dieses Gesetz gibt in einer ersten Näherung den Salzgehaltsfluß durch die Salzfinger wieder. Der im Salzgehaltsfluß auftretende Fehler war laut Stern [79] maximal in Größenordnung der Prandtlzahl $\sigma^{2/3}$. Spätere Betrachtungen der Flüsse von Temperatur und Salzgehalt zwischen den einzelnen stabilen Schichten, die mit Hilfe der **C-SALT** Kampagne von 1985 (siehe Seite 10) bestimmt wurden, ergaben jedoch, daß der gemessene Salzgehaltsfluß etwa um den Faktor 30 größer war, als das vier-drittel Flußgesetz von Turner vorhersagte (Kunze [34]). Dieser Fehler wurde auf die unterschiedlichen Bedingungen bei den Tankexperimenten und bei den Meßreihen im Ozean zurückgeführt.

Zwar erwies sich das vier-drittel Flußgesetz als sehr praktikabel, die zugehörige Konstante C wurde in späteren Simulationsreihen jedoch sehr unterschiedlich beschrieben (z.B. Özgökmen et al. [56], Radko und Stern [63], Shen [72]). Es zeigte sich, daß C keine universelle Konstante war, sondern für jeden Fall gesondert ausgedrückt werden mußte, z.B. als Funktion der Stabilität, Viskosität, Lewiszahl, etc. Mittlerweile wurden verschiedene Versionen des vier-drittel Flußgesetzes beschrieben (z.B. von Huppert und Moore [28], Özgökmen et al. [56], Shen [73, 74] und Radko [60, 61]) und an die jeweiligen Situationen angepasst.

Stern [79] beschrieb als erster, daß die Bildung von thermohalinen Treppenstufen ebenfalls durch das Auftreten einer „kollektiven Instabilität“ möglich sein konnte. Stern fand heraus, daß diese eintritt, sobald der abwärtsgerichtete Dichtetransport den negativen Auftrieb übersteigt. Dadurch wird eine (turbulente) Vermischung ausgelöst, die zu einer thermohalinen Schichtbildung führen kann. Holyer [24] konnte die von Stern [78, 79] erzielten Resultate reproduzieren und verfeinerte die von Stern [79] aufgestellte Bedingung zur „kollektiven Instabilität“, mit

$$\text{St} := \frac{\beta F_S - \alpha F_T}{\nu(\alpha T_z - \beta S_z)} \geq \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{im 2D-Fall} \\ \frac{2}{3} & \text{im 3D-Fall} \end{cases}$$

²Für diffusive Flüsse allgemein geht dieses Gesetz auf Batchelor [4] zurück, wurde jedoch erst von Turner [85] für die Salzfinger beschrieben.

Dabei sind F_T und F_S die vertikalen Temperatur- und Salzgehaltsflüsse, α, β der thermale Ausdehnungs-, bzw. saline Kontraktionskoeffizient, T_z und S_z die Temperatur- bzw. Salzgehaltsgradienten der Hintergrundsichtung und ν die kinematische Viskosität. Dieses Verhältnis wurde später als die Sternzahl St definiert.

Die Sternzahl wurde anhand von Meßreihen belegt und durch theoretische Untersuchungen weiter gestützt. Stern [79] berichtet z.B. von einer auftretenden Oszillation, die zu großskaliger Konvektion führte, welche größer war als durch die Salzfinger selbst möglich gewesen wäre. Die Unsicherheit im Umgang mit der Sternzahl lag darin, daß andere Prozesse, wie z.B. eine Zick-Zack Instabilität³ im Dichteprofil oder horizontale Gradienten von Temperatur und Salzgehalt, ebenso eine Rolle spielten und sich unter bestimmten Umständen schneller als die „kollektive Instabilität“ entwickelten. Dies ließ sich nur umgehen, indem die Anfangssituation sorgfältig gewählt wurde. Für einen geringen Stabilitätsumfang ($1 \leq R_\rho^f \leq 1,5$) wurden Werte von $St \approx 5$ festgestellt (McDougall und Taylor [43]). Von sehr viel größeren Sternzahlen ($St \sim 50$) berichteten Merryfield und Grindler [51]. Man ging ebenfalls davon aus, daß eine eindimensionale Instabilität (Kerstein [32]) die Treppenstufen erzeugen kann, was als eine direkte Folge der von Stern [79] beschriebenen „kollektiven Instabilität“ aufgefaßt wurde.

Da zwischen zwei stabilen Treppenstufen kein Stofftransport stattfindet, z.B. durch laminare oder turbulente Strömung, stellen die Salzfinger eine Möglichkeit dar, wie der Austausch von Salzgehalt durch die Grenzschicht hindurch erklärt werden kann (Laurent und Schmitt [39], Zodiatis und Gasparini [94]). Aufgrund der vielen verschiedenen Erklärungsansätze konnte der Einfluß der doppelt-diffusiven Prozesse auf die Bildung der thermohalinen Stufen bislang nicht genau abgegrenzt werden. Bisher konnte nicht geklärt werden, welcher Prozeß die Dicke der Grenzschichten und die Höhe der Treppenstufen genau steuert (Kunze [36], Radko [61]).

In der Vergangenheit wurde der Effekt von doppelt-diffusiven Prozessen zwar kontrovers diskutiert (z.B. Veronis [88]), mittlerweile wird jedoch der Einfluß von Salzfingern auf thermohaline Treppenstufen auf breiter Basis akzeptiert.

2.2 Meßreihen zur Entstehung thermohaliner Treppenstufen

Etwa 20 Jahre nach der ersten Beschreibung durch Stern [78] konnte die Bedeutung der Salzfinger, wie auch der Semikonvektion, für großskalige Phänomene belegt werden. Aufgrund verschiedener Tankexperimente (z.B. Griffiths und Ruddick [22], Huppert [27], McDougall und Taylor [43], Stern und Turner [81], Taylor und Bucens [84], Turner [85]) geht man davon aus, daß die Salzfinger an der Bildung thermohaliner Treppenstufen

³Eine Zick-Zack Instabilität entsteht an der Grenzschicht durch die unterschiedliche molekulare Diffusion von Temperatur und Salzgehalt in der Vertikalen ein Zick-Zack Profil der Dichteanomalien. Im oberen Teil des Zick-Zacks entsteht eine Region mit dichterem Flüssigkeit, während im unteren Teil durch die Wärmeaufnahme die Dichte abnimmt. Das Zick-Zack Profil setzt sich durch die Vertikale fort und kann lokale Mikrostrukturschichtungen erzeugen.

beteiligt sind. Diese Treppenstufen zeichnen sich durch Bereiche mit einer homogenen Temperatur- und Salzgehaltsverteilung aus, die durch „scharfe“ Grenzschichten mit nahezu konstanten Temperatur- und Salzgehaltsgradienten getrennt sind. Es wurden meh-

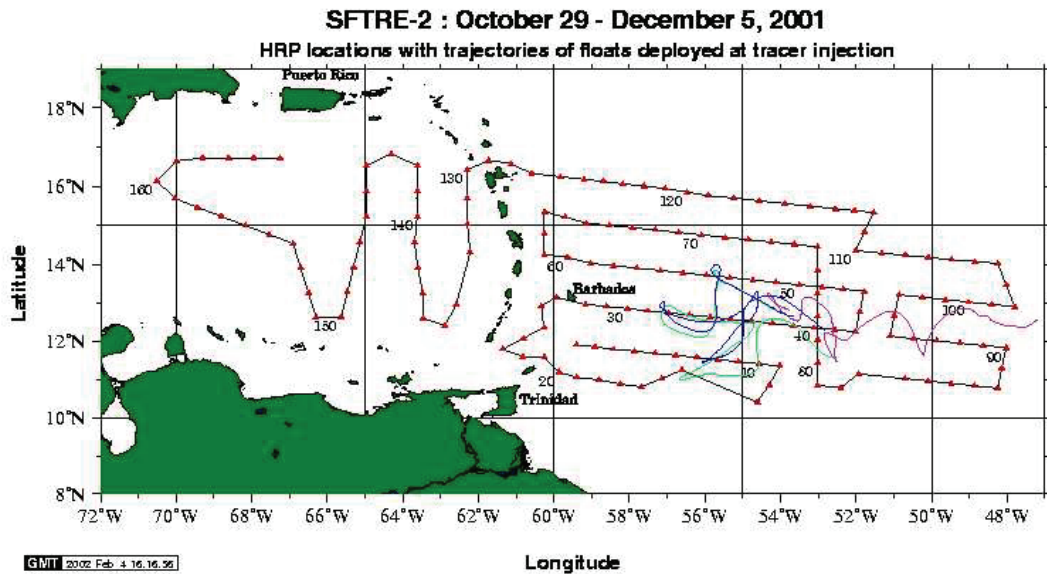


Abbildung 2.1: Fahrtroute während des Saltfinger Tracer Release Experiments (SFTRE) 2001 im Karibischen Meer östlich von Barbados. Die Messungen (rote Punkte) wurden mit Hilfe hochempfindlicher Meßgeräte, dem High Resolution Profiler (HRP), durchgeführt. Eine nähere Beschreibung der Meßkampagnen findet sich bei Polzin et al. [59].

rere Meßreihen im Nordatlantik durchgeführt, um dem Einfluß der doppelt-diffusiven Prozesse und dem Entstehungsprozeß der thermohalinen Treppenstufen auf den Grund zu gehen. Gleichzeitig wurden die Temperatur- und Salzgehaltsflüsse zwischen den einzelnen Schichten ermittelt. Die wichtigsten Meßreihen hierzu sind:

a) C-SALT: Die „Carribean-Sheets and Layers Transect“ Meßreihe im Frühjahr und Herbst 1985, östlich von Barbados. Hier wurde hauptsächlich die thermohaline Schichtbildung für den Fall untersucht, daß die vorhandene Schichtung die Bildung von Salz fingern unterstützt. Dabei wurden mehrere thermohaline Schichten mit einer vertikalen Ausdehnung von 5 bis 30 m gefunden. Einige der Grenzschichten, welche die thermohalinen Stufen jeweils voneinander trennten, variierten in der Größe von 1 bis 10 m. Die Dicke der Grenzschichten, die mutmaßlich durch die Salzfinger bestimmt wurde, lag bei etwa 20 bis 50 cm. Der Temperaturunterschied zwischen zwei Stufen betrug $\Delta T \approx 0,5 - 0,8^\circ\text{C}$, während der Salzgehaltsunterschied mit $\Delta S \approx 0,1 - 0,2$ gemessen wurde. Die Stufenbildung konnte nur für ein Stabilitätsverhältnis $R_\rho^f \leq 1,7$ nachgewiesen werden. Es sind bislang keine Schichten mit viel größerer Stabilität bekannt. Der vertikale Salzgehaltstransport durch die Salzfinger war auf die Grenzschichten beschränkt und trug zur Erhaltung der Treppenstufen bei (Schmitt et al. [71], Marmorino et al. [41]).

b) NATRE: Das „North Atlantic Tracer Release Experiment“ 1992 bis 1994, bei dem eine Kontrollsubstanz (Schwefelhexafluorid SF_6 , welches ähnliche molekulare Diffu-

sionseigenschaften wie Meersalz aufweist und leicht nachweisbar ist) in eine stabile Schicht eingebracht wurde. Die anschließende Ausbreitung konnte über mehrere Monate hinweg gemessen werden. Die dabei beobachteten Treppenstufen hatten eine vertikale Ausdehnung von 10 bis 30 m und waren ebenfalls durch eine relativ dünne Grenzschicht (0,5 – 5 m) voneinander getrennt (Schmitt [70], Merryfield [45]).

c) SFTRE: Das „Salt Finger Tracer Release Experiment“ Teil 1 und 2 [59] wurde 2001 durchgeführt. Die Salzfingeraktivität (bzw. die resultierenden Flüsse von Temperatur und Salzgehalt) wurde durch hochaufgelöste Profile nachgewiesen. Die Ergebnisse bestätigen die allgemeine Annahme, daß die Salzfinger einen Einfluß auf die thermohalinen Treppenstufen ausüben. Die jeweils im Frühjahr (Teil 1) und Herbst (Teil 2) durchgeführten Meßreihen zeigten, daß die Treppenstufen halbjährlichen Schwankungen unterlagen. Anhand der Fahrtroute (Abbildung 2.1) läßt sich eines der weitläufigen Gebiete erkennen, in denen thermohaline Treppenstufen entstanden und eine starke Salzfingeraktivität nachgewiesen werden konnte. Abbildung 2.2 zeigt ein solches Profil von Temperatur (rot) und Salzgehalt (blau) einer Treppenstufe während dieser Meßkampagne.

Bei diesen vorgestellten Meßreihen wurden Regionen im Nordatlantik gefunden, in denen alle Voraussetzungen für Salzfinger gegeben waren. Die festgestellten Flüsse, bzw. die effektive Diffusion, stellen eine Grundlage zum Vergleich der hier durch Simulation (vergleiche Abschnitt 4.2) ermittelten Flüsse von Temperatur und Salzgehalt dar.

Weitere Beobachtungen im Ozean und Semikonvektion

Im Ozean wurden die thermohalinen Treppenstufen westlich der Straße von Gibraltar (Tait und Howe [82]), in der Adria an der Po Mündung (Carniel et al. [13]) und wie schon vorgestellt im Westteil der Karibik (Schmitt [70]) beobachtet. Anhand der **C-SALT**, **NATRE** und **SFTRE** Meßreihen konnten thermohaline Treppenstufen im westlichen Atlantik näher auf Salzfingeraktivität untersucht werden.

Im Tyrrhenischen Meer konnten Treppenstufen mit einer Stufengröße bis etwa 300 m beobachtet werden, die damit zu den größten gemessenen und langlebigsten Stufen (mehrere Jahre) überhaupt zählen (Zodiatis und Gasparini [94]).

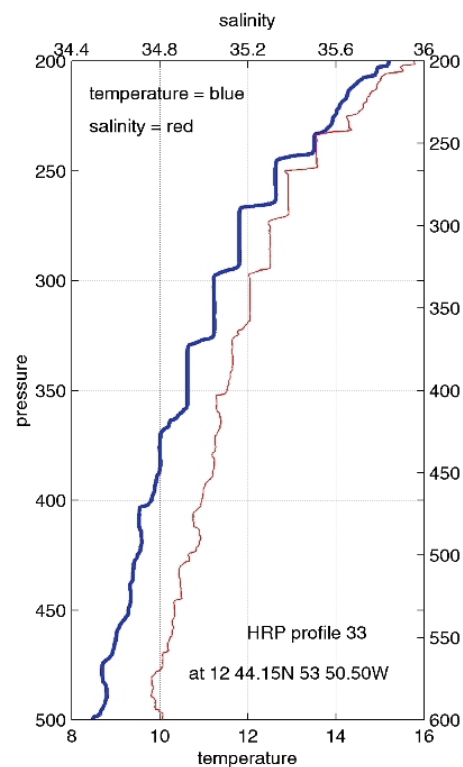


Abbildung 2.2: Treppenstufen von Temperatur bzw. Salzgehalt. Aufgezeichnet während des SFTRE 2001 ca. 500 nautische Meilen östlich von Barbados auf Position $\varphi = 12^{\circ}44,15'N$ und $\lambda = 053^{\circ}50,5'W$. Die thermohalinen Treppenstufen sind in einer Tiefe von etwa 225 bis 350 m anzutreffen. Das Profil findet sich auf der Webseite [59] wieder.

Der Einfluß von Salz fingern in Schichten mit sehr geringem Stabilitätsverhältnis ($R_\rho^f \approx 1,3$) wurde in der Region zwischen Brasilien und den Falklandinseln von Bianchi et al. [5] dokumentiert. Dabei wurden die vertikalen Salzgehaltsflüsse zwischen den auftretenden thermohalinen Schichten durch Salzfinger, bzw. Semikonvektion beschrieben. Die mit Hilfe von Laborexperimenten ermittelten Salzgehaltsflüsse aus der Semikonvektion in den tieferen Schichten lagen um etwa zwei Größenordnungen über den Salzgehaltsflüssen, welche durch Salzfinger erzeugt wurden.

Im Gegensatz zu den Salz fingern die hauptsächlich in tropischen Regionen anzutreffen sind, findet die Semikonvektion vor allem im tiefen Ozean und in arktischen Regionen statt. Die bekannten Regionen wurden von Kelly et al. [31] zusammengestellt und zeigen das Gegenstück der Salzfinger, die sich in sehr viel kleineren Stufengrößen (0,5 – 5 m) wiederfinden.

Aufgrund ihrer kleinskaligen Struktur (Fingergröße beträgt nur wenige Zentimeter) konnten die Salzfinger im Ozean bisher nicht direkt beobachtet werden. Zwar wurde der Versuch unternommen anhand optischer Mikrostrukturmeßgeräten die Salzfinger zu beobachten (Kunze et al. [37]), jedoch wurden Salzfinger nicht mit letzter Sicherheit festgestellt. Es konnten nur homogene Strukturen innerhalb einer Treppenstufe und inhomogene Strukturen, die auf Salzfinger hinweisen, innerhalb einer Grenzschicht ermittelt werden. Es ist nicht bekannt, ob bei diesen Aufnahmen, durch die frei absinkende Photoapparatur auch (oder hauptsächlich) Verwirbelungen beobachtet wurden, die die Salzfinger überlagerten.

Aus diesem Grund sind Laborexperimente (z.B. Turner [85], McDougall und Taylor [43], u.a.) und vor allem numerische Simulationen, die im Folgenden beschrieben werden, notwendig. Mit Hilfe von numerischen Simulationen lassen sich die durch doppelt-diffusive Prozesse entstandenen Flüsse von Temperatur und Salzgehalt sehr genau ermitteln und geben eine Grundlage für Parametrisierungen der effektiven Diffusion.

2.3 Numerische Simulationen von Salz fingern

Die Durchführung numerischer Simulationen von doppelt-diffusiven Prozessen ist ein wichtiges Mittel zur Untersuchung von Salz fingern und der Entstehung vertikaler Temperatur- und Salzgehaltsflüsse. Numerische Untersuchungen der Semikonvektion wurden im ozeanographischen Fall noch nicht durchgeführt, so daß in dieser Klasse von doppelt-diffusiven Prozessen bislang nur einige Laborexperimente die entstehenden Flüsse belegen.

Allerdings gibt es Untersuchungen zur Schichtbildung in der Astrophysik (z.B. Merrifield [47]), die diesen Prozeß in Sternen zweifelsfrei belegen. Die Verknüpfung doppelt-diffusiver Prozesse zwischen Astrophysik und Ozean wurde von Canuto [9], Canuto et al. [10, 11, 12] ausführlich beschrieben. Aufgrund der langen Zeitskala bei der Semikonvektion im Stern ($\sim 10^6$ Jahre) ist nicht bekannt wie signifikant dieser Prozess auf die Schichtbildung tatsächlich ist.

Die Skala der Salzfinger ist auf nur wenige Zentimeter (0,5 – 5 cm) beschränkt. Dies

bedingt ein entsprechend feines Gitter, um die Salzfinger darstellen zu können. Andererseits sind die thermohalinen Stufen mit etwa 50 – 100 m zu groß, um mit direkten numerischen Methoden (DNS) mit der selben Auflösung wie die Salzfinger dargestellt werden zu können.

Bei der numerischen Simulation stellt auch die Lewiszahl $\tau = \frac{\kappa_S}{\kappa_T} \approx 0,01$ eine Herausforderung dar. Um den doppelt-diffusiven Prozess korrekt wiedergeben zu können, muß das Verhältnis der molekularen Diffusionskoeffizienten von Salzgehalt und Temperatur aufgelöst werden. Dies führt zwangsläufig zu einer sehr hohen Gitterauflösung verbunden mit einem großen Rechenaufwand. Viele der bekannten Arbeiten nahmen aus diesem Grund eine geringere Lewiszahl in Kauf, um die Ergebnisse nicht durch eine unzureichend aufgelöste Lewiszahl zu verfälschen (Gargett [17]).

Für verschiedene Parameter (R_ρ , τ , etc.) läßt sich durch Simulation eine Gesetzmäßigkeit der effektiven Diffusion von Temperatur und Salzgehalt ermitteln, die durch ein grobes Gitter nicht wiedergegeben wird. Die Parametrisierung der Temperatur- und Salzgehaltsflüsse ermöglicht schließlich einen Brückenschlag von Direkten Numerischen Simulationen (DNS) hin zu großen Skalen mit Gitterweiten von mehreren Metern.

Arbeiten zur Modellierung von Salz fingern wurden von Yoshida und Nagashima [93], Piacsec und Toomre [58], Shen [72, 73, 74], Shen und Veronis [75], Merryfield [48], Merryfield und Grinder [51], Özgökmen et al. [56] und Whitfield et al. [92] durchgeführt. Tabelle 2.1 stellt einen kurzen Überblick dieser Simulationen dar. Die ersten numerischen Simulationen von Salz fingern wurden von Piacsec und Toomre [58] mit Hilfe eines Zwei-Schichten Modells durchgeführt. Dabei wurde ein Gebiet von nur wenigen Zentimetern ($1,25 \times 2,5 \text{ cm}^2$) betrachtet. Die entstehenden Finger erreichten dabei eine Fingerbreite von etwa 0,5 cm. Durch die geringe Gebietsgröße war die Ausbreitung der Salzfinger massiv begrenzt. Für das Flußverhältnis γ zwischen den Temperatur- und Salzgehaltsflüssen (F_T und F_S)

$$\gamma = \frac{\alpha F_T}{\beta F_S} \quad (\text{A.82})$$

ergaben sich dabei die Werte

$$\gamma \approx 0,21 - 0,37 \quad \text{bei} \quad R_\rho^f = 3 - 7$$

Die Gesetzmäßigkeit zwischen dem Stabilitätsverhältnis R_ρ^f und dem Verhältnis der Flüsse war dabei

$$\gamma(R_\rho^f) = f(R_\rho^f) + \gamma_0, \quad (2.1)$$

wobei γ_0 eine Konstante und f eine lineare Funktion ist, die von der Stabilität R_ρ^f abhängt. Hieraus ergab sich ein stetiges Anwachsen von γ mit zunehmender Stabilität. Das ermittelte Flußverhältnis zeigte, daß der vertikale Salzgehaltsfluß über dem Temperaturfluß lag.

Trotz vieler numerischer Studien konnte im Falle der Salzfinger eine Schichtbildung nur von Özgökmen et al. [56] und mit einer 3D-Simulation von Stellmach et al. [77] gezeigt werden. Die Resultate von Radko [60] hingegen wiesen sehr instabile Schichten auf, die sich ständig weiter entwickelten.

	σ	τ	R_ρ^f	Ra_T	Schichten
Piacsec und Toomre [58]	6, 8	0, 01	3; 5; 7	10^6	2
Whitfield et al. [92]	3; 10	0, 1; 1/3; 0, 5	1, 1 - 2, 5	k.A.	lin
Shen [72]	1; 2	0, 1; 0, 5	2	$1, 5 - 6, 2 \times 10^2$	2
Shen [73]	7	0, 01	1, 2- 4	$1, 2 - 4 \times 10^7$	2
Shen [74]	7	0, 01	2 - 8	$1, 33 \times 10^7$	lin
Özgökmen et al. [56]	100	1/30	1, 6	6×10^7	lin
Merryfield [48]	100	1/30	1, 6	6×10^7	2, lin
Nagashima et al. [54]	7	1/100	3, 7	k.A.	2

Tabelle 2.1: Überblick zu den Salz fingersimulationen aus Yoshida und Nagashima [93]. Prandtlzahl σ , Lewiszahl τ , Stabilitätsverhältnis R_ρ^f und Rayleighzahl Ra_T . Die Schichtungen werden im einzelnen mit 2 für ein Zwei-Schichten Modell, bzw. mit lin für ein linear geschichtetes Modell angegeben.

Die Simulationen von Özgökmen et al. [56] wurden mit verschiedenen Bedingungen an die oberen und unteren Gebietsränder in Temperatur und Salzgehalt durchgeführt, was nur in einem Fall zu einer Schichtbildung führte. Das mittlere Flußverhältnis γ lag bei $\gamma \approx 0, 55$ mit $R_\rho^f = 1, 6$ und damit nahe an dem von Schmitt [66, 65] ($\gamma \approx 0, 58$ für $2, 5 < R_\rho^f < 4$ und $\gamma \approx 0, 3$ für $6 < R_\rho^f$) oder von Kunze [34] gemessenen Laborwert um $\gamma \approx 0, 6$. Stern [80] bestimmte hingegen ein geringes Flußverhältnis von $\gamma \approx 0, 25$, was deutlich unter den bisher vorgestellten Werten liegt. Diese Bandbreite des Flußverhältnisses zeigt zum einen die Unsicherheit bei der Modellierung von Salz fingern und gibt andererseits auch einen Eindruck davon, wie unverständlich die doppelt-diffusiven Regime und die Größe der auftretenden Füsse bislang sind.

Eine der wenigen drei-dimensionalen Simulationen wurde von Nagashima et al. [54], mit den selben Bedingungen an die Gebietsränder wie bei Piacsec und Toomre [58], aufgesetzt. Die dabei verwendete Gittergröße von 64^3 Gitterpunkten stellte ein Gebiet von $1, 25 \times 1, 25 \times 5$ cm dar. In den durchgeführten drei Simulationen wurde jeweils ein Stabilitätsverhältnis von $R_\rho^f \approx 7$ gewählt, während die Temperatur- und Salzgehaltsgradienten variiert wurden.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \Delta T &= 4, 4^\circ C & \Delta S &= 0, 3 \\
 (2) \quad \Delta T &= 35, 2^\circ C & \Delta S &= 2, 4 \\
 (3) \quad \Delta T &= 70, 4^\circ C & \Delta S &= 4, 8
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Das Flußgesetz wurde durch

$$g\beta F_S = C_1 \kappa_T^{1/3} (g\beta \Delta S)^{4/3} \tag{2.3}$$

beschrieben, wobei $C_1 = 0,04 + 0,327 R_\rho^{-1,91}$ mit $R_\rho = \alpha\Delta T/\beta\Delta S$ ermittelt wurde. Die vertikalen Flüsse der numerischen Simulation wurden mit Laborexperimenten verglichen und sind in Tabelle 2.2 aufgeführt.

	num. Experiment	Labor Experiment	ΔS
(1)	$1,2 \times 10^{-3}$	$1,14 \times 10^{-3}$	0,3
(2)	$1,9 \times 10^{-2}$	$1,83 \times 10^{-2}$	2,4
(3)	$4,4 \times 10^{-2}$	$4,61 \times 10^{-2}$	4,8

Tabelle 2.2: Vergleich der vertikalen Flüsse $g\beta F_S$ aus Simulation und Experiment von Nagashima et al. [54]. Die Flüsse sind in metrischen Einheiten wiedergegeben.

Abgesehen davon, daß im einzelnen die verwendeten Gradienten weit über den im Ozean ermittelten (bis Faktor 100) liegen, gibt diese Simulationsreihe zumindest einen Einblick in die Struktur drei-dimensionaler Salzfinger wieder. Die typische Pilzform der Fingerspitzen findet sich ebenfalls bei zwei-dimensionalen Fingern wieder.

Als Folge der **C-SALT** Meßreihen wurden die ersten Parametrisierungen und Ansätze der thermohalinen Schichtbildung beschrieben. Der Einfluß der Salzfinger auf eine vorgegebene stabile Schichtung ist durch Laborexperimente und numerische Simulationen nunmehr zweifelsfrei belegt. Die numerischen Untersuchungen stützten die bei den Meßreihen ermittelten Temperatur- bzw. Salzgehaltsflüsse und konnten auch – in sehr wenigen Fällen (Özgökmen et al. [56], Radko [60] und Stellmach et al. [77]) – die Schichtbildung durch doppelt-diffusive Prozesse belegen.

Ein interessanter Effekt auf die Zirkulation in einem Teilgebiet des Ozeans wurde von Gargett und Holloway [18] vorgestellt und ist ein weiterer Hinweis für den Einfluß der Salzfinger auf globale Prozesse. Dabei wurden zwei verschiedene Ausgangssituationen durch Parametrisierung der doppelt-diffusiven Prozesse – und deren mutmaßlich entstehenden effektiven Salzgehaltsflüsse – beschrieben:

- a) Eine Parametrisierung der effektiven Diffusion $K \sim K_0 N^2$, die mit der Brunt-Väisälä Frequenz N skaliert wurde. Zusammen mit der „effektiven“ Lewiszahl $\mathcal{T} = \frac{K_S}{K_T} = 1$, so daß Temperatur- und Salzgehaltsdiffusion gleich groß waren.
- b) Beschreibung der durch Salzfinger induzierten vertikalen Flüsse, so daß die effektive Diffusion jeweils für Temperatur K_T und Salzgehalt K_S bestimmt wurden. Dabei wurden verschiedene Verhältnisse der beiden effektiven Diffusionskoeffizienten von Temperatur und Salzgehalt (effektive Lewiszahl) $\mathcal{T} = \frac{K_S}{K_T} \in [\frac{1}{2}, 2]$ verwendet.

Es stellte sich heraus, daß die Beschreibung durch b) einen weitaus größeren Einfluß auf den vertikalen Dichtefluß als bei a) hatte. Je größer \mathcal{T} gewählt wurde, desto geringer war die modellierte Umwälzbewegung. Dies bedeutet, daß der vertikale Stoffaustausch nicht durch einen turbulenten Transport erklärt werden kann, sondern auf diffusive Prozesse, wie z.B. Salzfinger, zwischen den entstehenden Treppenstufen angewiesen ist. Diese

bemerkenswerte Feststellung blieb lange unbeachtet, zeigte jedoch den gravierenden Einfluß der Salzfinger auf den vertikalen Transport. In einem „realen“ Ozean sind jedoch noch weitere Prozesse beteiligt, auf die nicht näher eingegangen wurde.

Merryfield et al. [53], Merryfield [48] verwendete zur Beschreibung der effektiven Diffusion von Temperatur und Salzgehalt die konkrete Formel

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{\gamma}{R_\rho} K_S \quad \text{m}^2/\text{sec} \\ K_S &= C \frac{1 - \tau R_\rho}{R_\rho - \gamma} \quad \text{m}^2/\text{sec} \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei das Flußverhältnis von Temperatur zu Salzgehalt allgemein mit $\gamma \approx 0,6$ ermittelt wurde. Die Herleitung dieser Formel wurde in Anhang A.3 skizziert. Durch numerische Simulationen konnte die Größe $C = 0,17 \times 10^{-4}$ bestimmt werden (Merryfield et al. [53], Merryfield [48, 49]). Dabei wurden in Abhängigkeit der Stabilität Werte von $K_S \approx 4$ bis $7 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}$ und $K_T \approx 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}$ vorgestellt. Dies führte zu Werten, die mit Schmitt [70] vergleichbar waren.

Die Studien von Merryfield zeigten auch, daß die effektiven Diffusionskoeffizienten K_T und K_S stark voneinander abweichen und sich nicht durch eine universelle Diffusionskonstante ersetzen lassen. Nur in einer sehr turbulenten (z.B. instabil geschichteten) Situation ist die Annahme von $K_T = K_S$ berechtigt.

Merryfield [48] beschrieb zwei weitere Situationen, die neben „kollektiver Instabilität“ eine Schichtbildung zur Folge haben können.

- Das Auftreten von negativer-Dichte-Diffusion. Während die Temperatur- und Salzgehaltsflüsse abwärts gerichtet sind, ist der vertikale Dichtefluß aufwärts gerichtet. Die durch den abwärtsgerichteten Salzgehaltstransport abgegebene potentielle Energie muß dabei größer sein als die benötigte Energie, um die Temperatur aufwärts befördern zu können. Durch diesen Prozessablauf werden die entstehenden Strukturen eher verstärkt als durch die diffusiven Prozesse geglättet. Im Zusammenhang mit den Salz fingern könnte dieser Prozess die thermohalinen Treppenstufen erhalten und weiter fördern, wie Merryfield in Simulationen nachweisen konnte.
- Merryfield stellte die Hypothese auf, daß die Bildung neuer Treppenstufen auch von doppelt-diffusiven, fingerähnlichen Eindringungen hervorgerufen werden könnte. Durch Holyer [25] wurde bereits gezeigt, daß diese doppelt-diffusiven Eindringungen durch mittlere horizontale Gradienten in Temperatur und Salzgehalt erzeugt werden können, welche dann wiederum Einfluß auf die vertikalen Gradienten haben. Ausschlaggebend ist dabei die Neigung der eindringenden Struktur zu den Isopyknen.

Radko [60] beschrieb später verschiedene theoretische Ansätze, mit denen die Bildung der thermohalinen Treppenstufen oder zumindest deren Stabilisierung erklärt werden

konnte. Dabei greift Radko auch auf die von Merryfield [48] beschriebenen Theorien zurück. Der dimensionslose Temperatur- und Salzgehaltsfluß wurde durch die Nusseltzahl von Temperatur Nu_T (dimensionsloser Fluß) und das Flußverhältnis skaliert. Um den Salzgehaltsfluß einbinden zu können, verwendete Radko ein vier-drittel Flußgesetz von Turner mit

$$\beta F_S = C_S(R_\rho^f)(\beta\Delta S)^{4/3}, \quad (2.5)$$

wobei β der saline Kontraktionskoeffizient war, C_S von der Stabilität der jeweiligen Schichtung abhing und ΔS den Salzgehaltsunterschied zwischen jeweils zwei Schichten darstellte. Für die Simulation wurden lineare Hintergrundgradienten in Temperatur und Salzgehalt verwendet. Die oberen und unteren Gebietsränder waren periodisch in der Form, daß die Fluktuationen von Temperatur und Salzgehalt zwischen den oberen und unteren Gebietsrändern ausgetauscht wurden. Damit sollte eine von den Rändern unabhängige Entwicklung der Schichten gewährleistet werden.

Die Schichten, die Radko dabei erzeugte, waren nicht stabil, sondern vermischten sich ständig neu. Eine Instabilität von γ und die kurzzeitige Ausbildung von Schichten wurde für $R_\rho^f \leq 2$ beobachtet. Dies deckt sich mit den Beobachtungen von **C-SALT** (Entstehung von Schichten für $R_\rho \leq 1, 7$). Die Erzeugung einer zeitlich stabilen Schicht durch die Salzfinger gelang Radko erst später, zusammen mit Stellmach et al. [77].

Um den von Salz fingern erzeugten Transport zwischen Schichten und innerhalb einer Grenzschicht besser darstellen zu können, wandelte Radko [61] das vier-drittel Flußgesetz ab und erstellte für den Temperaturfluß ein verallgemeinertes Gesetz

$${}^{\text{layer}}F_T = C_L \frac{\Delta T_L}{H} Ra_\rho^a \quad \text{bei Treppenstufen} \quad (2.6)$$

$${}^{\text{interf}}F_T = C(R_\rho^f)(\Delta T)^b \quad \text{für Grenzschichten} \quad (2.7)$$

wobei C_L eine Konstante, ΔT_L die Temperaturdifferenz der gesamten Schicht, H die Schichthöhe, C eine vom Stabilitätsverhältnis R_ρ^f abhängige Funktion und Ra_ρ die Rayleighzahl der Dichte war. Die Exponenten a und b stellten zu ermittelnde Zahlen dar.

Die bisher vorgestellten Arbeiten belegen den Einfluß von doppelt-diffusiven Prozessen wie Salzfinger oder Semikonvektion auf großskalige Prozesse und machen deutlich, daß dieses Phänomen weiter untersucht werden muß. Die bisher ermittelten effektive Diffusion aus den bekannten Studien variieren je nach Stabilität der vorgegebenen Schichtung und aufgrund verschiedener Ansätze. Direkte Numerische Simulationen sind ein unverzichtbares Mittel zur weiteren Untersuchung doppelt-diffusiver Prozesse.

2.3.1 Zeitskala der Salzfinger und Einordnung der Simulationen

In den hier durchgeführten Simulationen (Abschnitt 4.2 und 4.3) benötigen die Salzfinger etwa 20 bis 60 Minuten um zu einem Gleichgewicht aus der vorgegebenen Schichtung

zu gelangen, bei dem die Temperatur- und Salzgehaltsflüsse ein konstantes Niveau erreichen. Die ermittelte effektive Diffusion und Flüsse von Temperatur und Salzgehalt sind jedoch zu gering, um eine Stufengröße mit Ausdehnungen wie z.B. im Tyrrenischen Meer (~ 300 m) zu erreichen. Dieser Vorgang kann typischerweise mehrere Jahre in Anspruch nehmen (Radko [61]). Es liegt daher sehr nahe, daß noch weitere Vermischungsprozesse an der Schichtbildung beteiligt sind. Gezeitenwellen beispielsweise, die in Küstenregionen effektiv zur Vermischung beitragen, benötigen etwa sechs Stunden für einen Zyklus (ausgehend von einer $M2$ Gezeit) und überlagern dadurch die Salzfinger regelmäßig. Es kann nicht klar abgegrenzt werden, in welchem Maße die Salzfinger trotz ihrer ihrer kurzen Lebensdauer /Entstehungszeit, oder gerade deswegen, Einfluß auf die Stabilität einer vorhandenen Schichtung im Ozean nehmen, oder diese erzeugen. Da die Entstehung von Salz fingern jedoch im Vergleich zu anderen Ereignissen sehr schnell abläuft, darf der Einfluß trotz ihrer kleinskaligen Ursache nicht vernachlässigt werden.

Zwar bietet die Anwendung von Direkten Numerischen Simulationen (DNS) die Möglichkeit alle entstehenden Strukturen beschreiben zu können, gleichzeitig werden jedoch enge Grenzen gesetzt. So ist aufgrund der nötigen hohen Auflösung die Simulation von Salz fingern auf räumlich und zeitlich kleine Gebiete beschränkt. Das Bindeglied zwischen der Simulation von kleinskaligen Salz fingern und der Simulation mit einer letztendlich stabilen Schichtbildung ist noch immer ein unerreichtes Ziel.

2.4 Weitere relevante doppelt-diffusive Systeme

In anderen Systemen, z.B. schweren ${}^3\text{He}$ -Sternen, sind Helium und Temperatur für den Ablauf der doppelt-diffusiven Prozesse verantwortlich. Die Bezeichnung „Salzfinger“ geht dabei auf die Situation im Ozean zurück und beschreibt lediglich den Prozessablauf. In anderen physikalischen Bereichen wurde diese Bezeichnung übernommen, unabhängig von der stofflichen Zusammensetzung.

Seit der ersten Beschreibung durch Stern [78] wurden doppelt-diffusive Systeme in weiteren Bereichen betrachtet, wie z.B.

- in der Astrophysik. Der Austausch von Helium und Wasserstoff findet am Rand der Kernschicht eines Sterns wie der Sonne statt, wo Wasserstoff zu Helium fusioniert wird. Mit Hilfe der doppelt-diffusiven Prozesse kann die Brennstoffzufuhr des Sterns erklärt werden. Siess [76] beschäftigte sich mit dem Aufbau von superschweren Sternen, deren Kern bereits zu Kohlenstoff verbrannt wurde und der weitere Brennstoffaustausch in der Kernschale durch Semikonvektion stattfindet. Weitere Arbeiten zu doppelt-diffusiven Prozessen sind z.B. von Gerkema et al. [21], Chabrier und Baraffe [14], Charbonnel und Zahn [15], Weiss [91] und Weiss et al. [90] veröffentlicht worden. Nur wenige Simulationen, die eine Schichtbildung durch Semikonvektion zur Folge hatten, konnten durchgeführt werden (Merryfield [47] und Biello [6]). Ein wenig beachteter Prozess sind dabei die Salzfinger, die auf Ausnahmesituationen beschränkt bleiben.

- in der Geophysik, wie Schmitt [67] oder Huppert und Turner [29] beschrieben. Auftretende doppelt-diffusive Prozesse im Magma lassen sich z.B. anhand erkalteter Magmaablagerungen nachweisen.
- bei der Legierung von Metallen entstehen durch Fingerbildung inhomogene Strukturen, die zu Rissbildung und Instabilität des Materials führen können.
- beim Befüllen oder Umkippen eines Flüssiggastanks. Dort können diese Prozesse einen unkontrollierten Drucksanstieg verursachen (Turner [86]).
- bei der Schadstoffentsorgung im Ozean, wo durch den Mechanismus der „Salzfinger“ längst entsorgt geglaubte Schadstoffe wieder an die Oberfläche treten (Huppert und Turner [29]).
- bei abschmelzenden Eisbergen (McPhee et al. [44]).
- beim vertikalen Nährstoffaustausch im Ozean (Oschlies et al. [55]).
- in Binnenseen (von Rohden et al. [89]). Bei den sogenannten CO₂-Seen (z.B. Kivu See in Rwanda oder der Nyos und Manoun See in Kamerun), wo CO₂ und Methangase durch vulkanische Aktivität ständig eingebracht werden, sorgen unter anderem doppelt-diffusive Prozesse für eine stabile Schichtung. Durch eine Störung der Schichtung (z.B. Erdbeben, etc.) kann das gespeicherte CO₂ schlagartig freigesetzt werden (Schmid et al. [64]).

3 Mathematische Grundlagen

Die lineare Theorie für die Salzfinger und die Semikonvektion wird in Anlehnung an Stern [78], Veronis [88], Baines und Gill [3] und Holyer [24] wiedergegeben. Dadurch lassen sich die Regime der Salzfinger und der Semikonvektion in verschiedene Klassen einteilen. Diese Einteilung wird am Ende dieses Abschnitts verfeinert.

Die Details sind in Anhang A.1 ausgeführt.

3.1 Grundgleichungen von Salz fingern und doppelt-diffusiver Konvektion

Als Grundlage dient die boussinesq-approximierte Navier–Stokes Gleichung (z.B. Vallis [87])

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (3.1)$$

zusammen mit der Temperatur- und Salzgleichung

$$\partial_t T + \mathbf{u}(\nabla T) = \kappa_T \nabla^2 T \quad (3.2)$$

$$\partial_t S + \mathbf{u}(\nabla S) = \kappa_S \nabla^2 S \quad (3.3)$$

und der Divergenzfreiheit

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

wobei $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, ($g = 9,81 \text{m/sec}^2$), P der Druck und \mathbf{u} die Geschwindigkeit sind. Die kinematische Viskosität ν , die Diffusionskoeffizienten von Temperatur κ_T und Salzgehalt κ_S sind dämpfende skalare Größen. Die Dichte und Referenzdichte werden mit ρ , bzw. ρ_0 angegeben.

Für die Zustandsgleichung der Dichte wird

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)) \quad (3.5)$$

verwendet, wobei $\alpha = -\frac{1}{\rho} \partial_T \rho$ den Ausdehnungskoeffizient von Temperatur und $\beta = \frac{1}{\rho} \partial_S \rho$ den Kontraktionskoeffizient für den Salzgehalt darstellen. ρ_0 , T_0 und S_0 sind Referenzwerte.

Bei der Linearisierung von T , S und \mathbf{u} durch

$$\mathbf{u}(t, \vec{x}) = \langle \mathbf{u} \rangle_h(z) + \mathbf{u}'(t, \vec{x}) \quad (3.6)$$

$$T(t, \vec{x}) = \langle T \rangle_h(z) + T'(t, \vec{x}) \quad (3.7)$$

$$S(t, \vec{x}) = \langle S \rangle_h(z) + S'(t, \vec{x}) \quad (3.8)$$

wird eine lineare Schichtung zugrunde gelegt, mit $\partial_z \langle \chi \rangle_h(z) = \text{konst.}$ für $\chi = T, S$, wobei $\langle \cdot \rangle_h$ das horizontale Mittel wiedergibt. Eine Lösung der Gleichungen ergibt sich mit Hilfe eines allgemeinen Lösungsansatzes (siehe Anhang A.1).

3.1.1 Linearisierte Gleichungen des 2D-Fall:

Für den zwei-dimensionalen Fall folgt

$$\left(\frac{1}{\sigma} \lambda + a^2 \right) \frac{a^2}{k^2} (\lambda + a^2) (\lambda + \tau a^2) = -Ra_T (\lambda + \tau a^2) + Ra_S (\lambda + a^2) \quad (3.9)$$

Ra_T und Ra_S sind die Rayleighzahlen von Temperatur und Salzgehalt

$$Ra_T = \frac{g \alpha l^4 T_z}{\nu \kappa_T} \quad \text{und} \quad Ra_S = \frac{g \beta l^4 S_z}{\nu \kappa_T} \quad (3.10)$$

dabei ist l die charakteristische Längenskala, T_z und S_z sind die konstanten Gradienten der Hintergrundschichtung. λ bezeichnet die Wachstumsrate der Instabilität und k die horizontale und m die vertikale Wellenzahl, mit $a^2 = k^2 + m^2$.

Das aus Gleichung (3.9) erhaltene Polynom von dritter Ordnung $\Lambda(\lambda)$, mit

$$\Lambda(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 \xi + \lambda \eta + \delta = 0 \quad (3.11)$$

mit den Bedingungen

$$\xi = (1 + \tau + \sigma) a^2$$

$$\eta = a^4 (\tau + \sigma + \tau \sigma) + \frac{k^2}{a^2} (Ra_T - Ra_S) \sigma \quad (3.12)$$

$$\delta = a^6 \tau \sigma + k^2 (\tau Ra_T - Ra_S) \sigma \quad (3.13)$$

besitzt reelle oder reelle und imaginäre/konjugierte Lösungen in λ .

Im Vergleich zu Definition 1.1 lassen sich anhand der verschiedenen Lösungen von Gleichung (3.9) sich die Regime der Salzfinger und Semikonvektion exakt einteilen.

Für $\lambda = \lambda_{re} + i \lambda_{im}$ folgt allgemein als Instabilitätsgrenze im Fall $\lambda = 0$

$$\frac{1}{\tau} Ra_S = Ra_T + \frac{a^6}{k^2} \quad (3.14)$$

Die kritische Rayleighzahl für Temperatur wird durch

$$Ra_{krit} = Ra_S \frac{1}{\tau} - \frac{a^6}{k^2} \quad (3.15)$$

definiert.

Für den Fall $\lambda_{re} = 0$ ergibt sich für die beiden imaginären Lösungen λ_{im} und λ_{im}^* die Bedingung

$$\begin{aligned} Ra_S &= Ra_T \frac{1 + \sigma}{\tau + \sigma} + \frac{a^6 (1 + \sigma)(1 + \tau)}{k^2 \sigma} \\ \left(\text{bzw. } Ra_T &= Ra_S \frac{\tau + \sigma}{1 + \sigma} + \frac{a^6 (\tau + 1)(\sigma + \tau)}{k^2 \sigma} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2 Unterschiede zwischen Salz fingern und Semikonvektion

Die beiden Regime Salzfinger und Semikonvektion werden getrennt voneinander betrachtet. Die Einteilung wird durch die Rayleighzahlen vorgenommen, wie Abbildung 3.1 schematisch verdeutlicht. Somit läßt sich die allgemein gehaltene Definition 1.1 genauer spezifizieren. Dabei lassen sich sowohl Salzfinger, als auch Semikonvektion in stabile und instabile Regionen unterteilen. Die Grenze liegt bei $Ra_T = Ra_S$. Die Stabilität einer vorhandenen Schichtung wird durch das Stabilitätsverhältnis wiedergegeben. Im Salzfingerfall ist dieses definiert durch

$$R_\rho^f = \frac{\alpha \partial_z \langle T \rangle_h}{\beta \partial_z \langle S \rangle_h} = \frac{Ra_T}{Ra_S} \quad (3.17)$$

und bei der Semikonvektion durch

$$R_\rho^s = \frac{\beta \partial_z \langle S \rangle_h}{\alpha \partial_z \langle T \rangle_h} = \frac{Ra_S}{Ra_T}. \quad (3.18)$$

Im jeweiligen Fall wird durch $R_\rho^f, R_\rho^s \geq 1$ eine stabile Dichteschichtung angezeigt. Stabil meint dabei, daß die Dichte im Anfangsstadium nach oben hin abnimmt. Erst im fortlaufenden Entwicklungsprozess findet eine Destabilisierung des Systems durch die doppelt-diffusiven Prozesse statt.

Für die einzelnen Fälle gilt damit:

$$\text{Salzfinger, stabil:} \quad 0 \leq Ra_S \leq Ra_T \quad (3.19)$$

$$\text{Salzfinger, instabil:} \quad 0 \leq Ra_T \leq Ra_S \quad (3.20)$$

$$\text{Semikonvektion, stabil:} \quad Ra_S \leq Ra_T \leq 0 \quad (3.21)$$

$$\text{Semikonvektion, instabil:} \quad Ra_T \leq Ra_S \leq 0 \quad (3.22)$$

$$\text{diffuses Regime:} \quad Ra_S \leq 0 \leq Ra_T \quad (3.23)$$

$$\text{konvektives Regime:} \quad Ra_T \leq 0 \leq Ra_S \quad (3.24)$$

Die Salzfinger und Semikonvektion werden im Folgenden weiter spezialisiert.

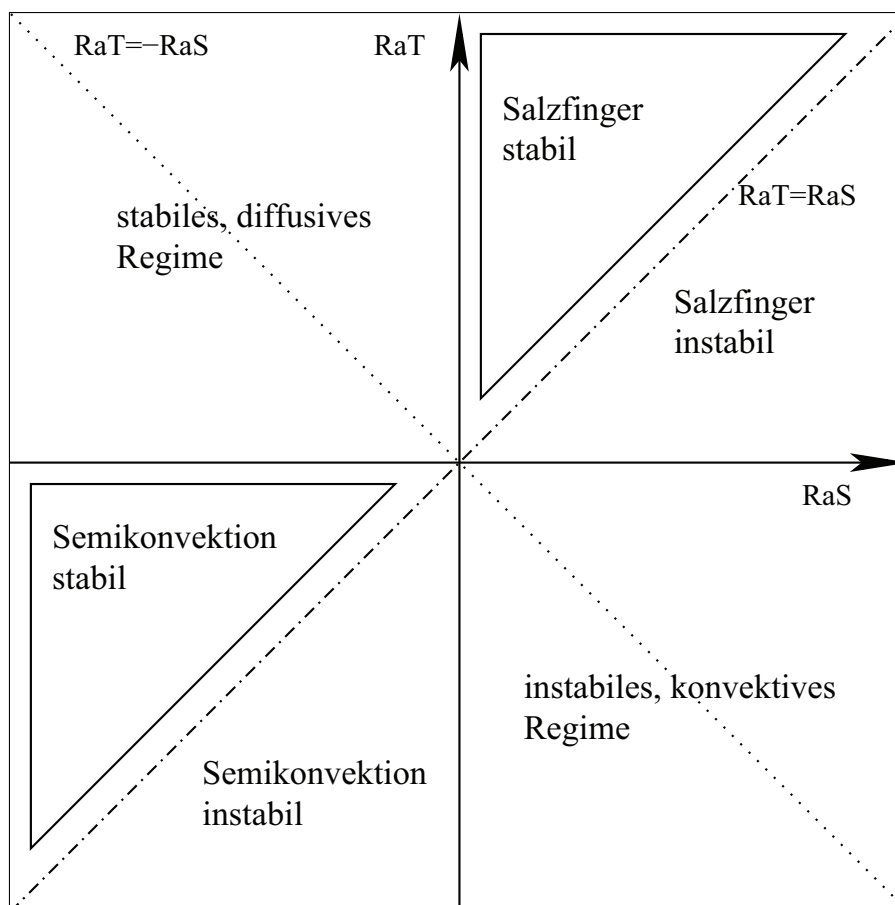


Abbildung 3.1: Schematisches Diagramm der Rayleighzahlen Ra_T und Ra_S . Aufteilung der verschiedenen doppelt-diffusiven Regime. **Oben links:** stabiles Regime. Vermischung nur an Grenzschichten, Schichtung bleibt stabil. **Oben rechts:** Salzfinger-Regime, mit stabiler, $Ra_T \geq Ra_S$, (Instabilität durch Diffusion) und instabiler, $Ra_T \leq Ra_S$, (direkter Übergang zu Konvektion) Schichtung. **Unten links:** Regime der Semikonvektion (auch doppelt-diffusive Konvektion genannt). **Unten rechts:** instabiles, konvektives Regime. Doppelt-diffusive Prozesse sind hier vernachlässigbar.

3.2.1 Der Salzfingerfall

Aus Gleichung (3.11) folgt, daß eine weitere Einschränkung an den Salzfingerfall gestellt werden muß, damit eine reelle Lösung $\Lambda(\lambda) = 0$ existiert (z.B. Holyer [24]). Nach Bedingung (3.19) für den Salzfingerfall gilt

$$Ra_T - Ra_S \geq 0. \quad (3.25)$$

Gleichung (3.9) stellt die Bedingung

$$\tau Ra_T - Ra_S \geq 0, \quad (3.26)$$

damit eine reelle Lösung existieren kann. Somit folgt für die Stabilität

$$1 \leq R_\rho^f < \frac{1}{\tau}, \quad (3.27)$$

3.2.2 Semikonvektion

Ausgehend von der stabilen Semikonvektion (Bedingung (3.21)) folgt aus Gleichung

$$\begin{aligned}
 (Ra_T - R_\rho^s Ra_T \frac{\tau + \sigma}{1 + \sigma}) &= -\frac{a^6}{k^2} \left(\frac{\tau}{\sigma} + 1\right)(1 + \tau) \\
 \Rightarrow R_\rho^s &\leq \left(\underbrace{\frac{\frac{a^6}{k^2} (1 + \tau) \frac{1}{\sigma}}{Ra_T}}_{\ll 1 \text{ f\"ur turb. Fall}} + \frac{1}{\tau + \sigma} \right) (1 + \sigma) \\
 &\approx \frac{1 + \sigma}{\tau + \sigma}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Diese Bedingung stellt eine obere Schranke an die Stabilität dar, bis zu der die Instabilität ein reelles Wachstum besitzt. Stabilitätsverhältnisse, die weit größer sind als Gleichung (3.28), erlauben keine Destabilisierung der Grenzschicht, die zu Konvektion von Temperatur und Salzgehalt führt.

3.2.3 Einteilung der Regime nach linearer Theorie

Aus der linearen Theorie (z.B. nach Baines und Gill [3] oder Holyer [25], Stern [78, 79], Veronis [88]) folgt mit Hilfe der Rayleighzahlen von Temperatur Ra_T und Salzgehalt Ra_S eine exakte Einteilung der doppelt-diffusiven Regime, insbesondere der Salzfinger und Semikonvektion. Diese Einteilung verfeinert noch einmal das in Abbildung 3.1 dargestellte Schema. Eine vollständige Charakterisierung der auftretenden doppelt-diffusiven Regime ist durch Abbildung 3.2 beschrieben und vereinigt alle auftretenden Fälle miteinander. Diese Darstellung fasst die Bedingungen an die Rayleighzahlen aus Gleichung (3.14) und Gleichung (3.2.2) folgendermaßen zusammen.

1) Salzfinger: ($0 < Ra_S \leq Ra_T$) Die punkt-gestrichelte Linie in Abbildung 3.2 bezeichnet die neutrale Stabilität $Ra_T = Ra_S$, bzw $R_\rho^f = 1$. Die Gerade von Punkt R_C nach Punkt Z ist gegeben durch

$$Ra_T = \frac{1}{\tau} Ra_S - \frac{a^6}{k^2} \tag{3.14}$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit $R_\rho^f = 1$ liegt bei

$$Ra_T = Ra_S = \frac{a^6}{k^2} \frac{\tau}{1 - \tau}$$

Die Entstehung der Salzfinger ist damit auf das Gebiet

$$0 \leq \frac{a^6}{k^2} \frac{\tau}{1 - \tau} \leq Ra_S \leq Ra_T \leq \frac{1}{\tau} Ra_S - \frac{a^6}{k^2} \tag{3.29}$$

beschränkt (schraffierte Fläche in Abbildung 3.2 mit Salzfinger bezeichnet).

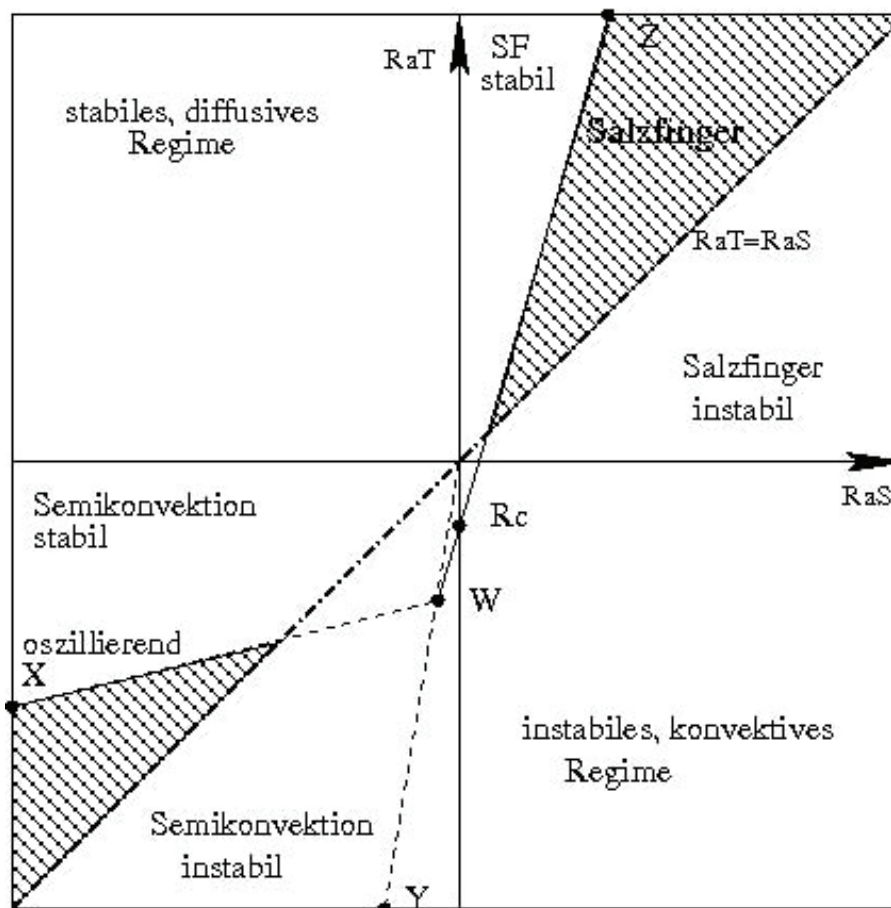


Abbildung 3.2: Einteilung von Salzfingerregime und Semikonvektion anhand der Rayleighzahlen aus linearer Theorie.

- 2) Semikonvektion:** ($Ra_S \leq Ra_T < 0$) Eine stabile Schichtung ist hier für $R_\rho^s \geq 1$ gegeben. Gleichung (3.2.2) gibt die obere Grenze der Stabilität wieder, bei der der reelle Anteil der Wachstumsrate λ verschwindet und die Schichtung trotz der doppelt-diffusiven Eigenschaft stabil bleibt. Der Punkt W in Abbildung 3.2 bezeichnet den Schnittpunkt der Geraden

$$Ra_T = \frac{1}{\tau} Ra_S - \frac{a^6}{k^2}$$

mit der Geraden (zwischen X und W)

$$Ra_T = Ra_S \frac{\tau + \sigma}{1 + \sigma} + \frac{a^6}{k^2} \frac{(\tau + 1)(\sigma + \tau)}{\sigma}$$

und ist gegeben durch

$$W = \left(-\frac{\sigma + \tau}{\sigma(1 - \tau)} \frac{a^6}{k^2}, -\frac{(\sigma + 1)\tau^2 a^6}{\sigma(1 - \tau) k^2} \right) \quad (3.30)$$

Der Schnittpunkt der Geraden zwischen X und W

$$Ra_T = Ra_S \frac{\tau + \sigma}{1 + \sigma} + \frac{a^6}{k^2} \frac{(\tau + 1)(\sigma + \tau)}{\sigma}$$

mit dem Gleichgewicht (der Hauptdiagonalen in Abbildung 3.2)

$$Ra_T = Ra_S$$

ergibt (in Abbildung 3.2 nicht bezeichnet)

$$(Ra_T^{eq}, Ra_S^{eq}) = \left(-\frac{(\tau + \sigma)(1 + \tau)(1 + \sigma)}{\sigma(1 - \tau)} \frac{a^6}{k^2}, -\frac{(\tau + \sigma)(1 + \tau)(1 + \sigma)}{\sigma(1 - \tau)} \frac{a^6}{k^2} \right)$$

Für den Bereich der Semikonvektion in dem eine aktive Vermischung stattfindet, bedeutet dies

$$Ra_T \frac{1 + \sigma}{\tau + \sigma} + \frac{a^6}{k^2} \frac{(1 + \sigma)(1 + \tau)}{\sigma} \leq Ra_S \leq Ra_T \leq Ra_S^{eq} < 0. \quad (3.31)$$

Dieser Bereich ist in Abbildung 3.2 unten links durch die schraffierte Fläche kenntlich gemacht.

3) übrige Fälle: Das diffusive Regime zeichnet sich durch eine allgemein stabile Schichtung ($Ra_S \leq 0 \leq Ra_T$) aus, die nicht durch doppelt-diffusive Prozesse destabilisiert wird.

Im Gegensatz dazu stellt der Bereich $Ra_T \leq 0 \leq Ra_S$ eine instabile Schichtung dar, bei der doppelt-diffusive Prozesse keine Rolle spielen.

Abbildung 3.2 zeigt wie unterschiedlich die beiden Regime der Salzfinger und der Semikonvektion sind. Es wird klar, daß das Stabilitätsverhältnis R_ρ^f , bzw. R_ρ^S zur Einteilung der Regime nicht mehr ausreicht, um den verschiedenartigen Abläufen von Salz fingern und Semikonvektion gerecht zu werden.

Das unterschiedliche Verhalten von Salz fingern und Semikonvektion begründet sich durch die unterschiedlichen Eigenschaften von Temperatur und Salzgehalt Während bei der Semikonvetion Temperatur die aktive Komponente (mit dem größeren molekularen Diffusionskoeffizienten) und Salzgehalt die passive Komponente (mit dem geringeren molekularen Diffusionskoeffizienten) darstellt, ist dies bei den Saltfingern umgekehrt.

Die lineare Theorie zeigt, daß eine stabile, nach unten hin zunehmende Dichteschichtung nicht zwangsläufig eine Gesamtstabilität bedeutet, sobald doppelt-diffusive Prozesse beteiligt sind. Solange keine äußeren Einflüsse vorliegen, ist die Destabilisierung einer vorhandenen stabilen Schichtung hauptsächlich durch Salzfinger sowie durch Semikonvektion bedingt.

4 Numerische Simulationen

4.1 Modellbeschreibung

Zur Simulation von Salz fingern wurde der Finite-Volumen Fortran Code MITgcm (MIT Global Circulation Model) verwendet. Die ausführliche Dokumentation zum Aufbau und der Anwendung des Codes ist unter Adcroft et al. [1] einzusehen. Mit diesem Ozeanmodell sind in hoher Auflösung sowohl die Durchführung von *Direkten Numerischen Simulationen* (**DNS**), welche hier durchgeführt wurden, so wie auch großskalige Simulationen, *Large Eddy Simulationen* (**LES**), möglich. Der Vorteil in der Verwendung dieses Ozeanmodells liegt in der breiten Anwendung, so daß die ermittelten Diffusionskoeffizienten später durch eine Parametrisierung sehr einfach hinzugefügt werden können.

Die allgemeine Schwierigkeit bei der Simulation liegt im Parameterbereich der Lewis- und Rayleighzahlen, was bereits zu Beginn erwähnt wurde. Die molekularen Diffusionskoeffizienten von Temperatur und Salzgehalt sind sehr klein. Dies erfordert aus numerischen Stabilitätsgründen ebenfalls sehr kleine Zeitschrittweiten bei der Simulation. Selbst bei sehr kleinen Modellgrößen von wenigen Zentimetern Kantenlänge führt dies zu technisch sehr aufwändigen Simulationen, damit die effektive Diffusion von Temperatur und Salzgehalt ermittelt werden kann.

4.1.1 Aufbau der Simulationen

Im folgenden Abschnitt werden die unterschiedlichen Simulationsreihen vorgestellt und die Ausgangssituationen beschrieben. Die drei durchgeführten Simulationsreihen sind im einzelnen motiviert durch

1. Salzfinger im linearen und Zwei-Schichten Modell.

Durch diese Simulationsreihe wird die effektive Diffusion von Temperatur und Salzgehalt ermittelt. Diese entstehen durch die doppelt-diffusiven Prozesse in einer schmalen Grenzschicht zwischen zwei thermohalinen Stufen. Die kleinen Skalen der doppelt-diffusiven Prozesse (die Fingergröße beträgt nur wenige Zentimeter) erfordern DNS. Andernfalls können die entstehenden Flüsse von Temperatur und Salzgehalt nicht wiedergegeben werden.

Ferner werden die hier ermittelten effektiven Diffusionskoeffizienten mit den Resultaten von Fleury und Lueck [16], Merryfield [48], Radko [60], Schmitt [70] und Shen [73] verglichen.

2. Salzfinger im Zwei-Schichten Modell mit unterschiedlichen Lewiszahlen und dem anschließenden Wechsel zum diffusiven Regime.

Die erforderliche Gitterauflösung hängt unter anderem von der Lewiszahl ab. Jedoch konnte hier gezeigt werden, daß die Lewiszahl nur einen geringen Einfluß auf die entstehenden turbulenten Flüsse hatte.

1) Vergleich von Zwei-Schichten Modell und linearer Schichtung, Effektive Diffusion der Salzfinger

Der Vergleich zwischen einem Zwei-Schichten und einem linear geschichteten Modell wurde durch die beiden Simulationen SF-layer und SF-linear beschrieben. Weitere Simulationen mit unterschiedlichem Stabilitätsverhältnis R_ρ^f wurden durchgeführt, um den Einfluß der Stabilität auf die entstehenden Salzfinger und Flüsse zu bestimmen. Die Ausgangssituation war in allen fünf Fällen ein Gebiet mit $50 \times 10 \times 150$ Gitterpunkten und einer Gitterweite von $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1,65 \times 10^{-3}$ m, was zu einer Gebietsgröße von $8,25 \times 1,65 \times 24,75$ cm³ führte.

Anfangsstabilität und Lewiszahl wurden jeweils mit

1) SF-linear, 2) SF-layer:	$R_\rho^f = 1,33$	und	$\tau = 0,1$	$\Delta S = 0,16$
3) SF-3:	$R_\rho^f = 1,06$	und	$\tau = 0,1$	$\Delta S = 0,2$
4) SF-4:	$R_\rho^f = 2,12$	und	$\tau = 0,1$	$\Delta S = 0,1$
5) SF-5:	$R_\rho^f = 2,66$	und	$\tau = 0,1$	$\Delta S = 0,08$

gewählt. Die Temperaturdifferenz ΔT zwischen dem oberen und unteren Gebietsrand betrug dabei jeweils $\Delta T = 1^\circ\text{C}$, was zu etwa acht Fingerpaaren in x-Richtung und drei Fingern in y- Richtung führte. Die entsprechende Salzgehaltsdifferenz war mit ΔS bezeichnet. SF-layer wurde als Zwei-Schichten Modell, mit einer scharfen Grenzschicht in der Gebietsmitte gewählt, während den übrigen Simulationen eine lineare Schichtung zugrunde lag.

Die molekularen Diffusionskoeffizienten von Temperatur und Salzgehalt waren $\kappa_T = 1,5 \times 10^{-7}$ m²/sec und $\kappa_S = 1,5 \times 10^{-8}$ m²/sec, die Prandtlzahl wurde mit $\sigma = 6,2$ angesetzt. Eine Störung von etwa 1% der Gradienten (bzw. ΔT , ΔS) wurde auf die Temperatur- bzw. auf die Salzgehaltskomponente hinzugefügt, im Zwei-Schichten Fall nur auf die Grenzschicht. Die horizontalen Gebietsränder waren periodisch, während Temperatur und Salzgehalt am oberen und unteren Gebietsrand festgehalten wurden.

Die Gebietshöhe von $H = 24,75$ cm lag im unteren Bereich von beobachteten Grenzschichtdicken, welche z.B. während der **C-SALT** Messungen (siehe Seite 10) mit 20 – 50 cm beschrieben wurden.

Die durchgeführten Simulationen wurden mit SF-layer, SF-linear, SF-3, SF-4 und SF-5 bezeichnet und sind mit 1) bis 5) nummeriert (siehe Tabelle 4.1).

Nr	Simulation	Gebiet	$\Delta z, \Delta x$	τ	R_ρ^f	Ra_T
1	SF-layer	$50 \times 10 \times 150$ GP	$1,65 \times 10^{-3}$ m	0,1	1,33	$1,8 \times 10^8$
2	SF-linear	$50 \times 10 \times 150$ GP	$1,65 \times 10^{-3}$ m	0,1	1,33	2×10^8
3	SF-3	$50 \times 10 \times 150$ GP	$1,65 \times 10^{-3}$ m	0,1	1,06	2×10^8
4	SF-4	$50 \times 10 \times 150$ GP	$1,65 \times 10^{-3}$ m	0,1	2,12	2×10^8
5	SF-5	$50 \times 10 \times 150$ GP	$1,65 \times 10^{-3}$ m	0,1	2,66	2×10^8
1	3DLE0.1	50^3 GP	$1,65 \times 10^{-3}$ m	0,1	1,3	$\sim 6 \times 10^6$
2	2DLE0.01	$512 \times 8 \times 512$ GP	$1,61 \times 10^{-4}$ m	0,01	1,3	$\sim 6 \times 10^6$
3	2DLE0.1	$512 \times 8 \times 512$ GP	$1,61 \times 10^{-4}$ m	0,1	1,3	$\sim 6 \times 10^6$
4	2DLE0.1-c	$50 \times 10 \times 50$ GP	$1,65 \times 10^{-3}$ m	0,1	1,3	$\sim 6 \times 10^6$
5	2DLE0.01-c	$50 \times 10 \times 50$ GP	$1,65 \times 10^{-3}$ m	0,01	1,3	$\sim 6 \times 10^6$

Tabelle 4.1: Überblick über die verschiedenen durchgeführten Simulationen von Salz fingern.

2) Die Zwei-Schichten Modelle, Vergleich der Lewiszahlen $\tau = 0,01$ und $\tau = 0,1$

Als Grundlage diente ein Zwei-Schichten Modell mit $512 \times 8 \times 512$ Gitterpunkten für die hochaufgelösten Simulationen 2DLE0.01 und 2DLE0.1 mit einer Gebietsgröße von $8,25 \times 0,129 \times 8,25 \text{ cm}^3$. Dies entsprach einer Gitterweite von $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 161 \times 10^{-4} \text{ m}$. Hingegen wurde den grob aufgelösten Simulationen (3DLE0.1, 2DLE0.1-c und 2DLE0.01-c) eine Gittergröße von $50 \times 10 \times 50$ Gitterpunkten (50^3 Gitterpunkten für den 3D-Fall) zugrunde gelegt was einer Gebietgröße von $8,25 \times 1,65 \times 8,25 \text{ cm}$ ($8,25^3 \text{ cm}^3$ für den 3D-Fall) mit $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1,65 \times 10^{-3} \text{ m}$ entsprach. Die Temperaturdifferenz zwischen der unteren und oberen Schicht betrug 1°C , bei einem Salzgehaltsunterschied von jeweils 0,16, so daß alle Voraussetzungen zur Bildung von Salz fingern erfüllt waren. Die Temperatur- und Salzgehaltsunterschiede wurden so gewählt, daß dies realen Situationen zwischen zwei Treppenstufen im Ozean entsprach (z.B. durch die von den **C-SALT** Messungen berichteten Temperatur- und Salzgehaltsunterschiede in der Karibik).

Zur Initialisierung des Prozessablaufes wurde eine zufällige Störung von etwa 1% der Temperatur- bzw. Salzgehaltsunterschiede (ΔT und ΔS) auf die jeweiligen Komponenten auf die Grenzschicht hinzugefügt.

Die Lewiszahlen wurden unterschiedlich mit $\tau = 0,1$ oder $\tau = 0,01$ gewählt. In Tabelle 4.1 sind die jeweiligen Ausgangsbedingungen aufgeführt. Die Prandtlzahl betrug $\sigma = 6,2$ und der molekulare Diffusionskoeffizient wurde durch $\kappa_T = 1,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{sec}$ und $\kappa_S = \tau \kappa_T$ wiedergegeben.

Das Gebiet stellte ein in sich abgeschlossenes System dar, so daß außer $w = 0$ am oberen und unteren Gebietsrand keine weiteren Bedingungen gestellt wurden. Die seitlichen Gebietsränder waren periodisch gewählt.

Aus Gründen der numerischen Stabilität war bei den hochaufgelösten Simulationen ein schmaler Streifen mit mindestens 8 Gitterpunkten in der y-Richtung notwendig, während bei den grob aufgelösten Gittern sogar 10 Gitterpunkte benötigt wurden. Dabei wurden etwa eine viertel Fingerbreite in y-Richtung aufgelöst, bzw. 3 Finger im Falle der groben

Auflösung.

Die Gittergröße ist jeweils Tabelle 4.1 zu entnehmen. Die einzelnen Experimente dieser Reihe wurden mit 3DLE0.1, 2DLE0.01, 2DLE0.1, 2DLE0.1-c und 2DLE0.01-c bezeichnet und werden gegebenenfalls mit 1) bis 5) nummeriert.

4.1.2 Verschiedene Vergleichsansätze

Das Ziel die effektiven Diffusionskoeffizienten K_T und K_S zu bestimmen kann durch verschiedene Ansätze erreicht werden. Bei der Vielzahl von Parametern sind ebenso viele Kennzahlen und Vergleichsgrößen möglich. Im Folgenden werden einige diese Größen vorgestellt.

Fleury und Lueck [16] (und andere) verwendeten die Coxzahlen von Temperatur zur Beschreibung der effektiven Diffusion. Für eine stationäre Situation $\partial_t \langle \chi'^2 \rangle_h = 0$ – von der in der Literatur im allgemeinen ausgegangen wurde – werden die Coxzahlen durch

$$\text{Cox}_\chi = \frac{\langle |\nabla \chi'|^2 \rangle_h}{(\partial_z \langle \chi \rangle_h)^2} \quad (4.1)$$

ermittelt, wobei $\chi = T, S$ und $\langle \cdot \rangle_h$ das horizontale Mittel darstellt. Die effektiven Diffusionskoeffizienten folgen mit $K_\chi^C = \kappa_\chi \text{Cox}_\chi$, wobei $\partial_z \langle \chi \rangle_h$ als konstanter Gradient χ_z einer Hintergrundschichtung angenommen wurde. Die führenden Terme der Turbulenzgleichungen ergeben allgemein (unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung, siehe Anhang A.4, Seite 104)

$$K_\chi = \frac{\kappa_\chi \langle (\nabla \chi')^2 \rangle_h + \frac{1}{2} \partial_t \langle (\chi')^2 \rangle_h}{(\partial_z \langle \chi \rangle_h)^2} \quad (4.2)$$

Merryfield [48, 45], Nagashima et al. [54], Özgökmen et al. [56], Schmitt [66, 68], Shen [73, 74] verwendeten die effektiven Diffusionskoeffizienten, die mit Hilfe der turbulenten Flüsse ermittelt wurden. Diese wurden hier verwendet und ergeben sich durch

$$K_\chi = -\frac{F_\chi}{\partial_z \langle \chi \rangle_h}, \quad (4.3)$$

bzw. durch

$${}^{\text{eq}}K_\chi = -\frac{\langle F_\chi \rangle_t}{\langle \partial_z \langle \chi \rangle_h \rangle_t}, \quad (4.4)$$

sobald die turbulenten Flüsse nach der Vermischung ein konstantes Niveau erreichen, wobei $\chi = T, S$ und $F_\chi = \langle w' \chi' \rangle_h$, wobei $\partial_z \langle \chi \rangle_h$ einmal als lokale Größe und einmal als konstanter Gradient χ_z , ausgehend von der Hintergrundschichtung, diskutiert wurden.

Die effektiven Diffusionskoeffizienten K_T und K_S , die durch die doppelt-diffusiven Prozesse erzeugt werden, liefern dann ein Maß für die Flüsse von T und S durch die betrachtete Grenzschicht.

Merryfield und Grinder [51] z.B. untersuchten auch die Coxzahlen von Temperatur, zogen daraus jedoch keine Rückschlüsse auf die Diffusionskoeffizienten. Sie stellten dabei fest, daß die horizontalen und vertikalen Coxzahlen zum Teil erhebliche Unterschiede (bis Faktor zwei) aufwiesen.

Die effektiven Diffusionskoeffizienten wurden von Merryfield [48, 49] durch

$$\begin{aligned} {}^{\text{Merr}}K_T &= \frac{\gamma}{R_\rho} K_S \text{ m}^2/\text{sec} \\ {}^{\text{Merr}}K_S &= C \frac{1 - \tau R_\rho}{R_\rho - \gamma} \text{ m}^2/\text{sec} \end{aligned} \quad (2.4)$$

beschrieben, mit $C = 0,17 \times 10^{-4}$.

Shen [72] und Özgökmen et al. [56] beschrieben unter anderem die effektiven Diffusionskoeffizienten mit Hilfe des vier-drittel Flußgesetzes, während Radko in verschiedenen Experimenten die Nusseltzahl

$$\text{Nu}_\chi = \left| \frac{\langle w' \chi' \rangle_h}{\kappa_\chi \partial_z \langle \chi \rangle_h} \right|$$

verwendete. Shen [72] und Stellmach et al. [77] ermittelten ebenfalls die thermale Nusseltzahl Nu_T . Prinzipiell liefert die Nusseltzahl keine neuen Erkenntnisse zu den bereits beschriebenen effektiven Diffusionskoeffizienten K_T und K_S , sondern stellt die dimensionslosen Temperatur- und Salzgehaltsflüsse dar. Der Vollständigkeit wegen und um späteren Arbeiten einen möglichen Ansatzpunkt zu geben, wurden hier die Nusseltzahlen von Temperatur und Salzgehalt ermittelt.

Der Zusammenhang der effektiven Diffusion K_T und K_S folgt anhand γ und R_ρ^f durch

$$K_T = \frac{R_\rho^f}{\gamma} K_S.$$

Dabei wird das Verhältnis R_ρ^f/γ auch als die turbulente Lewiszahl \mathcal{T} bezeichnet.

4.1.3 Einteilung der Simulationen

In den Simulationen wurde die Längenskala von Kolmogorov η , mit

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \approx 0,4 - 0,7 \text{ cm} \quad (\text{A.94})$$

ermittelt. Die Fingerbreite lag bei $d \approx 0,4 - 0,5 \text{ cm}$. Diese beiden nahezu übereinstimmenden Größen müssen in den Simulationen durch das verwendete Gitter aufgelöst werden, damit der Effekt der kleinskaligen Salzfinger ermittelt werden kann. Die vollständige Auflösung der entstehenden Strukturen stellt die Definition für Direkte Numerische Simulationen (DNS) dar.

Im einzelnen Fall wurde eine Gitterauflösung angestrebt, die unterhalb der Längenskala η bzw. d lag. Die Auflösung der Salzfinger stellte sicher, daß alle entstehenden Strukturen dargestellt werden konnten und die ermittelten Temperatur- und Salzgehaltsflüsse diejenigen waren, die durch die doppelt-diffusiven Prozesse erzeugt wurden. Die so durchgeführten Simulationen werden den DNS zugeordnet.

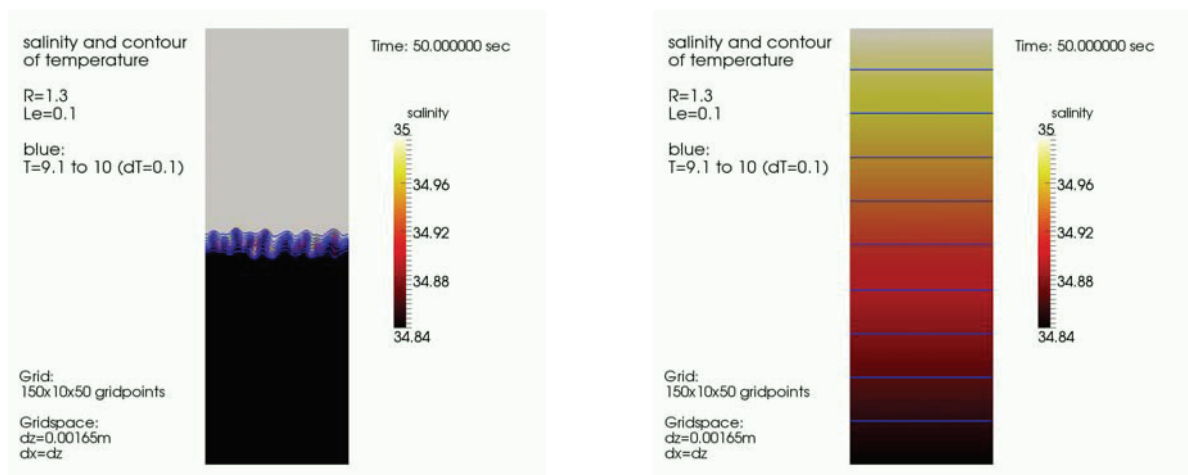
4.2 Vergleich von Zwei-Schichten Modell und linearer Schichtung, Effektive Diffusion der Salzfinger

4.2.1 Momentaufnahmen der Salzfinger

Aus den beiden unterschiedlichen Ausgangssituationen folgt die Entwicklung der Salzfinger.

- SF-layer: Initialisierung durch ein Zwei-Schichten Modell von Temperatur und Salzgehalt. Abbildung 4.1(a) repräsentiert eine Momentaufnahme der Entstehung von Salz fingern nach 50 sec.
- SF-linear: Lineare Anfangsschichtung mit konstanten Temperatur- und Salzgehaltsgradienten. Abbildung 4.1(b) stellt die Momentaufnahme nach 50 sec dar.

Die Abbildungen 4.1 bis 4.8 zeigen Momentaufnahmen der beiden Salzingersimulationen SF-layer und SF-linear im direkten Vergleich.

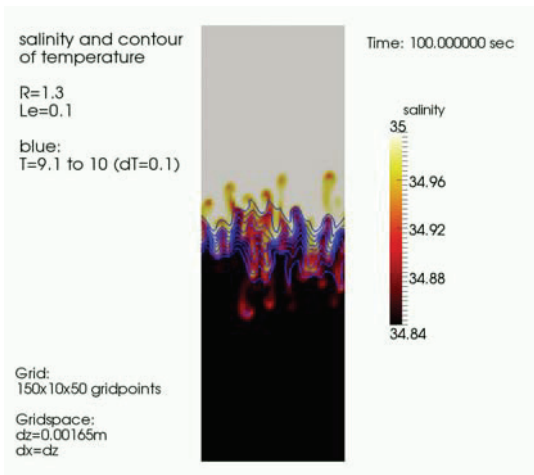


(a) SF-layer: zwei Anfangsschichten von Temperatur und Salzgehalt

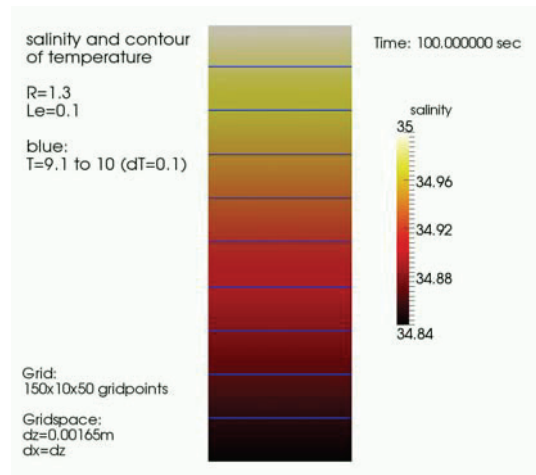
(b) 2D-SF-linear: lineare Anfangsschichtung von Temperatur und Salzgehalt

Abbildung 4.1: Momentaufnahme zweier Salzingersimulationen nach $t = 50$ sec. Während bei (a) bereits Salzfinger entstanden sind, ist bei (b) nur die lineare Schichtung zu beobachten.

Die Entstehung der Salzfinger wird bei SF-layer direkt an der Grenzschicht in der Gebietsmitte bei $z = H/2$ beobachtet (Abbildung 4.1(a) und 4.2(a)). Im linear geschichteten Fall SF-linear hingegen ist die Entstehung von Salz fingern über das gesamte Gebiet zu beobachten (Abbildung 4.4(b) und 4.5(b)). Nach Entstehung der Salzfinger gehen diese in einen Vermischungsprozess über, bei dem die zugrunde liegende Schichtung durch die anwachsenden turbulenten Flüsse von Temperatur und Salzgehalt vermischt wird. Diese beginnt bei SF-layer ab etwa $t \approx 230$ sec und im linear geschichteten Fall SF-linear bei etwa $t \approx 600$ sec. Schließlich endet die Vermischung in einer Phase mit relativ konstanten vertikalen Flüssen (Abbildung 4.7 und 4.8). Die beiden zugrundegelegten

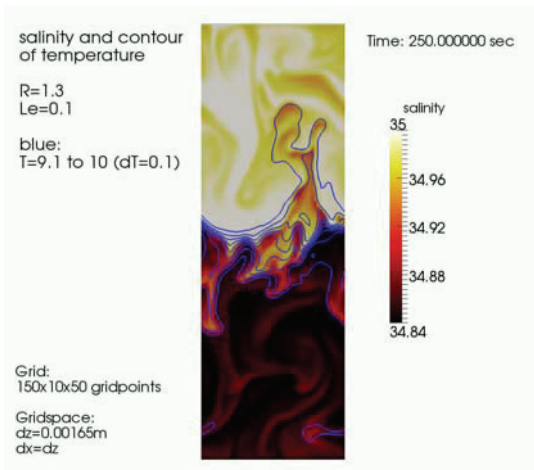


(a) SF-layer: zwei Anfangsschichten von Temperatur und Salzgehalt

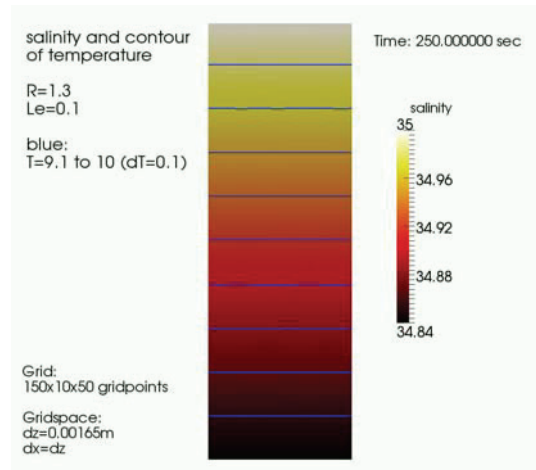


(b) 2D-SF-linear: lineare Anfangsschichtung von Temperatur und Salzgehalt

Abbildung 4.2: Momentaufnahme des Salzgehaltes bei $t = 100$ sec. (a) zeigt weiter anwachsende Salzfinger. Einzelne „Fingerspitzen“ lösen sich ab, Vermischung beider Schichten beginnt. (b) zeigt die bestehende lineare Schichtung.



(a) SF-layer: zwei Anfangsschichten von Temperatur und Salzgehalt

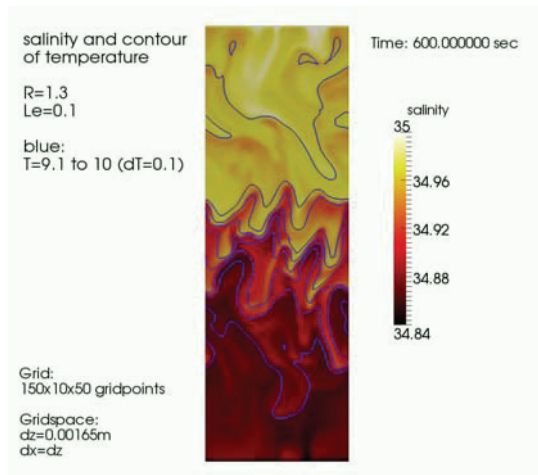


(b) SF-linear: lineare Anfangsschichtung von Temperatur und Salzgehalt

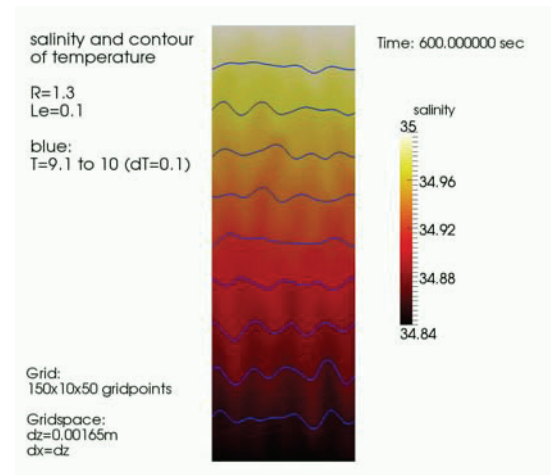
Abbildung 4.3: Momentaufnahme des Salzgehaltes bei $t = 250$ sec. Verursacht durch die Salzfinger ist der Vermischungsprozess in (a) deutlich sichtbar. Die Salzfinger werden dabei von den turbulenten Flüssen von Temperatur und Salzgehalt überlagert. In (b) beginnt die Destabilisierung der stabilen Schichtung.

Ausgangsbedingungen SF-layer und SF-linear können dann nicht mehr erkannt werden.

Die Momentaufnahmen der Simulationen SF-3 und SF-4 werden nicht gezeigt. Der Prozess verläuft analog zu SF-linear und der Verlauf liefert keine neuen Erkenntnisse zu den bereits dargestellten Momentaufnahmen. Einzig die sehr stabile Situation SF-5 zeigt nur eine geringe Vermischung, was z.B. durch den gleichmäßigen Gradientenverlauf von Temperatur und Salzgehalt belegt wird. Die Salzfinger treten als lang gezogene

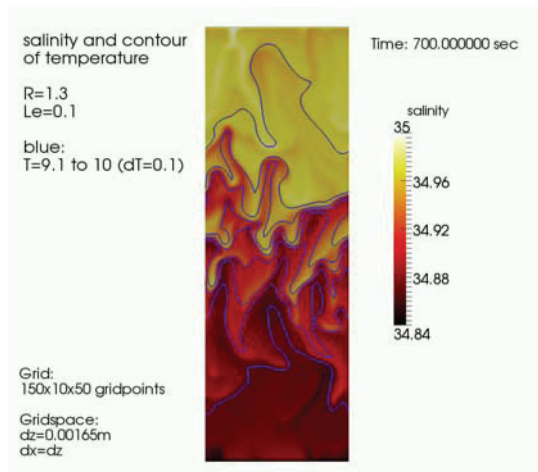


(a) SF-layer: zwei Anfangsschichten von Temperatur und Salzgehalt

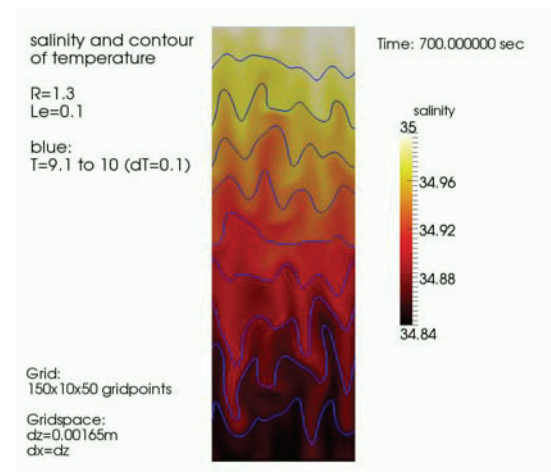


(b) SF-linear: lineare Anfangsschichtung von Temperatur und Salzgehalt

Abbildung 4.4: Momentaufnahme des Salzgehaltes bei $t = 600$ sec. Erneute Fingerbildung in (a) nahe der ursprünglichen Grenzschicht und Beginn der Fingerbildung im gesamten Gebiet in (b)



(a) SF-layer: zwei Anfangsschichten von Temperatur und Salzgehalt



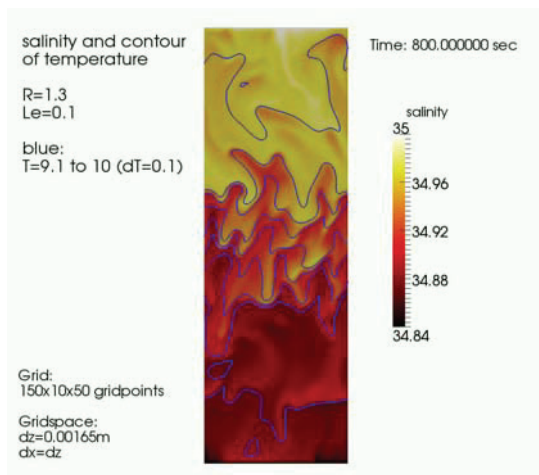
(b) SF-linear: lineare Anfangsschichtung von Temperatur und Salzgehalt

Abbildung 4.5: Momentaufnahme des Salzgehaltes bei $t = 700$ sec. Salzfinger breiten sich wieder aus in (a) und stabilisieren den vertikalen Salzgehaltstransport. Weiteres anwachsen der Salzfinger in (b).

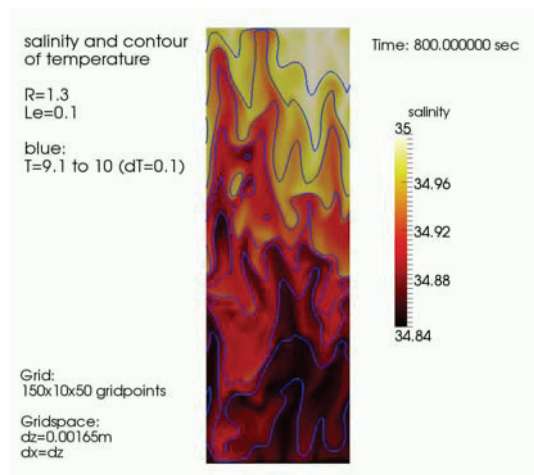
senkrechte Kanäle auf, die das Gebiet durchsetzen. (Abbildung 4.9(a)) Aufgrund der hohen Stabilität ist eine turbulente Vermischung (Abbildung 4.9(b)) nur sehr schwach ausgeprägt.

Der beobachtete Prozessablauf lässt sich allgemein in drei Phasen einteilen:

1. Die Wachstumsphase, in der Salzfinger entstehen und anwachsen.
2. Den Vermischungsprozess, in dem das Gebiet durch die anwachsenden turbulenten

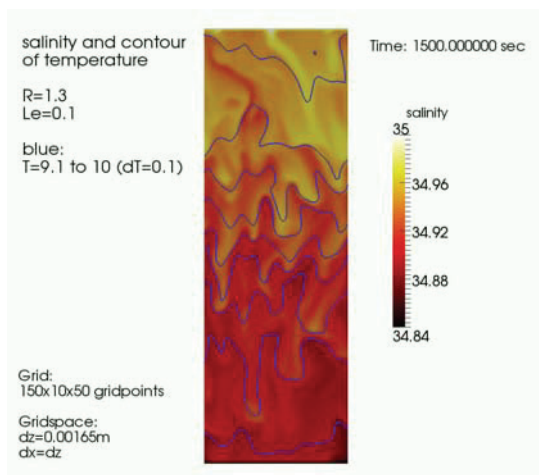


(a) SF-layer: zwei Anfangsschichten von Temperatur und Salzgehalt

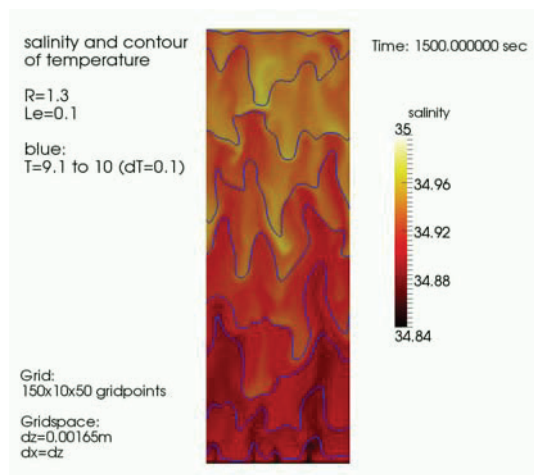


(b) SF-linear: lineare Anfangsschichtung von Temperatur und Salzgehalt

Abbildung 4.6: Momentaufnahme des Salzgehaltes bei $t = 800$ sec. Salzfinger breiten sich wieder aus in (a), während in (b) der turbulente Temperatur- und Salzgehaltsfluß das Maximum noch nicht erreicht hat.



(a) SF-layer: zwei Anfangsschichten von Temperatur und Salzgehalt

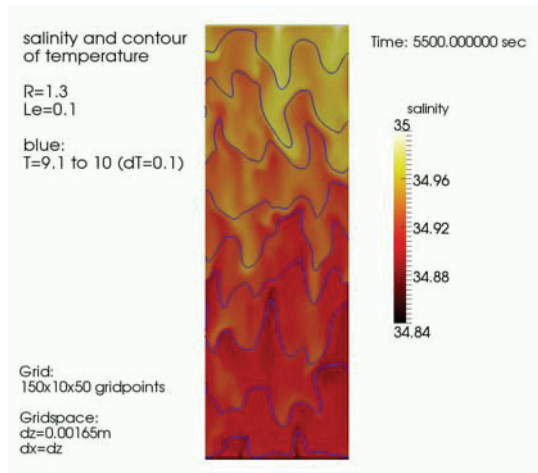


(b) SF-linear: lineare Anfangsschichtung von Temperatur und Salzgehalt

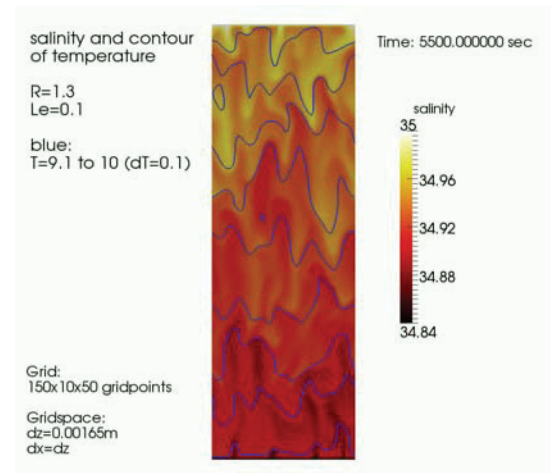
Abbildung 4.7: Momentaufnahme des Salzgehaltes nach $t = 1500$ sec. In beiden Fällen wird nun der Salzgehalt durch die Salzfinger transportiert. Die Flüsse sind in beiden Situationen sehr ähnlich.

Flüsse von Temperatur und Salzgehalt durchmischtes wird.

- Die Gleichgewichtsphase, die mit nahezu konstantem vertikalen Transport von Temperatur und Salzgehalt durch die Salzfinger gekennzeichnet ist.

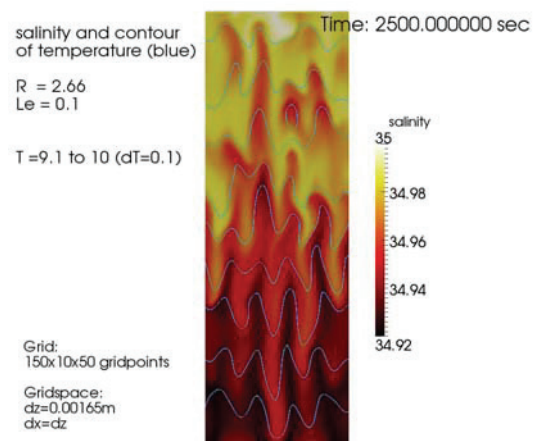


(a) SF-layer: zwei Anfangsschichten von Temperatur und Salzgehalt

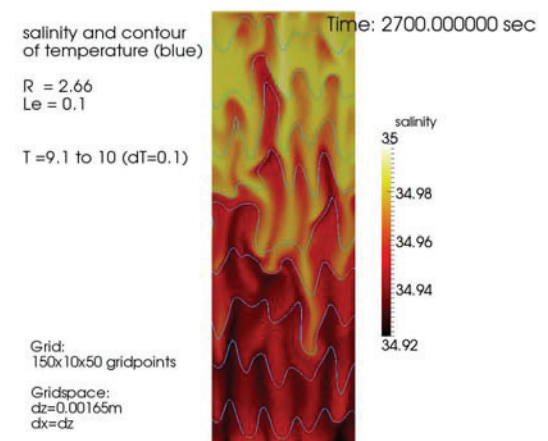


(b) SF-linear: lineare Anfangsschichtung von Temperatur und Salzgehalt

Abbildung 4.8: Momentaufnahme Entwicklung von Salz fingern (b) mit linearer Schichtung, (a) Zwei-Schichten Modell, $t = 5500$ sec. Eine Unterscheidung beider Situationen ist nicht mehr möglich.



(a) SF-5: $t = 2500$ sec



(b) SF-5: $t = 2700$ sec

Abbildung 4.9: Momentaufnahmen des von SF-5 Salzgehaltes als Beispiel für eine sehr stabile Situation mit $R_p^f = 2,66$. (a) Gleichmäßige Finger bei $t = 2500$ sec. (b) Übergang zur Vermischung um $t = 2700$ sec an der Schichtmitte.

4.2.2 Profile von Temperatur und Salzgehalt

Nachdem die turbulenten Flüsse von Temperatur und Salzgehalt die vorgegebene Schichtung der beiden Situationen SF-layer und SF-linear durchmischt haben, nähert sich die Form der Profile beider Simulationen einander an. Dies gilt ebenso für die mittleren turbulenten Flüsse, nachdem das Gebiet durchmischt wurde. Es entsteht in allen Simulationen eine nahezu zeitlich stabile Schichtung mit konstanten Gradienten von Salzgehalt und Temperatur, ein durch die Salzfinger erzeugtes Gleichgewicht.

Die Fälle (SF-3, SF-4 und SF-5) liefern, aufgrund der jeweils gleich gewählten Temperaturgradienten, ein sehr ähnlich zu SF-linear verlaufendes Temperaturprofil. Ein Unterschied ist in den Salzgehaltsprofilen erkennbar, wo an den oberen und unteren Gebietsrändern im Laufe der Simulation eine Stufe entsteht. Diese Entwicklung beschreibt eine zunehmende Stabilisierung der Schichtung. Ob dies als Hinweis auf eine Stufenbildung durch Salzfinger angesehen werden kann bleibt fraglich. Zum einen sind die vertikalen Geschwindigkeiten nach Voraussetzung $w = 0$, was den weiteren Prozessablauf am Gebietsrand einer Grenzschicht nicht erklärt. Es gibt keinen Fluß zwischen zwei Treppenstufen sondern nur innerhalb der Grenzschicht. Andererseits kann nicht ausgeschlossen werden, daß die beobachtete Stufenbildung gerade als Effekt der oberen und unteren Gebietsränder zustande kommt, wie es z.B. bei Özgökmen et al. [56] der Fall war.

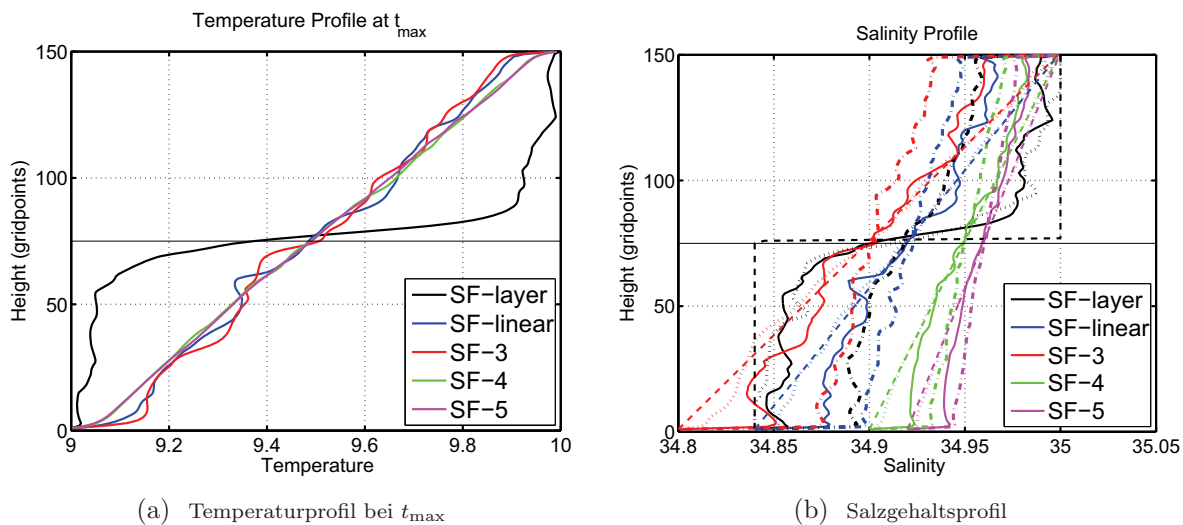


Abbildung 4.10: Die Temperaturprofile in (a) zeigen für die linear geschichteten Fälle bei t_{\max} ein nahezu übereinstimmendes Muster mit der Anfangsschichtung. Beim Zwei-Schichten Modell erreichen die Salzfinger zum Zeitpunkt $t_{\max} = 230$ sec gerade die oberen und unteren Gebietsränder. Im Gegensatz dazu ist bei den Salzgehaltsprofilen in (b) deutlich zu erkennen, daß der Salzgehalt in der Gebietsmitte zwar noch weitgehend der linearen Anfangsschichtung (gestrichelte Linie) entspricht. Nahe den Gebietsrändern macht sich jedoch eine Abweichung bemerkbar. Die gepunktete Linie in (b) zeigt die gleichmäßige Salzgehaltsverteilung bis kurz vor Erreichen von t_{\max} . Das Salzgehaltsprofil erreicht schließlich eine Form, die innerhalb der Grenzschicht einen konstanten Gradienten aufweist (punkt-gestrichelte Linie).

Eine genauere Betrachtung der Profile von Temperatur und Salzgehalt zeigt Abbildung 4.10. Dabei ist im Temperaturprofil (bei t_{\max} und auch danach) nur eine geringe Abweichung von der linearen Anfangsschichtung (bzw. des Zwei-Schichten Modells) zu

erkennen. Während der Salzgehalt in der Gebietsmitte – was im Folgenden auch als Grenzschicht nahe $z = H/2$ (H ist die Gebietshöhe des Modells) bezeichnet wird – noch dem Anfangsprofil entspricht, sind nahe den Gebietsrändern deutliche Abweichungen zu erkennen. Die gepunktete Linie in Abbildung 4.10(b) zeigt das Salzgehaltsprofil kurz vor Erreichen von t_{\max} bei $t = \frac{5}{6} t_{\max}$. Da der gleichmäßige Verlauf der Gradienten und der laminare Anstieg der Flüsse (Abbildung 4.11(a)) bis kurz vor Erreichen von t_{\max} gewährleistet war, dient der Zeitpunkt $\frac{5}{6} t_{\max}$ nur der Dokumentation des ungestörten Verlaufs der Salzfinger.

Nach der turbulenten Vermischung, stellt sich ein (relativ) zeitlich konstantes Salzgehaltsprofil ein, das innerhalb der Grenzschicht einen sehr viel geringeren Gradienten aufweist (Abbildung 4.10(b), punkt-gestrichelte Linien).

Turbulente Flüsse

Während der Destabilisierung der Schichtung durch die molekulare Diffusion von Temperatur und dem daraus folgenden Entstehen der Salzfinger, wachsen die turbulenten Flüsse von Temperatur und Salzgehalt an (Abbildung 4.11(a)). Ein Maximum wird an der Grenzschicht nahe $z = H/2$ bei t_{\max} erreicht. Dabei ist t_{\max} (Tabelle 4.2) jeweils gegeben durch

$$t_{\max}^1 = 230 \quad t_{\max}^2 = 850 \quad t_{\max}^3 = 590 \quad t_{\max}^4 = 1780 \quad t_{\max}^5 = 2610 \text{ sec}$$

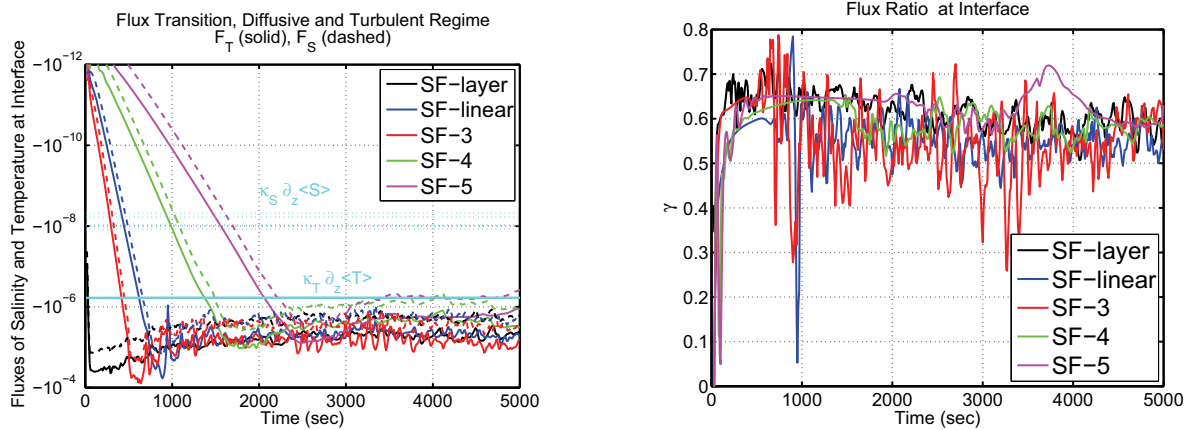
Mit den Indizes 1 bis 5 werden die Simulationen SF-layer, SF-linear, SF-3, SF-4 und SF-5 bezeichnet. Etwa zeitgleich mit t_{\max}^1 erreichen die Salzfinger bei SF-layer die oberen und unteren Gebietsränder. In den linearen Situationen konnte diese Beobachtung nicht gemacht werden, da die Finger dort über das ganze Gebiet verteilt entstanden. Bis t_{\max} wachsen die Flüsse hier gleichmäßig an.

Durch die stark angewachsenen turbulenten Flüsse beginnt um den Zeitpunkt t_{\max} die Vermischung des Gebiets, die anschließend in geringeren turbulenten Flüssen $F_T = \langle w'T' \rangle_h$ und $F_S = \langle w'S' \rangle_h$ endet. Dabei bricht die zugrundeliegende Struktur der Gradienten und der beobachteten Flüsse auf, so daß ein gleichmäßiges Profil erst dann wieder vorliegt, sobald F_T bzw. F_S auf ein (relativ) konstantes Niveau abgefallen sind. Die maximalen Flüsse, die durch die Salzfinger entstanden sind, dienen als Grundlage zur Ermittlung der effektiven Diffusion von Temperatur K_T und Salzgehalt K_S der ersten Generation. Dabei wurden die turbulenten Flüsse von Temperatur $F_T(z)$ und Salzgehalt $F_S(z)$ durch die Gebietsmitte nahe $z = H/2$ bei t_{\max} ermittelt (Tabelle 4.2).

Um die turbulente Vermischung (die bis weit nach t_{\max} anhält) auszuschließen, wird der Zeitpunkt

$$t_{\text{eq}} = t_{\max} + 1000 \text{ sec} \tag{4.5}$$

definiert. Ab diesem Zeitpunkt t_{eq} pendeln sich die Flüsse auf einem konstanten Niveau ein und die Profile von Temperatur und Salzgehalt zeigen innerhalb der Grenzschicht die neu erhaltene (gleichmäßige) Form. Die Flüsse und Gradienten, die sich nach t_{eq}

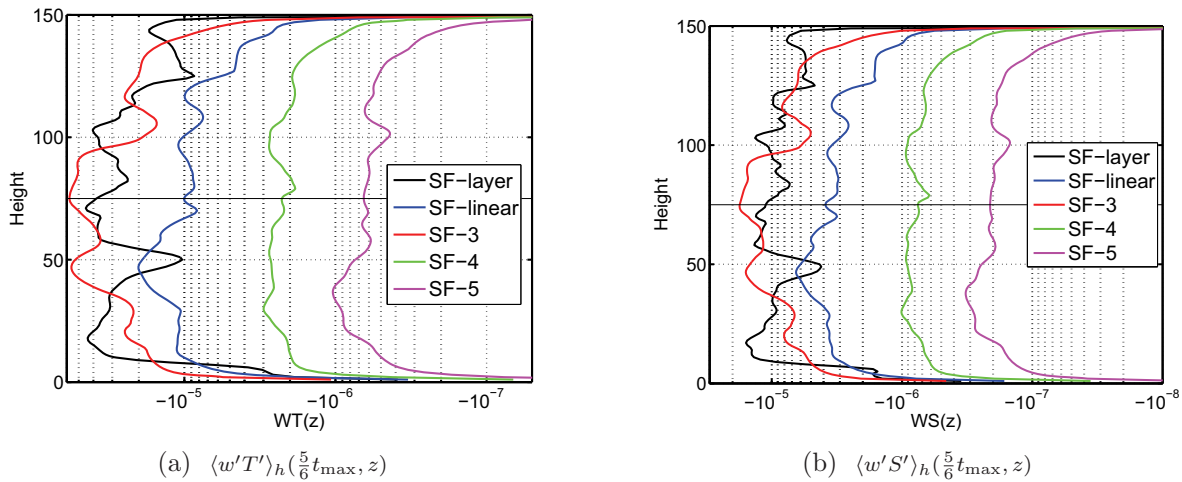


(a) Turbulente und diffusive Flüsse von Temperatur und Salzgehalt im Vergleich.

(b) Flußverhältnis $\gamma(H/2)$

Abbildung 4.11: (a) Vergleich der turbulenten und diffusiven (cyanfarbenen) Flüsse von Temperatur und Salzgehalt der Simulationen nahe der Gebietsmitte (Grenzschicht), (b) Flußverhältnis an der Gebietsmitte $\gamma(z) = \frac{\alpha \langle w'T' \rangle_h}{\beta \langle w'S' \rangle_h}$

stabilisieren, werden als Salzfinger (und effektive Diffusion) der zweiten Generation bezeichnet.



(a) $\langle w'T' \rangle_h(\frac{5}{6}t_{\max}, z)$

(b) $\langle w'S' \rangle_h(\frac{5}{6}t_{\max}, z)$

Abbildung 4.12: Die Profile der Temperatur- (a) bzw. Salzgehaltsflüsse (b) während des Salzfingerwachstums. Die Flüsse wachsen in den linear geschichteten Situationen in einem gleichmäßigen Profil an. Der Zwei-Schichten Fall SF-layer hingegen breitet sich erst in einem gleichmäßigen Profil aus, nachdem die Flüsse bereits ihre volle Stärke erreicht haben. Die Profile zeigen die Situation bei jeweils $\frac{5}{6}t_{\max}$.

Die Flüsse von Temperatur und Salzgehalt wachsen bis etwa t_{\max} gleichmäßig an (Abbildung 4.11(a) zeigt die Flüsse nahe der Grenzschicht bei $z = H/2$). Abbildung 4.12(a) und 4.12(b) zeigt die Profile der (relativ) gleichmäßig anwachsenden Flüsse von Temperatur und Salzgehalt kurz vor Beginn der Vermischung bei $\frac{5}{6}t_{\max}$. Das gleichmäßige Profil

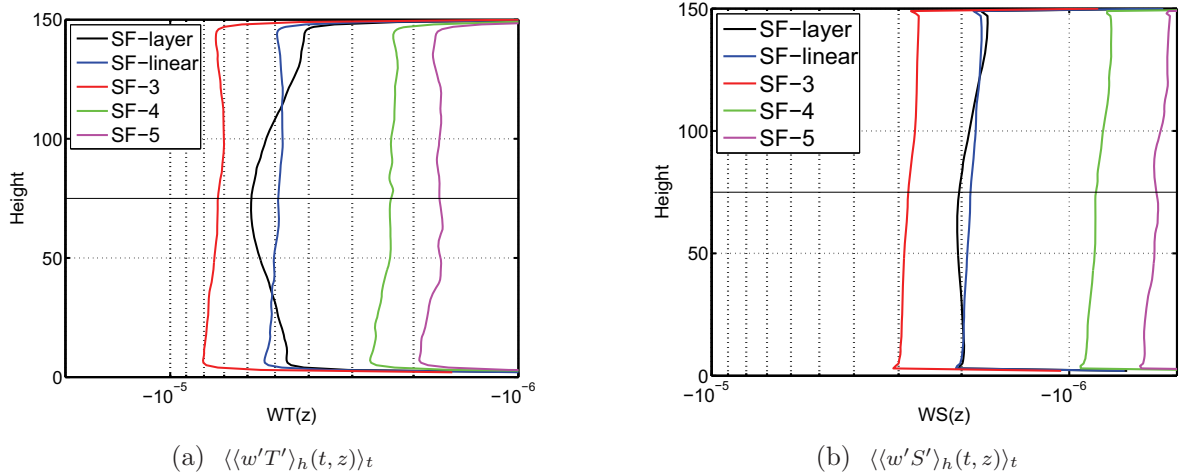


Abbildung 4.13: Die Profile der zeitlich gemittelten Temperatur- (a) bzw. Salzgehaltsflüsse (b) nach Erreichen von t_{eq} zeigen einen gleichmässigen Verlauf.

bricht um t_{max} herum auf und wird anschließend neu angeordnet. Die zeitlich gemittelten Flüsse der Gleichgewichtssituation – die nach t_{eq} erreicht wird (Abbildung 4.13) – ergeben ebenfalls ein gleichmäßiges Profil.

Beim Zwei-Schichten Fall wird der maximale Fluß nahe der Grenzschicht $z = H/2$ sehr schnell erreicht. Danach breitet sich dieser in der Vertikalen langsam aus bis ebenfalls ein annähernd gleichmäßiges Profil entsteht.

Nr	γ	R_ρ^f	t_{max}	$F_T(t_{max})$	$F_S(t_{max})$	$\langle F_T \rangle_t$	$\langle F_S \rangle_t$	T_z	S_z
1	0,61	1,33	230	4,42	1,40	0,58	0,2	4	0,64
2	0,59	1,33	850	5,95	1,65	0,49	0,19	4	0,64
3	0,64	1,06	590	7,89	2,57	0,73	0,28	4	0,79
4	0,64	2,12	1780	1,08	0,39	0,23	0,08	4	0,4
5	0,65	2,66	2610	0,79	0,26	0,17	0,06	4	0,32

Tabelle 4.2: Mittleres Flußverhältnis γ bis t_{max} , das vorgegebene Stabilitätsverhältnis R_ρ^f . Der Zeitpunkt bei dem die maximalen Flüsse erreicht werden, wird mit t_{max} bezeichnet. Das zeitliche Mittel zwischen t_{eq} und Simulationseende ist mit $\langle \cdot \rangle_t$ bezeichnet. Die dazugehörigen Flüsse von Temperatur und Salzgehalt an der Grenzschicht F_T und F_S sind in Einheiten von 10^{-5} mT/sec, bzw. 10^{-5} mS/sec gegeben. T_z und S_z bezeichnen die konstanten Gradienten der Hintergrundsichtung.

Das Flußverhältnis γ (Abbildung 4.11(b)) weist nach t_{max} eine starke Schwankung auf, was auf die einsetzende Vermischung zurückzuführen ist. Die Schwankung ist umso größer, je geringer die vorgegebene Stabilität R_ρ^f . Jedoch läßt sich (kurz vor Beginn der Vermischungsphase) ein gleichmäßiges Flußverhältnis um $\gamma \sim 0,6$ herum bestimmen. Diese Größe wurde ebenfalls durch z.B. Merryfield [49] bestätigt.

Der Anteil des diffusiven Flußes am Gesamtfluß macht bei der Entstehung der Salzfinger den größten Teil aus. Zu Beginn der Simulation wird von einem ruhenden System

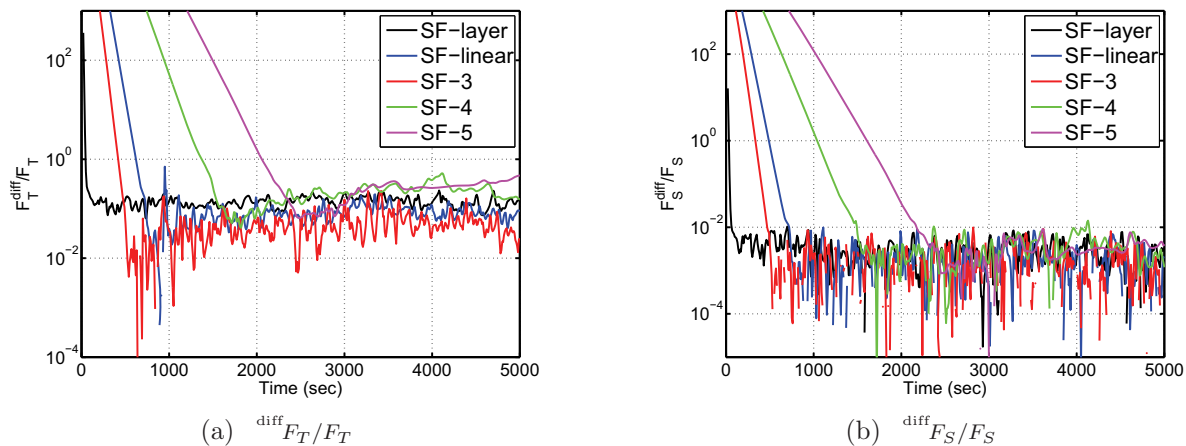


Abbildung 4.14: Verhältnis des diffusiven zum turbulenten Fluß $\frac{\text{diff} F_\chi}{F_\chi}$, $\chi = T, S$ nahe der Grenzschicht bei $z = H/2$. Bei der Temperaturkomponente liegt der Anteil des diffusiven am turbulenten Fluß bei etwa 5 bis 20% je nach Stabilität, während beim Salzgehalt dieser Anteil mit unter 1% auszumachen war.

ausgegangen und die Flüsse entstehen erst durch den laufenden Prozess der Salzfinger. Die Abbildungen 4.14(a) und (b) zeigen das Verhältnis des diffusiven zum turbulenten Fluß

$$\frac{\text{diff} F_\chi}{F_\chi}$$

für $\chi = T, S$. Durch die anwachsenden Salzfinger und dem damit verbundenen ansteigen der turbulenten Flüsse F_S sinkt der Anteil der molekularen Diffusion $\text{diff} F_S$ am Gesamtfluß schließlich auf unter 1% ab. Bei der Temperaturkomponente werden deutlich höhere Werte zwischen 5–20% erreicht. Je größer die Stabilität, desto größer ist auch der Anteil der molekularen Diffusion. Während sich das Verhältnis bei der Temperaturkomponente auf ein (relativ) konstantes Niveau einstellt, ist bei der Salzgehaltskomponente eine breite Schwankung auszumachen.

Im folgenden werden die Anteile der molekularen Diffusion vernachlässigt.

4.2.3 Effektive Diffusion der Salzfinger

Stabilität und Flußverhältnis

Die Stabilität der zugrundeliegenden Grenzschicht wird durch $R_\rho^f = \frac{\alpha T_z}{\beta S_z}$ charakterisiert. Dabei sind die Gradienten durch T_z, S_z als die mittleren Gradienten der Grenzschicht zu verstehen und definiert durch

$$\chi_z = \frac{\chi_{\text{oben}} - \chi_{\text{unten}}}{H}, \quad \chi = T, S \quad (4.6)$$

Da die Gebietsränder in Temperatur und Salzgehalt festgehalten wurden, sind diese Gradienten zeitlich konstant. Im Folgenden wird zwischen den lokalen Gradienten

$\partial_z \langle \chi \rangle_h(t, z)$ und den mittleren, konstanten Gradienten χ_z , $\chi = T, S$ unterschieden. Tabelle 4.2 enthält die Werte T_z und S_z der einzelnen Simulationen.

Das Flußverhältnis $\gamma(z)$, mit

$$\gamma = \frac{\alpha \langle w'T' \rangle_h}{\beta \langle w'S' \rangle_h}$$

ist in Abbildung 4.11(b) für die Gebietsmitte $z = H/2$ dargestellt.

Abbildung 4.15 zeigt den hier beobachteten Verlauf bis zum Erreichen von t_{\max} . Dabei fällt auf, daß in Abhängigkeit der Stabilität R_ρ^f das Flußverhältnis bei etwa $R_\rho^f \sim 1,5$ ein Minimum mit etwa

$$\min(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}(R_{\min}) \approx 0,59 - 0,6,$$

erreicht. Dieses Ergebnis wird auch durch Schmitt [66] bestätigt, welcher ein minimales Flußverhältnis bei

$$\begin{aligned} R_{\min} &\approx 4 && \text{für } \tau = 0,01 \\ R_{\min} &\approx 1,3 && \text{für } \tau = 1/30 \end{aligned}$$

beschrieb. Zur Erinnerung lag die hier verwendete Lewiszahl bei $\tau = 0,1$. Die in Abbildung 4.15 gezeigte Kurve γ_{\max} beschreibt dabei das Flußverhältnis, das aus den maximal anwachsenden Salz fingern (bei $\tau = 0,1$) nach linearer Theorie auftritt (Schmitt [66]). Durchgeführte Tankexperimente weichen jedoch – genau wie hier – von dem idealen Flußverhältnis γ_{\max} ab.

Aus den Experimenten von Turner [85] sowie Taylor und Bucens [84] ergab sich ein Flußverhältnis von $\gamma \approx 0,6 - 0,65$ bei einer variierenden Stabilität von $R_\rho^f \approx 1,5 - 3$. Boyd und Perkins [7] ermittelten aus den C-SALT Messungen für eine ähnliche Stabilität einen Wert von $\gamma \approx 0,85$, der jedoch mit den meisten bekannten Simulationen nicht übereinstimmt. Schmitt et al. [71] kamen zu ähnlich hohen Flußverhältnissen, die dadurch erklärt wurden, daß neben den doppelt-diffusiven Einflüssen ebenfalls die horizontalen Gradienten und vor allem auftretende Turbulenzen eine wichtige Rolle spielen.

Effektive Diffusion

Die effektive Diffusion von Temperatur K_T und Salzgehalt K_S wird anhand der turbulenten Flüsse F_T , bzw. F_S ermittelt und ist gegeben durch

$$K_\chi(t, z) = -\frac{F_\chi(t, z)}{\partial_z \langle \chi \rangle_h(t, z)} \quad (4.3)$$

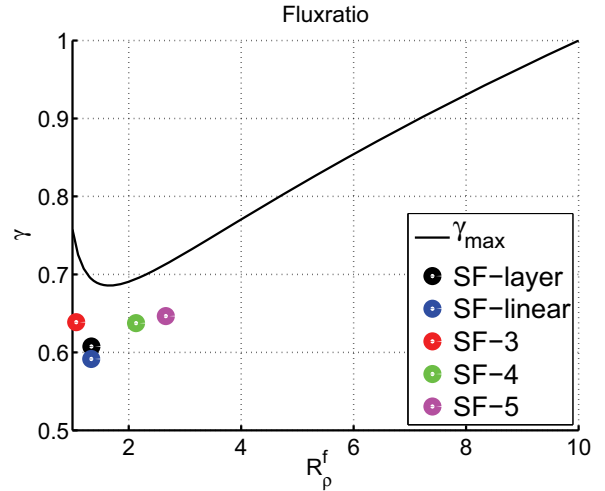
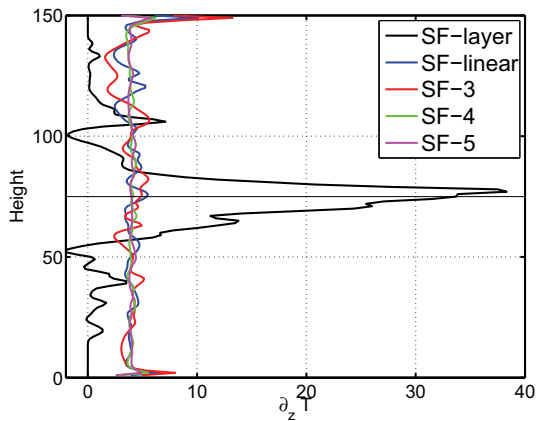


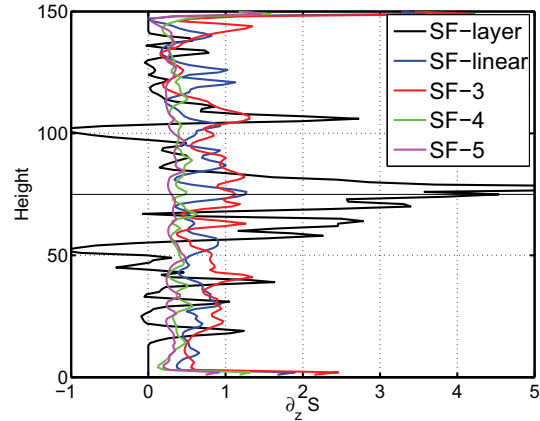
Abbildung 4.15: Flußverhältnis γ der einzelnen Simulationen. Die Kurve γ_{\max} bezeichnet zum Vergleich dabei das Flußverhältnis, das die Wachstumsrate der Salzfinger aus linearer Theorie maximiert (Schmitt [66]).

für $\chi = T, S$ und $F_\chi := \langle w'\chi' \rangle_h$.

Während die Salzfinger anwachsen, zeichnen sich die Gradienten $\partial_z \langle \chi \rangle_h(t, z)$, $\chi = T, S$ der linearen Ausgangssituationen durch ein gleichmäßiges Profil aus. Dieses hält bis kurz vor Erreichen von t_{\max} an. Abbildung 4.16 zeigt diese Profile bei etwa $\frac{5}{6} t_{\max}$. Für den Zwei-Schichten Fall SF-layer hingegen gilt dies nicht, hier konnte nur beobachtet werden, wie sich die ursprüngliche Grenzschicht ausweitet.

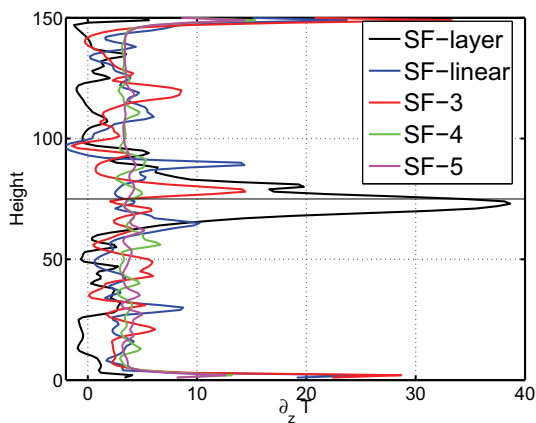


(a) Profil der Temperaturgradienten $\partial_z \langle T \rangle_h(z)$ kurz vor Erreichen von t_{\max}

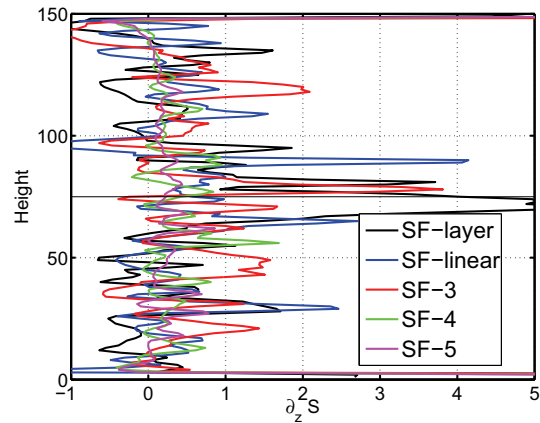


(b) Profil der Salzgehaltsgradienten $\partial_z \langle S \rangle_h(z)$ kurz vor Erreichen von t_{\max}

Abbildung 4.16: Bis jeweils t_{\max} weisen die Gradienten ein regelmäßiges Profil auf, was jedoch nicht für SF-layer gilt.

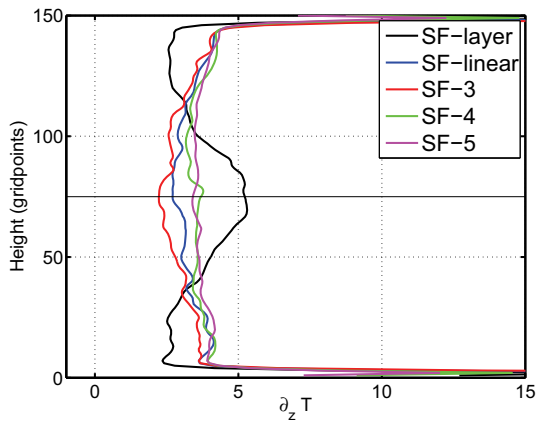


(a) Profil der Temperaturgradienten $\partial_z \langle T \rangle_h(t_{\max} z)$

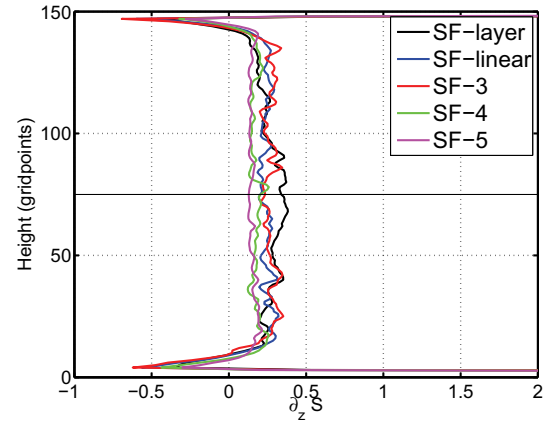


(b) Profil der Salzgehaltsgradienten $\partial_z \langle S \rangle_h(t_{\max} z)$

Abbildung 4.17: Für die Temperatur (a) wird nahe der Grenzschicht im Zwei-Schichten Fall erwartungsgemäß der größte Wert erreicht. SF-4 und SF-5 weisen dabei ein relativ gleichmäßiges Profil auf. SF-layer, SF-linear und SF-3 weisen aufgrund der geringen Stabilität große Schwankungen auf. Aufgrund der destabilisierenden Eigenschaft des Salzgehaltes (b) werden hier die größten Schwankungen erreicht.

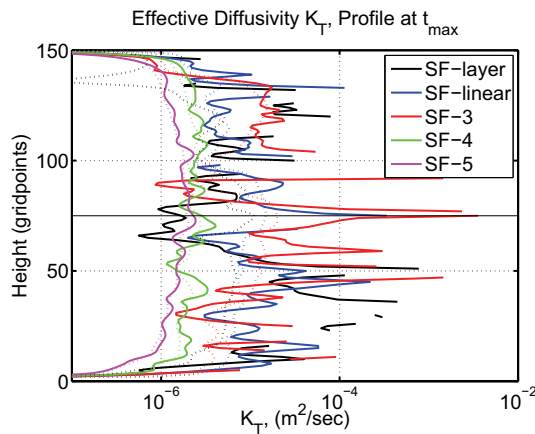


(a) Profil der zeitlich gemittelten Temperaturgradienten $\langle \partial_z \langle T \rangle_h(t_{\text{eq}} \leq t, z) \rangle_t$ nach t_{eq}

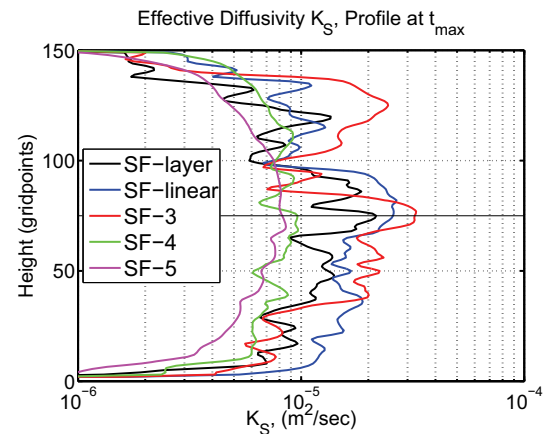


(b) Profil der zeitlich gemittelten Salzgehaltsgradienten $\langle \partial_z \langle S \rangle_h(t_{\text{eq}} \leq t, z) \rangle_t$ nach t_{eq}

Abbildung 4.18: Zeitlich gemittelte Profile der Temperatur (a) und Salzgehaltsgradienten (b) ab t_{eq} . Das gleichmäßige Profil gibt die Stabilität für die zweite Generation der Salzfinger vor.



(a) $K_T(t_{\text{max}}, z)$ mit lokalem Gradienten $\partial_z \langle T \rangle_h$ (durchgezogene Linie) und mit konstantem Gradienten T_z (gepunktete Linie)



(b) Profil von $\widetilde{K}_S(t_{\text{max}}, z)$ mit konstantem Gradienten S_z

Abbildung 4.19: Profile der ermittelten Diffusion von Temperatur und Salzgehalt. Für Temperatur wurden die effektive Diffusion mit lokalem Gradienten $\partial_z \langle T \rangle_h(z)$ (durchgezogene Linie) und mit konstantem Hintergrundgradienten T_z (gepunktete Linie) ermittelt. Wegen der starken Schwankung von $\partial_z \langle S \rangle_h(z)$ wurde auf die Darstellung von $K_S(t_{\text{max}})$ verzichtet.

Spätestens beim einsetzenden turbulenten Vermischungsprozesses um etwa t_{max} spaltet sich das Profil auf und wird sehr unregelmäßig mit starken Schwankungen, wie Abbildung 4.17 zeigt. Die lokalen Gradienten $\partial_z \langle \chi \rangle_h(t, z)$ lassen sich in dieser Phase nicht abschätzen. Die auftretenden großen Schwankungen betreffen vor allem die Salzgehaltsgradienten (Abbildung 4.17(b)).

Damit eignen sich die lokalen Gradienten $\partial_z \langle \chi \rangle_h(t, z)$ nahe der Grenzschicht bei $z =$

$H/2$ nur bedingt, um die effektive Diffusion K_χ nach Gleichung (4.3) zu beschreiben. Erst nachdem die Flüsse F_T und F_S absinken stabilisieren sich die Gradienten von Temperatur und Salzgehalt und eignen sich schließlich für eine Beschreibung der effektiven Diffusion. Die effektive Diffusion wird daher für die lokalen, als auch für die konstanten Gradienten untersucht und anschließend diskutiert.

Durch die vorgegebene Hintergrundschichtung mit den konstanten Gradienten T_z und S_z , wird die Gesamtstabilität der Schichtung charakterisiert. Außerdem wird durch T_z und S_z die effektive Diffusion K_T und K_S bis t_{\max} wiedergegeben. Nach t_{\max} (bzw. nach t_{eq}) jedoch wird, bedingt durch den turbulenten Vermischungsverlauf, die effektive Diffusion K_S im Salzgehalt deutlich unterschätzt (Abbildung 4.21 bis 4.25).

Unter Annahme von konstanten Gradienten χ_z , $\chi = T, S$ folgt die Beschreibung der effektiven Diffusionskoeffizienten durch

$$\widetilde{K}_\chi(t, z) := -\frac{F_\chi(t, z)}{\chi_z}, \quad (4.7)$$

mit $\chi = T, S$. Dies spiegelt letztendlich die Beschreibung der effektiven Diffusion der Grenzschicht bis t_{\max} wieder.

Nach t_{\max} sinken die turbulenten Flüsse von Temperatur und Salzgehalt ab und stabilisieren sich nach t_{eq} . Temperatur und Salzgehalt zeigen nach t_{eq} ein sehr gleichmäßiges Profil. Die Stabilität nach t_{eq} die innerhalb des Gebiets ermittelt wird zeigt sich dabei als sehr robust.

Abbildung 4.20 gibt die Profile der gemittelten effektiven Diffusion nach Erreichen des Gleichgewichts bei t_{eq} , mit

$${}^{\text{eq}}K_\chi(z) := -\frac{\langle F_\chi \rangle_t(z)}{\langle \partial_z \langle \chi \rangle_h \rangle_t(z)}, \quad \chi = T, S \quad (4.4)$$

wieder, wobei $\langle \cdot \rangle_t$ das zeitliche Mittel ab t_{eq} bezeichnet. Für die effektive Diffusion der Temperatur ${}^{\text{eq}}K_T$ folgt ein gleichmäßiges Profil, während beim Salzgehalt ${}^{\text{eq}}K_S$ noch immer Schwankungen zu beobachten sind.

Für die mittlere Stabilität innerhalb des Gebiets wurden verschiedene Gradienten von Temperatur bzw. Salzgehalt ermittelt.

$$\begin{aligned} {}^{50\%}\chi_z(t) &= \frac{\chi(t, \frac{H+0,5H}{2}) - \chi(t, \frac{H-0,5H}{2})}{0,5H} \\ {}^{80\%}\chi_z(t) &= \frac{\chi(t, \frac{H+0,8H}{2}) - \chi(t, \frac{H-0,8H}{2})}{0,8H} \\ {}^{90\%}\chi_z(t) &= \frac{\chi(t, \frac{H+0,9H}{2}) - \chi(t, \frac{H-0,9H}{2})}{0,9H} \end{aligned} \quad (4.8)$$

wobei H die Gesamtschichthöhe darstellt. Über die so erhaltenen mittleren Gradienten über 50%, 80% und 90% der Schichthöhe werden die zeitlich gemittelten Gradienten

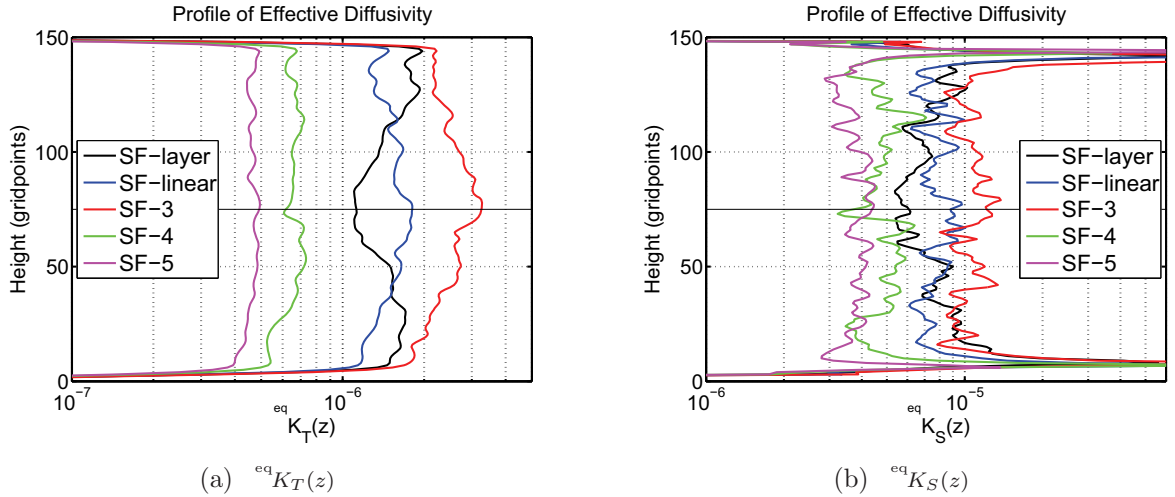


Abbildung 4.20: Profil der zeitlich gemittelten effektiven Diffusion K_T und K_S nach Erreichen von t_{eq} .

$\langle \chi_z \rangle_t$ nach t_{eq} bestimmt. Die mittlere Stabilität nach t_{eq} ergibt sich durch

$${}^{eq}R_\rho^f(\Omega\%) = \frac{\alpha \langle \Omega\% T_z \rangle_t}{\beta \langle \Omega\% S_z \rangle_t} \quad (4.9)$$

und zeigt einen deutlichen Anstieg (Tabelle 4.5) gegenüber der vorgegebenen Gesamtstabilität R_ρ^f .

Analog zu Gleichung (4.4) werden, mit Hilfe der Gradienten aus Gleichung (4.8), die später genutzten mittleren Werte ${}^{eq}K_\chi(\Omega\%)$, für $\chi = T, S$ und $\Omega = 50, 80, 90$ über ein Gebiet von 50%, 80% und 90% der Gebietshöhe ermittelt.

Ein Vergleich der effektiven Diffusion zwischen K_χ und \widetilde{K}_χ ergibt sich im Folgenden:

Abbildung 4.19(a) zeigt die Profile der effektiven Diffusion $K_T(t_{max}, z)$ (durchgezogene Linien) und die Profile von \widetilde{K}_T (gepunktete Linien), negative Werte wurden ausgelassen. Im Falle von ${}^4R_\rho^f = 2,13$ und ${}^5R_\rho^f = 2,66$ liegt die relative Abweichung zwischen $K_T(t_{max})$ und $\widetilde{K}_T(t_{max})$ unter 5%, in den übrigen Fällen werden knapp 10% Abweichung festgestellt. Eine entsprechende Abweichung für die effektive Diffusion des Salzgehaltes lässt sich aufgrund der starken Fluktuationen nicht angeben. Der Zwei-Schichten Fall SF-layer stellt dabei eine gesonderte Situation dar. In Abbildung 4.19(b) sind daher nur die \widetilde{K}_S gezeigt, die mit Hilfe von S_z ermittelt wurden.

Der zeitliche Verlauf der effektiven Diffusion $K_\chi(t, z)$ und $\widetilde{K}_\chi(t, z)$ nahe der Gebietsmitte $z = H/2$ wird in Abbildung 4.21 bis 4.25 dargestellt.

Die große Diskrepanz zwischen K_χ und \widetilde{K}_χ , die sich aus der Zwei-Schichten Situation heraus ergibt (Abbildung 4.21), zeigt exemplarisch den Unterschied zu den linear geschichteten Fällen. Aufgrund der sehr schnell wachsenden turbulenten Flüsse F_T und F_S lässt sich ein paralleler Verlauf von K_χ und \widetilde{K}_χ nur schwer ausmachen. Der Vergleich

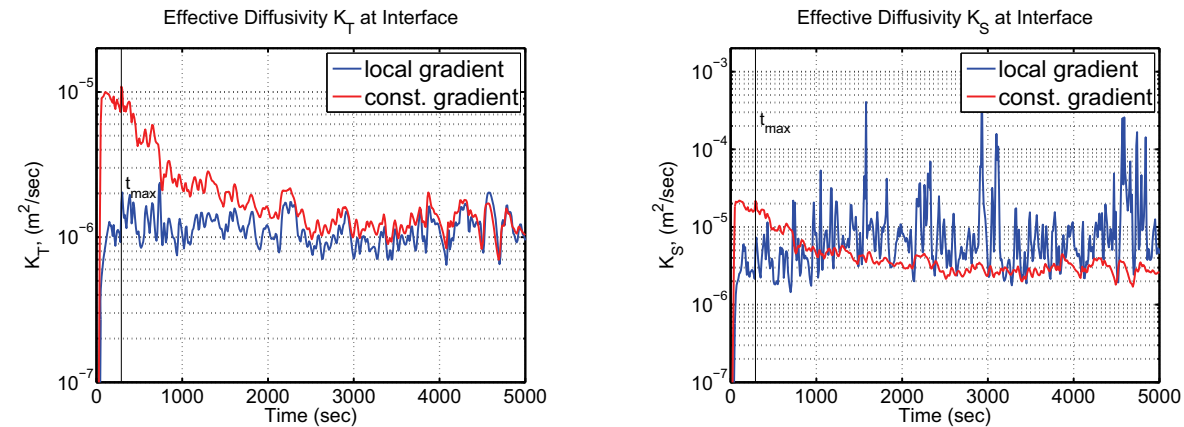
(a) $K_T(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_T(t, H/2)$ (rot), SF-layer(b) $K_S(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_S(t, H/2)$ (rot), SF-layer

Abbildung 4.21: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Blau kennzeichnet den Verlauf mit $\partial_z \langle \chi \rangle_h$, während die rote Kurve den Verlauf durch Verwendung von S_z wiedergibt. Durch das Zwei-Schichten Modell zeigt sich in beiden Definitionen K_χ und \widetilde{K}_χ eine erhebliche Abweichung, während K_χ (blau) jeweils auf etwa gleichbleibenden Niveau operiert, sinkt \widetilde{K}_χ (rot) nach Erreichen von t_{\max} deutlich ab.

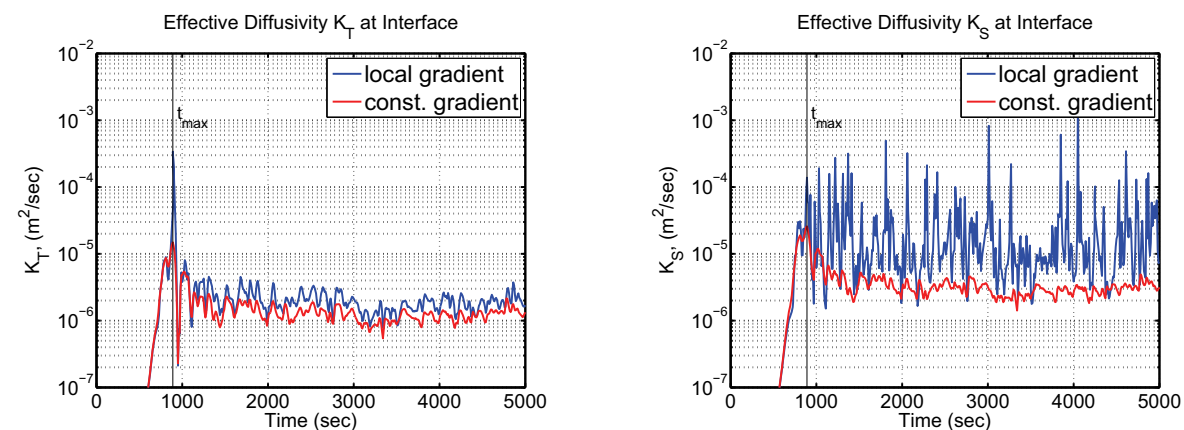
(a) $K_T(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_T(t, H/2)$ (rot), SF-linear(b) $K_S(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_S(t, H/2)$ (rot), SF-linear

Abbildung 4.22: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Blau kennzeichnet den Verlauf mit $\partial_z \langle \chi \rangle_h$, während die rote Kurve den Verlauf durch Verwendung von χ_z wiedergibt. Die Übereinstimmung von K_χ mit \widetilde{K}_χ bis kurz vor t_{\max} ist kennzeichnend für den Verlauf der linearen Schichtung.

zwischen der Zwei-Schichten Situation SF-layer und dem linear geschichteten Fall SF-linear zeigt jedoch eine etwa gleich große effektive Diffusion $\widetilde{K}_\chi^1(t_{\max}) \approx \widetilde{K}_\chi^2(t_{\max})$ für $\chi = T, S$, die sich aus einer Annäherung der entsprechenden turbulenten Flüsse F_T und F_S heraus ergeben.

Die linear geschichteten Ausgangssituationen werden in Abbildung 4.22 bis 4.25 gezeigt. Auffallend ist dabei die Übereinstimmung von jeweils K_χ mit \widetilde{K}_χ , $\chi = T, S$, die bis jeweils t_{\max} anhält. Bedingt durch den Vermischungsprozess weisen die lokalen Gra-

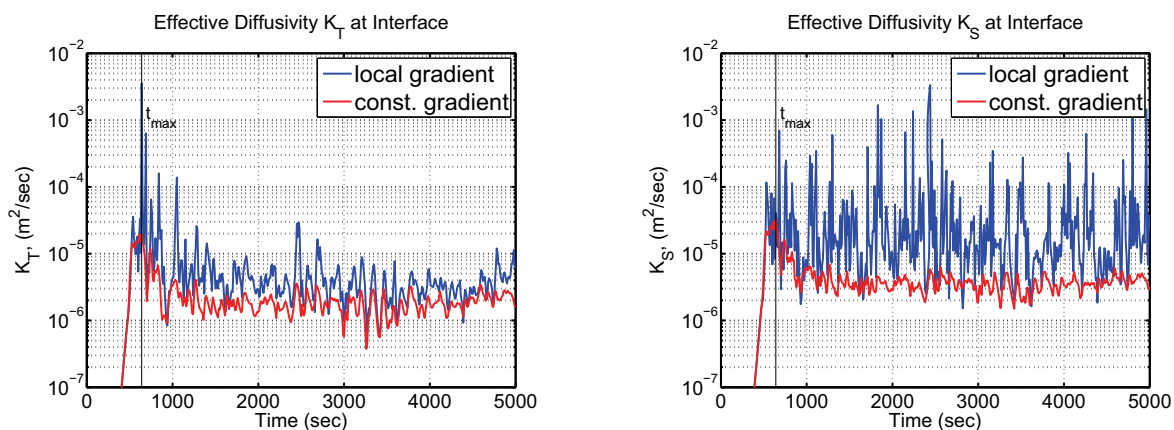
(a) $K_T(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_T(t, H/2)$ (rot), SF-3(b) $K_S(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_S(t, H/2)$ (rot), SF-3

Abbildung 4.23: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Blau kennzeichnet den Verlauf mit $\partial_z \langle \chi \rangle_h$, während die rote Kurve den Verlauf durch Verwendung von χ_z wiedergibt. Die Übereinstimmung von K_χ mit \widetilde{K}_χ bis kurz vor t_{\max} ist kennzeichnend für den Verlauf.

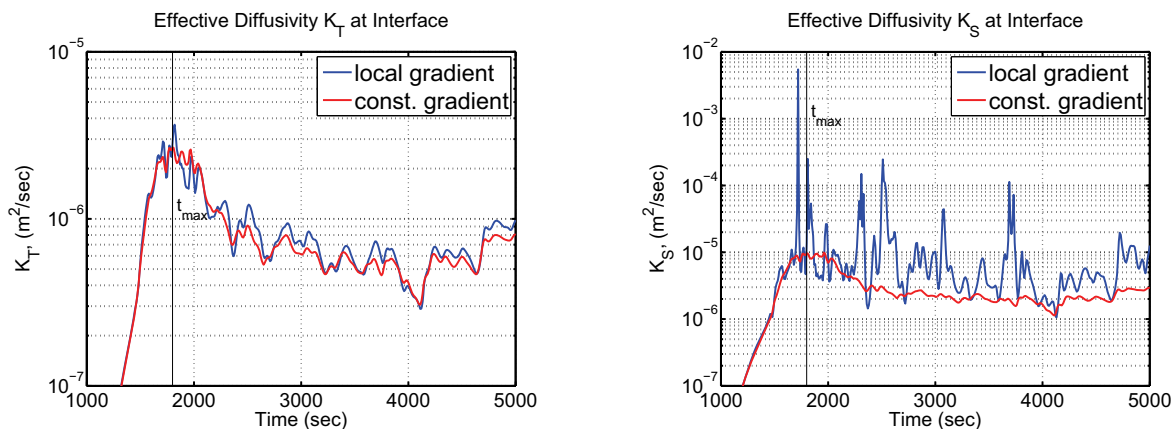
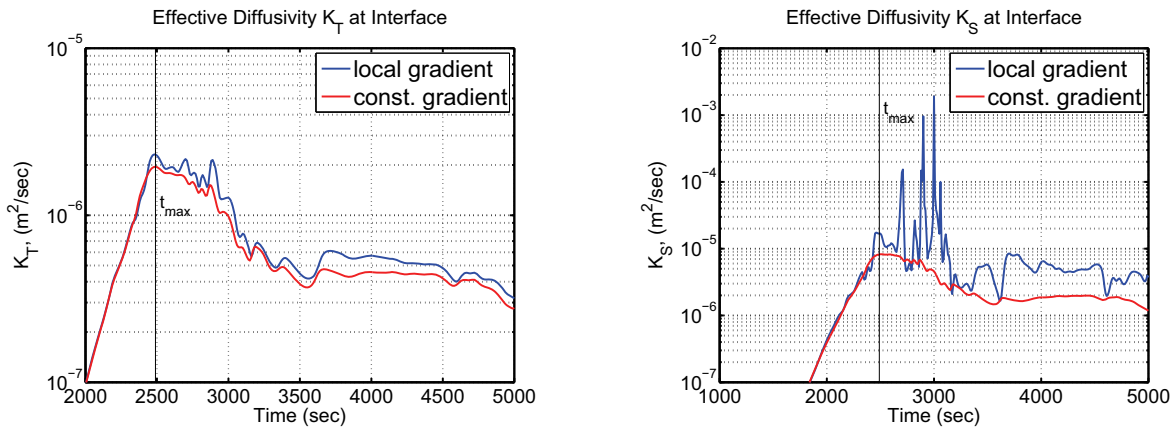
(a) $K_T(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_T(t, H/2)$ (rot), SF-4(b) $K_S(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_S(t, H/2)$ (rot), SF-4

Abbildung 4.24: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Blau kennzeichnet den Verlauf mit $\partial_z \langle \chi \rangle_h$, während die rote Kurve den Verlauf durch Verwendung von χ_z wiedergibt. Die Übereinstimmung von K_χ mit \widetilde{K}_χ bis kurz vor t_{\max} ist kennzeichnend für den Verlauf. Die effektive Diffusion wird durch \widetilde{K}_T über den gesamten Verlauf sehr gut wiedergegeben.

dienten (Abbildung 4.17) große Schwankungen auf, die sich in ebenfalls großen Schwankungen bei K_χ wiederfinden. Für die Temperaturkomponente ist in erster Näherung auch nach t_{\max} eine Übereinstimmung von K_T und \widetilde{K}_T zu beobachten, was der Tatsache zu verdanken ist, daß die Temperaturprofile (Abbildung 4.10(a)) erhalten bleiben. Die Salzgehaltsprofile hingegen verändern sich während der Simulation dramatisch (Abbildung 4.10(b), gepunktete Linie vor der Vermischung und punkt-gestrichelte Linie nach der Vermischung). Dies führt zu den großen Abweichungen von K_S und \widetilde{K}_S .

Der Verlauf der effektiven Diffusion wird nun weiter untersucht nachdem t_{\max} über-

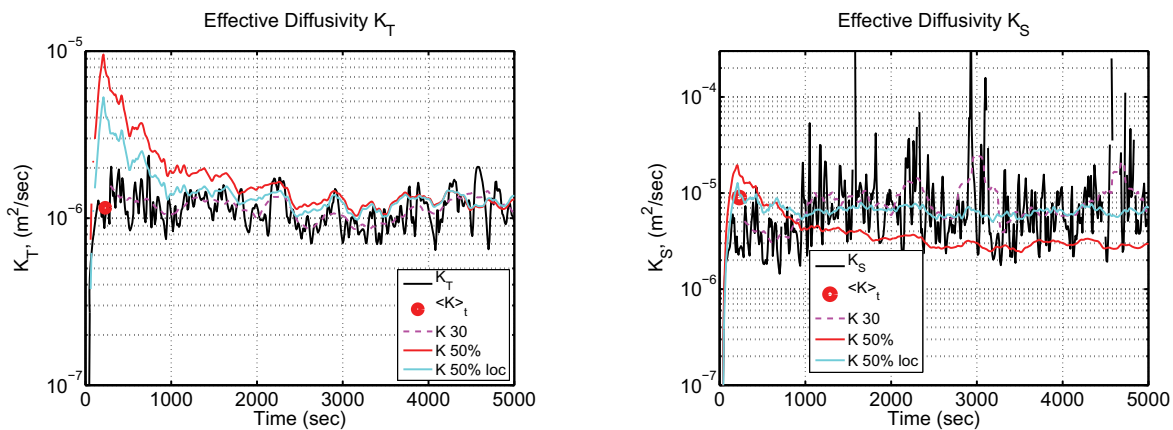


(a) $K_T(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_T(t, H/2)$ (rot), SF-5

(b) $K_S(t, H/2)$ (blau) und $\widetilde{K}_S(t, H/2)$ (rot), SF-5

Abbildung 4.25: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Blau kennzeichnet den Verlauf mit $\partial_z \langle \chi \rangle_h$, während die rote Kurve den Verlauf durch Verwendung von χ_z wiedergibt. Die Übereinstimmung von K_χ mit \widetilde{K}_χ bis kurz vor t_{\max} ist kennzeichnend für den Verlauf. Die effektive Diffusion wird durch \widetilde{K}_T über den gesamten Verlauf sehr gut wiedergegeben.

schritten wurde.



(a) K_T , SF-layer

(b) K_S , SF-layer

Abbildung 4.26: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Schwarz kennzeichnet den Verlauf von $K_\chi(t, H/2)$. Die rote Kurve ($K_\chi 50\%$) gibt den mittleren Verlauf von \widetilde{K}_χ über einen Bereich von 50% der Gebietshöhe wieder. Die cyanfarbene Linie ($K_\chi 50\% \text{ loc}$) zeigt die ermittelte Diffusion, mit den mittleren Gradienten $\chi_{50\%}$, was den Beitrag des abfallenden Gradienten innerhalb der Grenzschicht zeigt. Durch die gestrichelte magentafarbene Linie (K_{30}) wird der laufende Mittelwert von K_χ über 300 sec, ausgehend von t_{\max} wiedergegeben. Der rote Punkt ($\langle \widetilde{K} \rangle_t$) ist das zeitliche Mittel (von t_{\max} bis Simulationsende) der effektiven Diffusion K_χ .

Die Abbildungen 4.26 bis 4.30 zeigen verschiedene Beschreibungen der effektiven Diffusion. In diesen Abbildungen werden im einzelnen gezeigt:

- die effektive Diffusion für Temperatur und Salzgehalt $K_\chi(t, z)$ (schwarze Linie), $\chi = T, S$ nahe der Grenzschicht bei $z = H/2$

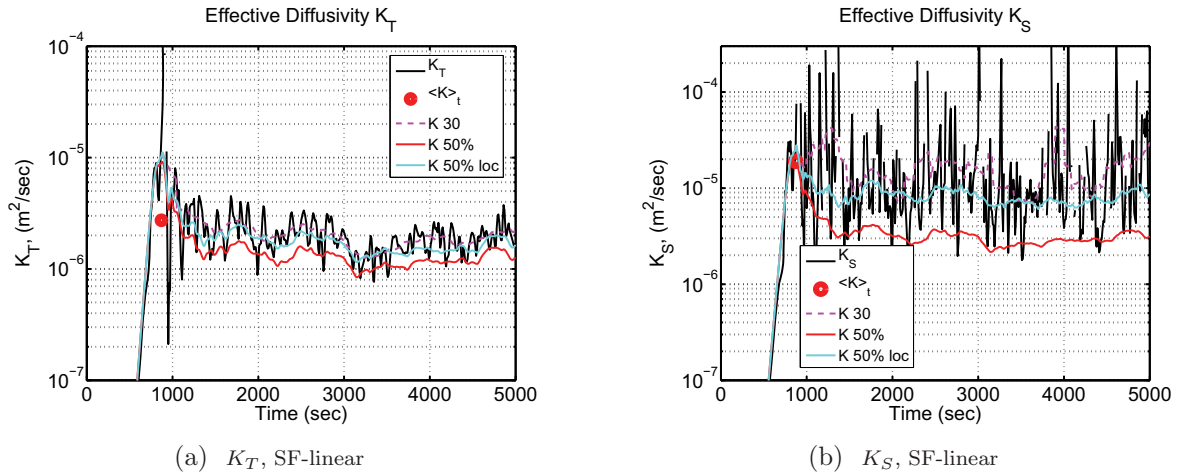


Abbildung 4.27: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Schwarz kennzeichnet den Verlauf von $K_\chi(t, H/2)$. Die rote Kurve ($K_\chi 50\%$) gibt den mittleren Verlauf von \widetilde{K}_χ über einen Bereich von 50% der Gebietshöhe wieder. Die cyanfarbene Linie ($K_\chi 50\% \text{ loc}$) zeigt die ermittelte Diffusion, mit den mittleren Gradienten ${}^{50\%}\chi$, was den Beitrag des abfallenden Gradienten innerhalb der Grenzschicht zeigt. Durch die gestrichelte magentafarbene Linie ($K30$) wird der laufende Mittelwert von K_χ über 300 sec, ausgehend von t_{\max} wiedergegeben. Der rote Punkt ($\langle K \rangle_t$) ist das zeitliche Mittel (von t_{\max} bis Simulationseende) der effektiven Diffusion K_χ .

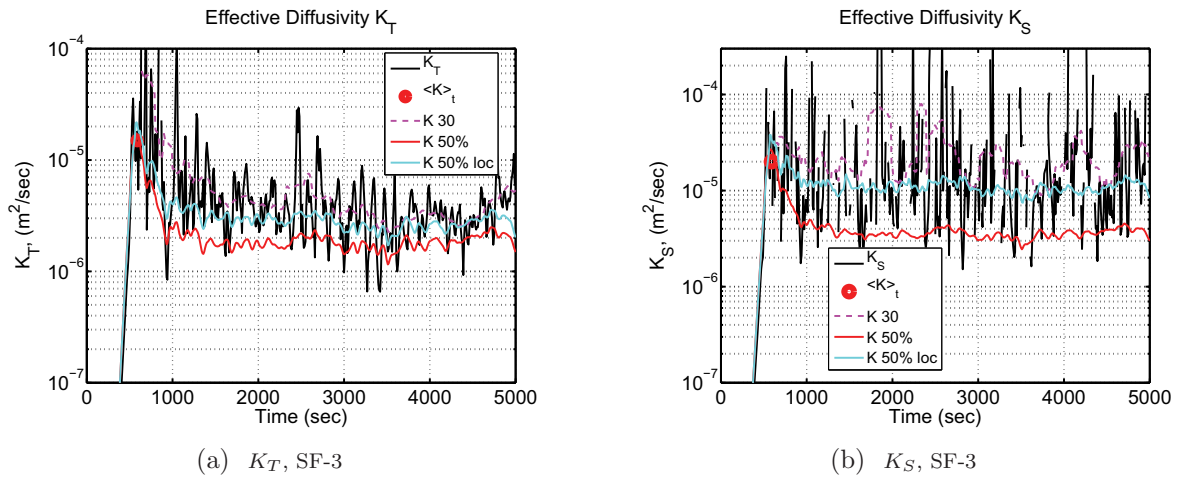


Abbildung 4.28: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Schwarz kennzeichnet den Verlauf von $K_\chi(t, H/2)$. Die rote Kurve ($K_\chi 50\%$) gibt den Verlauf von \widetilde{K}_χ über einen Bereich von 50% der Gebietshöhe wieder. Die cyanfarbene Linie ($K_\chi 50\% \text{ loc}$) zeigt die ermittelte Diffusion, mit den mittleren Gradienten ${}^{50\%}\chi$, was den Beitrag des abfallenden Gradienten innerhalb der Grenzschicht zeigt. Durch die gestrichelte magentafarbene Linie ($K30$) wird der laufende Mittelwert von K_χ über 300 sec, ausgehend von t_{\max} wiedergegeben. Der rote Punkt ($\langle K \rangle_t$) ist das zeitliche Mittel (von t_{\max} bis Simulationseende) der effektiven Diffusion K_χ .

- die zeitlich gemittelte effektive Diffusion nach t_{\max} (roter Punkt)

$$\widehat{\langle K_\chi \rangle}_t = - \frac{\langle F_\chi \rangle_t}{\langle \partial_z \langle \chi \rangle_h \rangle_t}, \quad (4.10)$$

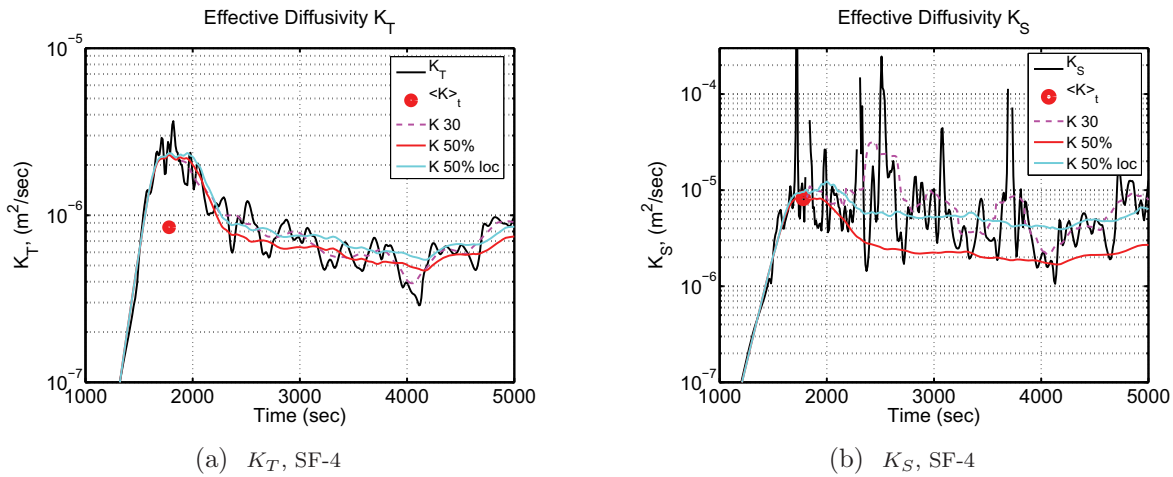


Abbildung 4.29: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Schwarz kennzeichnet den mittleren Verlauf von $K_\chi(t, H/2)$. Die rote Kurve ($K_\chi 50\%$) gibt den Verlauf von \widetilde{K}_χ über einen Bereich von 50% der Gebietshöhe wieder. Die cyanfarbene Linie ($K_\chi 50\% \text{loc}$) zeigt die ermittelte Diffusion, mit den mittleren Gradienten $\chi_{50\%}$, was den Beitrag des abfallenden Gradienten innerhalb der Grenzschicht zeigt. Durch die gestrichelte magentafarbene Linie ($K30$) wird der laufende Mittelwert von K_χ über 300 sec, ausgehend von t_{\max} wiedergegeben. Der rote Punkt ($\langle K \rangle_t$) ist das zeitliche Mittel (von t_{\max} bis Simulationsende) der effektiven Diffusion K_χ

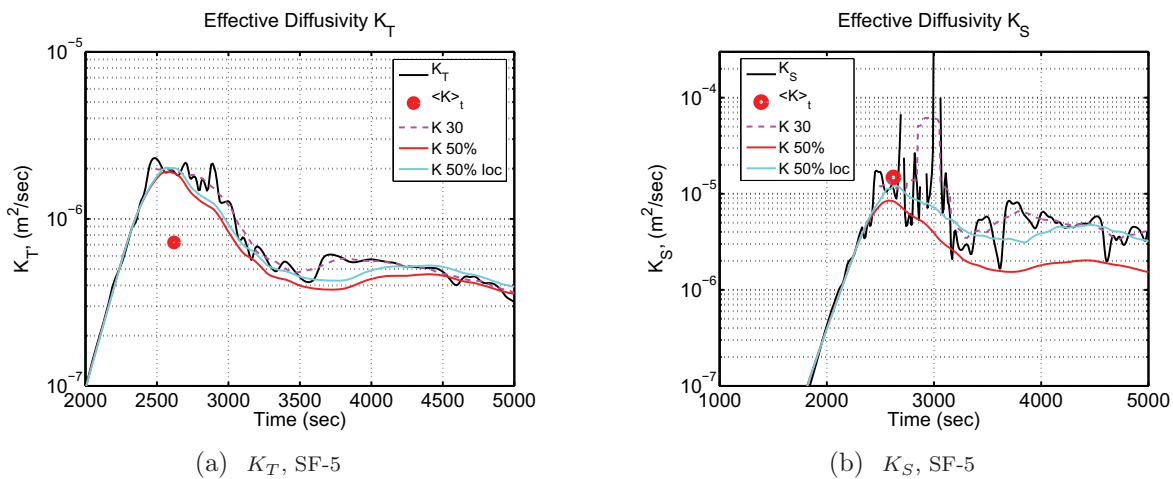


Abbildung 4.30: Zeitlicher Verlauf der effektiven Diffusion. Schwarz kennzeichnet den Verlauf von $K_\chi(t, H/2)$. Die rote Kurve ($K50\%$) gibt den mittleren Verlauf von \widetilde{K}_χ über einen Bereich von 50% der Gebietshöhe wieder. Die cyanfarbene Linie ($K50\% \text{loc}$) zeigt die ermittelte Diffusion, mit den mittleren Gradienten $\chi_{50\%}$, was den Beitrag des abfallenden Gradienten innerhalb der Grenzschicht zeigt. Durch die gestrichelte magentafarbene Linie ($K30$) wird der laufende Mittelwert von K_χ über 300 sec, ausgehend von t_{\max} wiedergegeben. Der rote Punkt ($\langle K \rangle_t$) ist das zeitliche Mittel von t_{\max} bis Simulationsende der effektiven Diffusion K_χ

nahe der Grenzschicht bei $z = H/2$.

- die laufenden Mittelwerte ($K_\chi 30$) von Temperatur, bzw. Salzgehalt über 300 sec

nahe der Grenzschicht $z = H/2$ (magenta gestrichelt), mit

$$K_{\chi 30} = \frac{1}{n} \sum_{t'=t-n/2}^{t+n/2} K_{\chi}(t', z), \quad \chi = T, S \quad (4.11)$$

- die mittlere effektive Diffusion (bezeichnet durch $K_{50\%}$, rote Linie) von Temperatur und Salzgehalt in einem Gebiet über 50% der Schichthöhe ausgehend von der Schichtmitte bei $z = H/2$. Dabei wurde \widetilde{K}_{χ} zugrundegelegt. (Einen mittleren Wert über 80% der Schichthöhe wurde ebenfalls berechnet ($K_{\chi 80\%}$), der Unterschied zwischen $K_{\chi 80\%}$ und $K_{\chi 50\%}$ war nur gering.)
- die mittlere effektive Diffusion (in den Abbildungen mit $K_{\chi 50\%loc}$ bezeichnet, cyan farbene Linie) für Temperatur und Salzgehalt. Dabei werden die absinkenden Gradienten innerhalb der Grenzschicht nach t_{eq} berücksichtigt. Die dadurch ermittelte effektive Diffusion $K_{\chi 50\%loc}(t)$, zeigte einen Verlauf entlang K_{χ} . Die verbleibenden Schwankungen werden durch Mittlung von $K_{\chi 50\%loc}(t, z)$ über 50% der Gebietshöhe beseitigt, so daß $K_{\chi 50\%loc}(t)$ in den einzelnen Abbildungen dargestellt wurde. (Es wurde ebenfalls ein Bereich von 80% ($K_{\chi 80\%loc}(t)$) bzw. 90% ($K_{\chi 90\%loc}(t)$) der Gebietshöhe betrachtet, was jedoch erst später berücksichtigt wird.)

Die Situation des Zwei-Schichten Falles SF-layer (Abbildung 4.26) zeigt wie schon Abbildung 4.21 eine gesonderte Situation. Der hohe Wert von \widetilde{K}_T , bzw. $K_{T 50\%}$ und $K_{T 50\%loc}$ um den Zeitpunkt t_{max} steht im Gegensatz zu $K_T(t_{max}, H/2)$. Für den Salzgehalt fallen die unterschiedlichen Werte der effektiven Diffusion deutlich geringer aus. Dies ist vor allem auf die gewählte scharfe Grenzschicht des Zwei-Schichten Modells zurückzuführen. Das Hauptinteresse gilt jedoch den charakteristischen Diffusionskoeffizienten K_T , bzw. K_S , die zur Beschreibung des gesamten Gebiets verwendet werden können.

Im entsprechenden linear geschichteten Fall SF-linear der die gleiche Anfangsstabilität wie SF-layer aufweist werden nahe der Grenzschicht bei $z = H/2$ turbulente Flüsse von Temperatur und Salzgehalt erreicht, die sehr ähnlich sind. Dies bekräftigt die Annahme von \widetilde{K}_{χ} anstatt K_{χ} , für $\chi = T, S$ für die effektive Diffusion bis zum Zeitpunkt t_{max} . Der anschließende Verlauf der effektiven Diffusion ausgedrückt durch \widetilde{K}_{χ} , $K_{\chi 50\%}$ oder $K_{\chi 50\%loc}$ ist jedoch charakteristisch für die beiden Situationen SF-layer, bzw. SF-linear und gibt die abfallenden Werte bei zunehmender Stabilität wieder.

Die linearen Situationen SF-linear, SF-3, SF-4 und SF-5 (Abbildungen 4.27 bis 4.30) zeigen Übereinstimmend den Verlauf der effektiven Diffusion $K_{\chi} \approx \widetilde{K}_{\chi}$ bis t_{max} . Der Zeitpunkt t_{max} ist durch den roten Punkt markiert, der $\overline{\langle K_{\chi} \rangle_t}$, $\chi = T, S$ wiedergibt. $\overline{\langle K_{\chi} \rangle_t}$, $\chi = T, S$ zeigt dabei, höhere Werte als die effektive Diffusion nach ${}^{eq}K_{\chi}(50\%) \approx \overline{\langle K_{\chi 50\%loc} \rangle_t}$ nach t_{eq} . Dies wird als Hinweis dafür angesehen, daß die turbulente Phase zwischen t_{max} und t_{eq} nicht betrachtet werden sollte.

Nr	$\widetilde{K}_T(t, \frac{H}{2})$	$\widetilde{K}_S(t, \frac{H}{2})$	$K_{T50\%}(t)$	$K_{S50\%}(t)$	$\langle K_{T50\%} \rangle_t$	$\langle K_{S50\%} \rangle_t$	\widetilde{T}
1	1,09	2,17	0,95	1,94	0,14	0,31	1,9
2	1,49	2,58	0,92	1,92	0,12	0,3	1,8
3	1,98	3,23	1,73	2,7	0,18	0,36	1,7
4	0,27	0,96	0,23	0,84	0,06	0,21	3,5
5	0,20	0,82	0,19	0,85	0,04	0,18	4,6

Tabelle 4.3: Effektive Diffusion von Temperatur \widetilde{K}_T und Salzgehalt \widetilde{K}_S in Einheiten von $\text{m}^2/\text{sec} \times 10^{-5}$ jeweils zum Zeitpunkt $t = t_{\max}$, bzw. zeitlich gemittelt ($\langle \cdot \rangle_t$ nach t_{eq}). $\widetilde{T} = \frac{\widetilde{K}_S}{\widetilde{K}_T}$ zeigt die effektive Lewiszahl bis t_{\max} . Die effektive Diffusion aus der Anfangsstabilität wird letztlich durch $K_{\chi 50\%}$ wiedergegeben.

Der laufende Mittelwert K_{30} (magentafarbene gestrichelte Linie) wird bei der Temperaturkomponente durch die $K_{T50\%}$ bzw. $K_{T50\%loc}$ weitgehend wiedergegeben. Bei der Salzgehaltskomponente eignet sich das laufende Mittel K_{30} aufgrund der starken Schwankungen nur bedingt zur Beschreibung.

$\langle K_S \rangle_t$ wird von $K_{S50\%loc}$ bzw. $K_{S50\%}$ für den Salzgehalt bei t_{\max} nicht wiedergegeben (vergleiche die Werte aus Tabelle 4.3 und 4.4). Für die Temperaturkomponente tritt dies noch deutlicher hervor. Der Grund hierfür ist das Absinken der Flüsse nach t_{\max} auf ein gleichbleibendes Niveau. Durch den mittleren Gradienten ${}^{50\%}S_z$ wird das charakteristische Absinken der effektiven Diffusion \widetilde{K}_S , das in den Simulationen nach dem Zeitpunkt t_{\max} beobachtet wird, teilweise kompensiert.

Nr	$\langle K_T \rangle_t(\frac{H}{2})$	$\langle K_S \rangle_t(\frac{H}{2})$	$K_{T50\%loc}(t)$	$K_{S50\%loc}(t)$	${}^{eq}K_{T50\%}$	${}^{eq}K_{S50\%}$
1	0,12	0,9	0,43	0,99	0,13	0,65
2	0,27	1,9	1,03	2,46	0,16	0,8
3	1,5	2	2,05	3,4	0,28	1,08
4	0,08	0,82	0,24	1	0,07	0,49
5	0,07	1,5	0,2	1,2	0,05	0,4

Tabelle 4.4: Effektive Diffusion von Temperatur K_T und Salzgehalt K_S in Einheiten von $\text{m}^2/\text{sec} \times 10^{-5}$ zum Zeitpunkt $t = t_{\max}$ nahe $z = H/2$ bzw. über 50% der Schichthöhe. Die effektive Diffusion nach t_{eq} , nachdem sich ein stabiles Temperatur- bzw. Salzgehaltsprofil etabliert hat, wird durch ${}^{eq}K_{\chi}(50\%) (\approx \langle K_{\chi 50\%loc} \rangle_t)$ wiedergegeben.

Die Zwei-Schichten Situation zeigt hier einen anderen Verlauf. Die beiden mittleren Werte $K_{T50\%}$ und $K_{T50\%loc}$ nähern sich erst im Verlauf gegeneinander an, was bereits in Abbildung 4.21(a) gezeigt wurde.

Die effektive Diffusion ist im einzelnen in Tabelle 4.3 (für die konstanten Gradienten der Hintergrundschichtung) und in Tabelle 4.4 (für die lokalen Gradienten und ${}^{50\%}\chi_z$) zusammengefasst.

Das Anwachsen der effektiven Diffusion K_T und K_S wird durch lineare Theorie bestätigt. Merryfield und Grindler [51], Merryfield [48], Radko [60], Schmitt [66] gingen von Bedingungen aus, die zur Maximierung der effektiven Diffusion K_T , bzw. K_S führte.

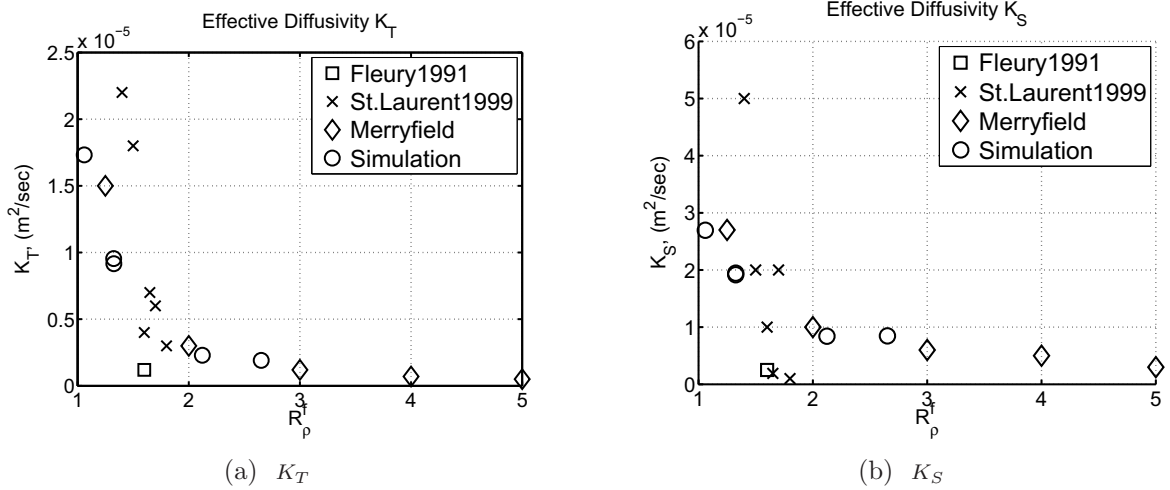


Abbildung 4.31: Effektive Diffusionskoeffizienten ermittelt von Fleury und Lueck [16] (Quadrat). Laurent und Schmitt [39] (Kreuze) geben die anhand der NATRE Messreihe ermittelten Werte wieder. Merryfield und Grinder [51] (Rauten) zeigen für ein breites Stabilitätsspektrum die effektive Diffusion. Die hier ermittelten Werte $K_{\chi}50\%(t_{\max})$ werden durch die Kreise wiedergegeben.

Durch $K_{\chi}50\%(t_{\max})$, $\chi = T, S$ werden diese ebenfalls wiedergegeben. Die effektive Diffusion von Laurent und Schmitt [39], Fleury und Lueck [16] und Merryfield und Grinder [51] werden in Abbildung 4.31 zusammen mit $K_{\chi}50\%(t_{\max})$, $\chi = T, S$ (schwarze Kreise) wiedergegeben. Die von Radko [60] ermittelten Koeffizienten K_T und K_S sind in Abbildung 4.31 nicht aufgeführt, das jeweilige Stabilitätsverhältnis war nicht angegeben.

Das anschließende Abfallen der Diffusion ist durch die auftretende turbulente Vermischung bedingt, die nicht mit einbezogen wurde. Im Falle einer Betrachtung durch die lokalen Gradienten wird der maximale Wert $\widetilde{K}_{\chi}(t_{\max}, H/2)$ (bzw. der gemittelten Größe $K_{\chi}50\%(t_{\max})$) ebenfalls durch $K_{\chi}50\%loc(t_{\max})$ bestätigt. Durch die, innerhalb der Grenzschicht abfallenden Gradienten sinkt die effektive Diffusion $K_{\chi}50\%loc(t)$, $\chi = T, S$ weniger stark ab, als bei \widetilde{K}_{χ} .

${}^{\text{eq}}K_{\chi}(\Omega\%)$ (entsprechend durch Gleichung (4.4) ermittelt), für $\chi = T, S$ und $\Omega = 50, 80, 90$ stellt hier eine Charakterisierung der effektiven Diffusion der gesamten Schicht dar, nachdem die Vermischung stattgefunden hat. Hierfür wird dann die Stabilität innerhalb der Schicht durch ${}^{\text{eq}}R_{\rho}^f(\Omega\%)$ (Gleichung (4.9)) zugrundegelegt. Das Profil der zeitlich gemittelten Stabilität nach t_{eq} (Abbildung 4.33(a))

$${}^{\text{eq}}R_{\rho}^f(z) := \frac{\alpha \langle \partial_z \langle T \rangle_h \rangle_t(z)}{\beta \langle \partial_z \langle S \rangle_h \rangle_t(z)} \quad (4.12)$$

zeigt sich konsistent mit den Werten von ${}^{\Omega\%}R_{\rho}^f$, $\Omega = 50, 80, 90$ (Tabelle 4.5).

Radko [61] ermittelte (durch Simulation) für die effektive Diffusion von Temperatur

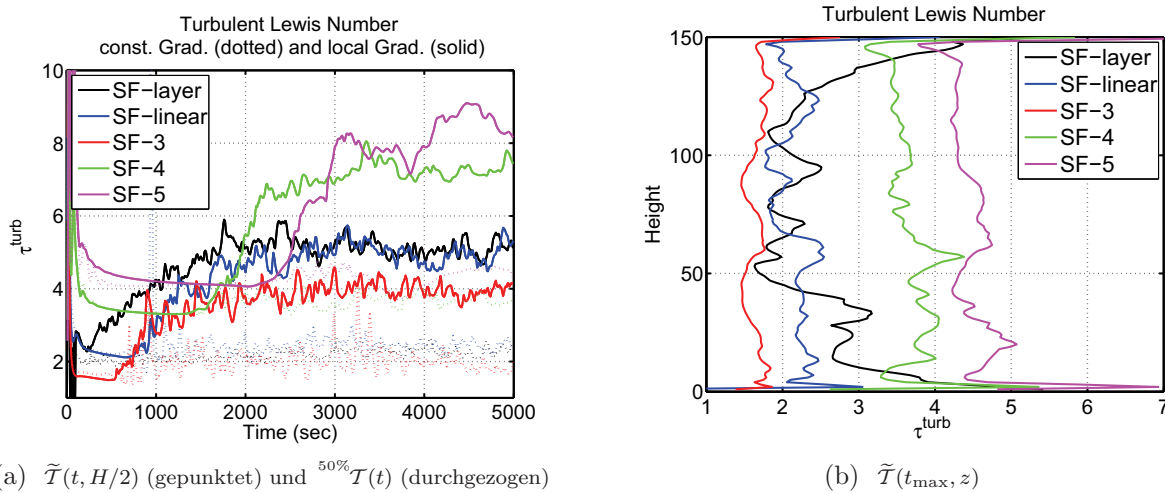
(a) $\tilde{T}(t, H/2)$ (gepunktet) und ${}^{50\%}\tilde{T}(t)$ (durchgezogen)(b) $\tilde{T}(t_{\text{max}}, z)$

Abbildung 4.32: (a) Turbulente Lewiszahl im zeitlichen Verlauf. Die gepunktete Linie gibt \tilde{T} für $\tilde{K}_\chi(t, H/2)$ wieder, während die durchgezogene Linie ${}^{50\%}\tilde{T}$ für $K_\chi 50\%loc$ beschreibt. Turbulente Lewiszahl \tilde{T} im zeitlichen Verlauf (a) und im Profil zum Zeitpunkt t_{max} (b).

und Salzgehalt, zwischen einzelnen Schichten, Werte von

$$\begin{aligned} \text{Radko } K_T &= 1,2 - 9 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec} \\ \text{Radko } K_S &= 2,5 - 20 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec} \end{aligned}$$

bei $1 \leq R_\rho^f \leq 2$ und deckt durch die Simulationen ein breiteres Spektrum von R_ρ^f ab, als Schmitt [70] durch die Messreihen beschreiben konnte.

Die hier ermittelte effektive Diffusion gibt die Situation recht gut wieder. Einzig der von Fleury und Lueck [16] vorgestellte Wert fällt sehr gering aus, was darauf zurückzuführen sein kann, daß bei den **C-SALT** Messreihen eine hohe Scherung zwischen den Schichten beobachtet wurde (Kunze [35]).

Das Verhältnis der effektiven Diffusion der konstanten Gradienten ergibt die turbulente oder effektive Lewiszahl \tilde{T} und ist dargestellt durch

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{K}_S(t, z)}{\tilde{K}_T(t, z)} \quad (4.13)$$

Abbildung 4.32(a) (gepunktete Linie) zeigt den Verlauf der turbulenten Lewiszahl \tilde{T} , während Abbildung 4.32(b) das Profil bei t_{max} von \tilde{T} zeigt. Damit stellt sich heraus, daß die effektive Diffusion von Salzgehalt \tilde{K}_S mit zunehmender Stabilität an Bedeutung gegenüber \tilde{K}_T gewinnt.

Ebenso wurde die turbulente Lewiszahl für die neu entstehenden Gleichgewichtsfälle

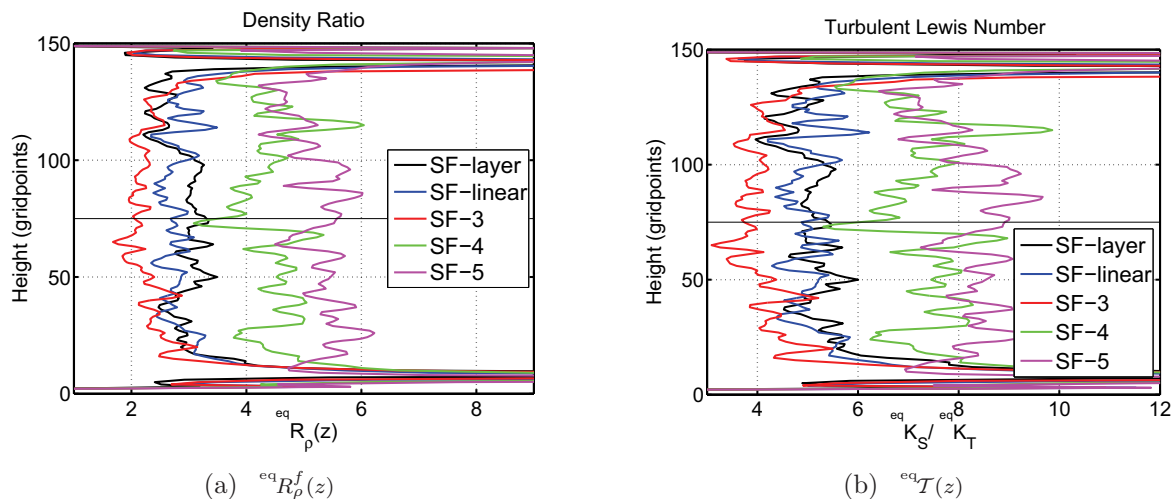


Abbildung 4.33: Profil der zeitlich gemittelten Stabilität ${}^{eq}R_\rho^f$ (a) und der zeitlich gemittelten turbulenten Lewiszahl ${}^{eq}T$ (b) ab t_{eq} .

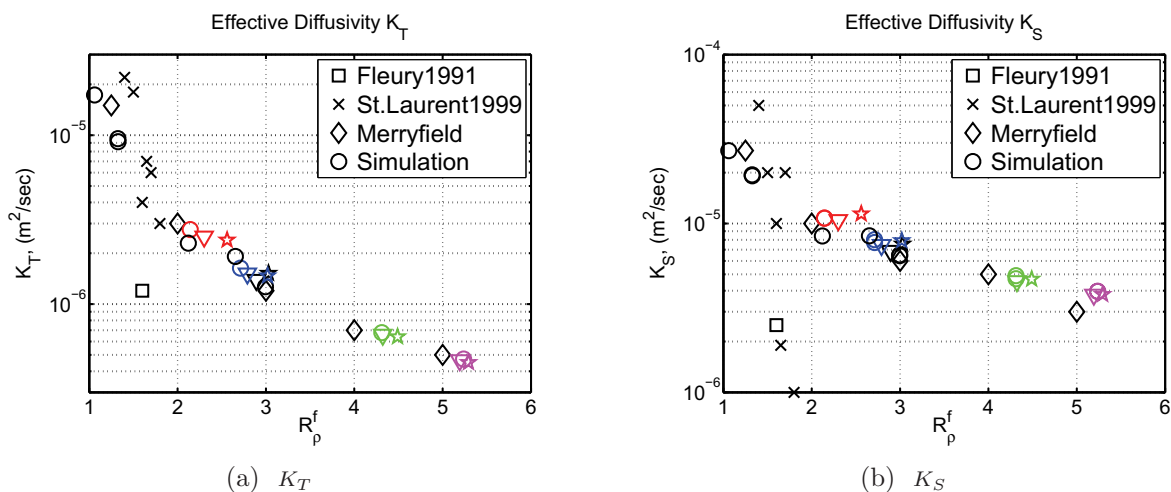


Abbildung 4.34: Effektive Diffusion ermittelt von Fleury und Lueck [16] (Quadrat). Laurent und Schmitt [39] (Kreuze) geben die anhand der NATRE Messreihe ermittelten Werte wieder. Merryfield und Grindler [51] (Rauten) zeigen für ein breites Stabilitätsspektrum die effektive Diffusion. Die hier ermittelten Werte $K_\chi 50\%(t_{max})$ werden durch die Kreise wiedergegeben. Die farbigen Kreise bezeichnen dabei die effektive Diffusion ${}^{eq}K_\chi(50\%) (\approx \langle K_\chi 50\%loc \rangle_t)$ nach Erreichen des Gleichgewichtes. ${}^{eq}K_\chi(80\%) (\approx \langle K_\chi 80\%loc \rangle_t)$ ist durch die farbigen Dreiecke und ${}^{eq}K_\chi(90\%) (\approx \langle K_\chi 90\%loc \rangle_t)$ durch die farbigen Sterne gekennzeichnet, dabei wurde jeweils ein Stabilitätsverhältnis von ${}^{eq}R_\rho^f(\Omega\%)$, $\Omega = 50, 80, 90$ angenommen.

für den zeitlichen Verlauf durch

$${}^{\Omega\%}T(t) = \frac{K_S \Omega \% loc(t)}{K_T \Omega \% loc(t)}, \quad \text{für } \Omega = 50, 80, 90 \quad (4.13 \text{ b})$$

ermittelt. In Abbildung 4.32(a) ist ${}^{50\%}T$ wiedergegeben (durchgezogene Linien).

Nr	R_ρ^f	${}^{\text{eq}}R_\rho^f(50\%)$	${}^{\text{eq}}R_\rho^f(80\%)$	${}^{\text{eq}}R_\rho^f(90\%)$	$\langle {}^{50\%}\mathcal{T} \rangle_t$	$\langle {}^{80\%}\mathcal{T} \rangle_t$	$\langle {}^{90\%}\mathcal{T} \rangle_t$
1	1,33	3	2,9	3	5,1	5,1	5,1
2	1,33	2,7	2,8	3	4,9	5	5,5
3	1,06	2,1	2,3	2,5	3,9	4,1	4,7
4	2,12	4,3	4,3	4,5	7,3	7,2	7,5
5	2,66	5,2	5,2	5,3	8,4	8,1	8,4

Tabelle 4.5: Stabilität der inneren Schicht im zeitlichen Mittel, nachdem sich die Gradienten von Temperatur und Salzgehalt stabilisiert haben. $\langle {}^{\Omega\%}\mathcal{T} \rangle_t$ bezeichnet die entsprechende turbulente Lewiszahl. Zum Vergleich wird noch einmal R_ρ^f aus Tabelle 4.2 aufgeführt.

Die mittlere turbulente Lewiszahl nach Erreichen von t_{eq}

$${}^{\text{eq}}\mathcal{T}(z) := \frac{\langle K_S \rangle_t(z)}{\langle K_T \rangle_t(z)} \quad (4.14)$$

ergibt ein Profil (Abbildung 4.33(b)) aus dem sich die Werte $\langle {}^{\Omega\%}\mathcal{T} \rangle_t$ (Tabelle 4.5) ableiten lassen. Es stellte sich heraus, daß die gemittelten Werte, unabhängig davon wie sie ermittelt wurden, ${}^{\text{eq}}\mathcal{T}(\Omega\%)$ oder $\langle {}^{\Omega\%}\mathcal{T} \rangle_t$ zum selben Ergebnis führten. Dies gilt ebenso für die zeitlich gemittelten Werte der Stabilität und der effektiven Diffusion nach t_{eq} .

Abbildung 4.34 zeigt wie schon Abbildung 4.31 der effektiven Diffusion von Temperatur und Salzgehalt. Dabei werden auch die Werte beim Erreichen der neu entstandenen Schichtung innerhalb der Grenzschicht berücksichtigt. Die verschiedenen Werte über 50%, 80% und 90% der Gebietshöhe zeigen dabei lediglich bei SF-3 (rote Markierungen) eine geringe Abweichung in der Stabilität ${}^{\text{eq}}R_\rho^f$ und der turbulenten Lewiszahl. Im übrigen bestätigt die ermittelte effektive Diffusion die in Abbildung 4.34 gezeigten übrigen Werte.

Nusseltzahlen

In mehreren Studien wurden die Nusseltzahlen (die dimensionslosen Flüsse) verwendet. Aus diesem Grund werden die Nusseltzahlen hier ebenfalls dargestellt, die z.B. mit Radko [60, 61] verglichen werden können. Die Nusseltzahlen ergeben sich aus der effektiven Diffusion durch

$$\text{Nu}_\chi = \frac{K_\chi}{\kappa_\chi}, \quad \chi = T, S$$

wobei im einzelnen die Nusseltzahlen für K_χ , \widetilde{K}_χ , $K_\chi 50\%$, $K_\chi 50\% \text{loc}$, ${}^{\text{eq}}K_\chi(50\%)$ ermittelt wurden und κ_χ den molekularen Diffusionskoeffizienten bezeichnet. Zur Unterscheidung werden die Nusseltzahlen mit Nu_χ , $\widetilde{\text{Nu}}_\chi$, $\text{Nu}_\chi 50\%$, $\text{Nu}_\chi 50\% \text{loc}$, ${}^{\text{eq}}\text{Nu}_\chi$ bezeichnet.

Tabelle 4.6 (Temperatur) und 4.7 (Salzgehalt) zeigen die mittleren Werte. $\text{Nu}_\chi 50\%$ und $\text{Nu}_\chi 50\% \text{loc}$ für $\chi = T, S$

Auf die Abbildung der Nusseltzahlen wird verzichtet, da sich diese aus den Abbildungen 4.21 bis 4.25 der effektiven Diffusion K_T und K_S ergibt.

Nr	$\text{Nu}_T 50\%(t_{\max})$	$\text{Nu}_T 50\% \text{loc}(t_{\max})$	$\langle \text{Nu}_T 50\% \rangle_t$	${}^{\text{eq}}\text{Nu}_T(50\%)$
1	53	29,8	12,9	10,7
2	60,7	69,8	11	14,1
3	121,4	137,5	15,9	23,5
4	16,3	16,7	6,2	6,9
5	13,5	14,4	4,9	5,3

Tabelle 4.6: Nusseltzahlen von Temperatur Nu_T über 50% der Schichthöhe. $\text{Nu}_T 50\% \text{loc}$ wurde dabei mit Hilfe von $K_T 50\%$ ermittelt, während $\text{Nu}_T 50\% \text{loc}$ auf $K_T 50\% \text{loc}$ zurückzuführen ist. $\langle \cdot \rangle_t$ bezeichnet den zeitlich gemittelten Wert nach der turbulenten Vermischung. $\text{Nu}_T 50\%(t_{\max})$ repräsentiert (entsprechend zur effektiven Diffusion) die Nusseltzahl bei t_{\max} der Anfangsstabilität, während ${}^{\text{eq}}\text{Nu}_T(50\%)$ ($\approx \langle \text{Nu}_T 50\% \text{loc} \rangle_t$) die mittlere Nusseltzahl nach t_{eq} darstellt.

Nr	$\text{Nu}_S 50\%(t_{\max})$	$\text{Nu}_S 50\% \text{loc}(t_{\max})$	$\langle \text{Nu}_S 50\% \rangle_t$	${}^{\text{eq}}\text{Nu}_S(50\%)$
1	1041	658	268	442
2	1231	1642	238	576
3	1760	2269	283	774
4	562	638	191	388
5	557	803	173	323

Tabelle 4.7: Nusseltzahlen des Salzgehaltes Nu_S gemittelt über 50% der Schichthöhe. $\text{Nu}_S 50\% \text{loc}$ wurde dabei mit Hilfe von $K_S 50\%$ ermittelt, während $\text{Nu}_S 50\% \text{loc}$ auf $K_S 50\% \text{loc}$ zurückzuführen ist. $\langle \cdot \rangle_t$ bezeichnet den zeitlich gemittelten Wert nach der turbulenten Vermischung. $\text{Nu}_S 50\%(t_{\max})$ repräsentiert (entsprechend zur effektiven Diffusion) die Nusseltzahl bei t_{\max} der Anfangsstabilität, während ${}^{\text{eq}}\text{Nu}_S(50\%)$ ($\approx \langle \text{Nu}_S 50\% \text{loc} \rangle_t$) die mittlere Nusseltzahl nach t_{eq} darstellt.

Von Radko [60] wurden die Nusseltzahlen zur Parametrisierung der effektiven Diffusion verwendet. Radko ermittelte dabei

$$\begin{aligned} \text{Nu}_T &= 147, & \gamma &= 0,8547, & R_\rho^f &= 1,075 \\ \text{Nu}_T &= 112, & \gamma &= 0,8478, & R_\rho^f &= 1,125 \end{aligned}$$

Für den vorliegenden Fall SF-3 mit $R_\rho^f = 1,06$ sind die von Radko vorgestellten Nusseltzahlen vergleichbar. Ein vier-drittel Flußgesetz für die Nusseltzahlen wurde in Abhängigkeit der Stabilität und des Temperaturgradienten erstellt. Damit konnte die weitere Entwicklung vorgegebener Schichten bestimmte werden. Die einzelnen Simulationen zur Ermittlung der einzelnen Nusseltzahlen beschrieb Radko jedoch nicht.

Sehr viel geringere Nusseltzahlen von Temperatur und Salzgehalt wurden von Shen [72] ermittelt. Diese zeigen mit

$$\begin{aligned} \text{Nu}_T - 1 &\approx 3 \\ \text{Nu}_S - 1 &\approx 10 \end{aligned}$$

den im Vergleich zum Salzgehalt geringeren Temperaturfluß. Die geringen Nusseltzahlen lassen sich auf die von Shen verwendeten geringen Rayleighzahlen $Ra_T \sim 10^2$ (bzw. $Ra_S = Ra_T/R_\rho^f$) zurückführen.

Radko [61] beschrieb die dimensionslosen Flüsse in der Grenzschicht durch

$$\text{Nu}_S \tau \approx C \text{Ra}_S^{1/3} S_z \quad (4.15)$$

wobei S_z den Salzgehaltsgradienten der Hintergrundschichtung bezeichnet. In einem Mehrstufen-Modell wurden damit die zu erwartenden Flüsse in Abhängigkeit der Stabilität R_ρ^f und des Salzgehaltsgradienten berechnet.

Die Ergebnisse von Stellmach et al. [77] lieferten für den Salzfingerfall eine thermale Nusseltzahl von

$$\text{Nu}_T \approx 200$$

wobei $\sigma = 7$, $\tau = \frac{1}{30}$ und $R_\rho^f = 1,1$ gewählt wurden. Dies führte zu einer effektiven Diffusion von $K_T = 3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}$ und lag im Bereich der bereits früher ermittelten Werte von Radko [60]. Im Nachhinein lassen sich die von Stellmach et al. verwendeten Voraussetzungen nur schwer nachvollziehen. Möglich war dies nur bei der Gitterauflösung, welche weit größer war als die ermittelte Fingerbreite. Einzelne Salzfinger konnten dadurch nicht aufgelöst werden. Die effektive Diffusion mußten deswegen bereits in parametrisierter Form vorhanden gewesen sein, wobei sich Nu_S aus Nu_T ergibt und daher nicht angegeben wurde. Die Verwendung der Nusseltzahlen brachte keine besonderen Vorteile. Im weiteren werden die Nusseltzahlen nicht berücksichtigt, sondern dienen dem Vergleich mit früheren Arbeiten.

Vergleich der Coxzahlen

Die Coxzahlen für Temperatur und Salzgehalt ermöglichen ebenfalls Rückschlüsse auf die effektive Diffusion K_T und K_S . Die Berechnung der Coxzahlen über einen turbulenten Ansatz zeigt erwartungsgemäß eine sehr gute Übereinstimmung mit der oben gezeigten effektiven Diffusion \tilde{K}_T und \tilde{K}_S bis t_{\max} . Nach Erreichen der Vermischungsphase zeigt sich jedoch keine erkennbare Übereinstimmung zwischen der effektiven Diffusion \tilde{K}_χ (bzw. K_χ) und K_χ^C . Dieser Umstand wird später noch diskutiert.

Die Coxzahlen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Cox}_\chi &= \frac{\langle |\nabla \chi'|^2 \rangle_h}{\partial_z \langle \chi \rangle_h^2} \\ &= \frac{\langle |\partial_x \chi'|^2 \rangle_h}{\partial_z \langle \chi \rangle_h^2} + \frac{\langle |\partial_z \chi'|^2 \rangle_h}{\partial_z \langle \chi \rangle_h^2} = \text{Cox}_\chi^h + \text{Cox}_\chi^z. \end{aligned} \quad (4.1)$$

für $\chi = T, S$.

Ausgehend vom stationären Fall $\partial_t \langle \chi'^2 \rangle_h = 0$ folgt für die effektive Diffusion

$$K_\chi^C = \kappa_\chi \text{Cox}_\chi \quad (4.16)$$

Hingegen wird im nicht-stationären Fall $\partial_t \langle \chi'^2 \rangle_h \neq 0$ die effektive Diffusion durch

$$K_\chi^C = \frac{\kappa_\chi \langle (\nabla \chi')^2 \rangle_h + \frac{1}{2} \partial_t \langle \chi'^2 \rangle_h}{(\partial_z \langle \chi \rangle_h)^2} \quad (4.2)$$

für $\chi = T, S$ wiedergegeben. Die Herleitung hierzu wurde im Anhang A.4 auf Seite 103 skizziert.

Die Coxzahlen Cox_χ , bzw. die effektive Diffusion K_χ^C wurde jeweils für konstante Gradienten $\partial_z \langle \chi \rangle_h(z) = \chi_z(z) = \text{konst.}$ ermittelt. Für die Anfangsphase bis t_{\max} war dieses Vorgehen gerechtfertigt. Die hier ermittelten Coxzahlen bei t_{\max} sind in Tabelle 4.8 auf-

Nr	Cox_T^h	Cox_S^h	Cox_T^z	Cox_S^z	$\frac{\text{Cox}_T^z}{\text{Cox}_T^h}$	$\frac{\text{Cox}_S^z}{\text{Cox}_S^h}$
1	170	931	110	720	0,64	0,77
2	18,3	141	11,6	107	0,63	0,76
3	63,6	288	20,9	165	0,33	0,57
4	8,4	148	5,6	157	0,67	1,06
5	7,2	185	1,1	48	0,14	0,26

Tabelle 4.8: Die Coxzahlen von T und S nahe der Grenzschicht bei $z = H/2$, jeweils zum Zeitpunkt t_{\max} . Im Vergleich zu den horizontalen Coxzahlen sind die vertikalen sehr viel geringer. Das Verhältnis der Coxzahlen $\frac{\text{Cox}_\chi^z}{\text{Cox}_\chi^h}$ liegt im Bereich der von Taylor [83] ermittelten Werte.

geführt und werden in Abbildung 4.35, bzw. 4.36 gezeigt. Dabei weisen die horizontalen gegenüber den vertikalen Coxzahlen sehr große Unterschiede auf. Das Verhältnis der

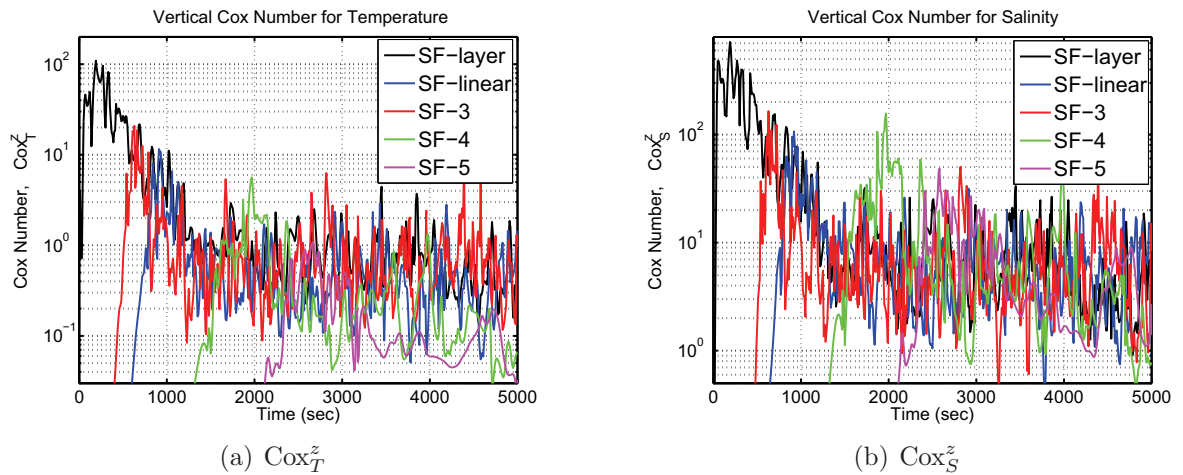


Abbildung 4.35: Vertikale Coxzahlen für Temperatur (a) und Salzgehalt (b).

horizontalen und vertikalen Coxzahlen weist dabei sehr unterschiedliche Werte auf mit

$$0,14 \leq \frac{\text{Cox}_T^z}{\text{Cox}_T^h} < 0,7$$

und deutlich höheren Werten für den Salzgehalt mit

$$0,26 \leq \frac{\text{Cox}_S^z}{\text{Cox}_S^h} \leq 1,06.$$

Die Werte sind dabei breit gestreut. Ein Zusammenhang mit der Stabilität ist in den vorliegenden Simulationen nicht erkennbar. Hingegen beschrieben Merryfield und Grinder

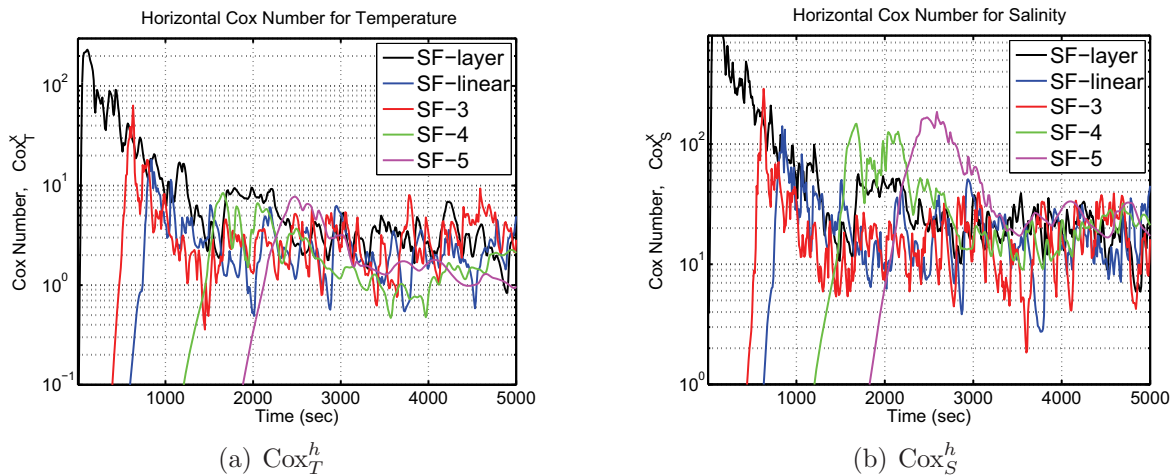


Abbildung 4.36: Horizontale Coxzahlen für Temperatur (a) und Salzgehalt (b).

für die Temperaturkomponente ein Verhältnis von

$$\frac{Cox_T^z}{Cox_T^h} \approx 1, \quad \text{für } R_\rho^f \sim 1$$

und

$$\frac{Cox_T^z}{Cox_T^x} \approx 0,2, \quad \text{für } R_\rho^f = 20.$$

Ein ähnliches Verhältnis wurde in Tankexperimenten von Taylor [83] mit $0,1 \leq \frac{Cox_T^z}{Cox_T^x} \leq 0,7$ bestätigt und war unabhängig von der Stabilität R_ρ^f . Im Vergleich zu den hier ermittelten Coxzahlen sind die Verhältnisse von Merryfield und Grinder und Taylor in einem ähnlichen Wertebereich anzutreffen.

Die salinen Coxzahlen blieben in der Literatur bisher unerwähnt, so daß nicht bekannt ist ob diese jemals gemessen oder anderweitig ermittelt wurden. In den hier vorliegenden Simulationen wurden die Coxzahlen für den Salzgehalt Cox_S ermittelt und fallen höher aus, als Cox_T . Bei der Zwei-Schichten Situation (SF-layer) sind erheblich höhere Coxzahlen zu beobachten als dies im entsprechenden linear geschichteten Experiment (SF-linear) der Fall ist. Dies ist auf die besondere Situation zurückzuführen, da bei SF-layer die Turbulenzen beim Übergang zur Vermischung des Gebiets deutlich stärker hervortreten als in einem linear geschichteten Gebiet.

Aus den Beobachtungen und Messungen von Treppenstufen östlich von Barbados, z.B. während der **C-SALT**, **NATRE** oder **SFTRE** Messreihen (Abbildung 2.1 und 2.2 für

ein exemplarisches Profil), wurden für eine typische Temperaturdifferenz von $\Delta T \approx 1^\circ\text{C}$ die Coxzahlen von Temperatur mit

$$\text{Cox}_T \approx 5$$

bestimmt (Fleury und Lueck [16], Marmorino et al. [41]). Dabei konnte festgestellt werden, daß die Coxzahl Cox_T mit $\frac{1}{T_z}$ skalierte und wurde durch

$$\text{Cox}_T = 0,91 T_z^{-1,08}$$

beschrieben, wobei T_z den mittleren Temperaturgradienten bezeichnet. Aus Symmetriegründen wurde die Coxzahl mit $\text{Cox}_T = 3\text{Cox}_T^x$ angegeben, wobei horizontal über das Messgebiet gemittelt wurde. Unter stationärer Annahme ermittelten Fleury und Lueck [16] den Temperaturfluss mit

$${}^{\text{Cox}}F_T = g\alpha\kappa_T\text{Cox}_T T_z. \quad (4.17)$$

Die effektive Diffusion (schwarzes Quadrat in Abbildung 4.34) wurde mit

$$\begin{aligned} {}^{\text{Fleury}}K_T &= \frac{{}^{\text{Cox}}F_T}{g\alpha T_z} = 1,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec} \\ {}^{\text{Fleury}}K_S &= K_T \frac{R_\rho^f}{\gamma} = 2,5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec} \end{aligned} \quad (4.18)$$

ermittelt. Dabei wurde ein Flußverhältnis von $\gamma = 0,53 \pm 0,1$ bei einem Stabilitätsverhältnis von $R_\rho^f = 1,3 - 1,6$ festgestellt. Abbildung 4.31 beinhaltet die von Fleury und Lueck ermittelte effektive Diffusion.

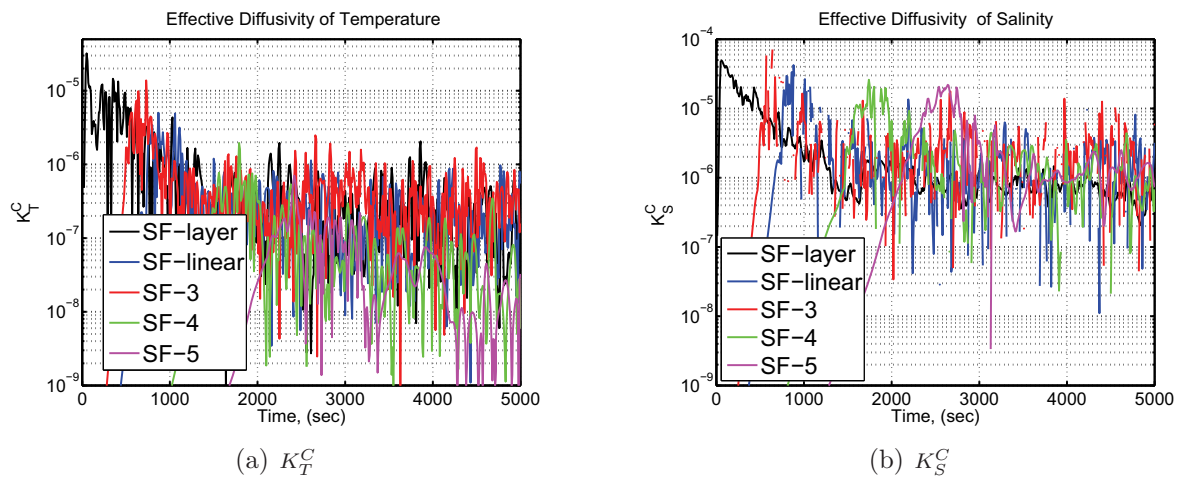


Abbildung 4.37: Effektive Diffusion die mit Hilfe der Coxrelation aus Gleichung (4.2) ermittelt wurden.

In den hier durchgeführten Simulationen lag $\partial_t \langle \chi'^2 \rangle_h$ etwa in der Größenordnung von $\kappa_\chi \text{Cox}_\chi$ und konnte nicht vernachlässigt werden. Die effektive Diffusion wurde anhand

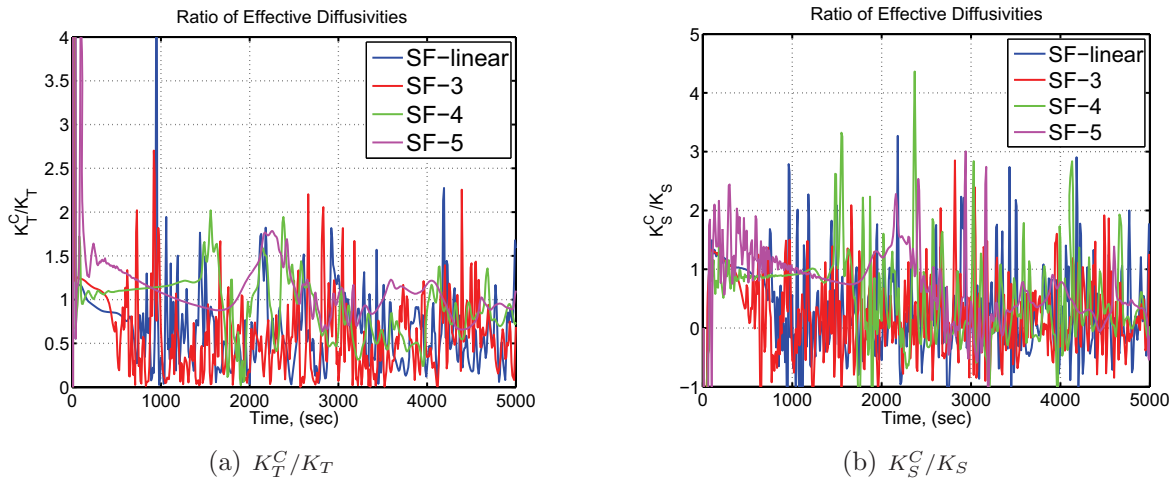


Abbildung 4.38: Verhältnis zwischen der effektiven Diffusion K_χ und den aus den Coxzahlen gewonnene effektive Diffusion K_χ^C . Auf die Darstellung von SF-layer wurde aufgrund der sehr großen Schwankungen verzichtet.

Gleichung (4.2) ermittelt und für die Grenzschicht nahe $z = H/2$ angegeben (Abbildungen 4.37(a) und (b)).

Abbildung 4.38 zeigt das Verhältnis von K_χ^C und \widetilde{K}_χ , für $\chi = T, S$. Während die Salzfinger anwachsen (bis t_{\max}) ist eine Übereinstimmung beider Werte gegeben ($\frac{K_\chi^C}{\widetilde{K}_\chi}$). Eine geringe Abweichung von ca. 5% gegenüber der ermittelten effektiven Diffusion \widetilde{K}_χ wurde beim Salzgehalt festgestellt. Bei der Temperaturkomponente hingegen machte sich durch die Vernachlässigung der molekularen Diffusion bei K_T eine Abweichung von bis zu 20% bemerkbar.

Nach Beginn der Vermischung bei t_{\max} weicht das Verhältnis von $K_\chi^C / K_\chi = 1$ sehr stark ab, so daß die beiden Formulierungen keinerlei Übereinstimmung mehr aufweisen. Auf die Vernachlässigung der molekularen Diffusion bei K_χ konnte dies jedoch ebenso wenig zurückgeführt werden, wie auf die vernachlässigten Terme $\langle \nabla^2(\chi'^2) \rangle_h$ oder auf die Advektionsterme $\langle w \rangle_h \partial_z \langle \chi'^2 \rangle_h$ und $\langle u' \nabla \chi'^2 \rangle_h$. Die auftretenden Diskrepanzen konnten auch nach eingehender Untersuchung nicht erklärt werden.

Alle bisherigen Arbeiten welche die Coxzahlen untersuchten (z.B. Fleury und Lueck [16] oder Taylor und Bucens [84]) gingen von stationären Situationen aus. Selbst bei Tankexperimenten bei wurde (Taylor [83]) eine stationäre Annahme gemacht, dabei wurden ausschließlich die Coxzahlen von Temperatur untersucht. Gargett und Schmitt [20] ermittelten jedoch, daß der Term $\partial_t \langle T'^2 \rangle_h$ einen Anteil von ca. 56% an der effektiven Gesamtdiffusion ausmacht.

Nach Taylor und Bucens [84] hingegen lag dieser Anteil bei etwa 10%. Trotzdem wurde in beiden Fällen auf $\partial_t \langle T'^2 \rangle_h$ verzichtet. Eine aktuelle Studie von Kimura et al. [33] zeigt sogar, daß K_χ^C um bis zu Faktor drei kleiner sein kann als K_χ , für $\chi = T, S$.

Dies erklärt, warum die Coxzahlen einerseits mit den vorgestellten Arbeiten weitgehende Übereinstimmungen aufweist, durch die Berichtigung um den Term $\partial_t \langle \chi'^2 \rangle_h$

jedoch eine sehr viel höhere effektive Diffusion beinhaltet.

Im Weiteren wird die effektive Diffusion aus den turbulenten Flüssen genutzt. Die Coxzahlen werden nicht weiter untersucht.

Rayleighzahlen

Die Rayleighzahlen in den vorliegenden Simulationen waren

$$\begin{aligned} Ra_T &\approx 1,8 \times 10^8 \\ Ra_S^1 &\approx Ra_S^2 \approx 1,35 \times 10^8 \\ Ra_S^3 &\approx 1,65 \times 10^8 \\ Ra_S^4 &\approx 0,8 \times 10^8 \\ Ra_S^5 &\approx 0,65 \times 10^8 \end{aligned}$$

und sind in Abbildung 4.39 dargestellt. In den von Özgökmen et al. [56] oder Radko [60, 61] beschriebenen Flußgesetzen wurden die Rayleighzahlen zur Beschreibung der zu erwartenden Flüsse F_T und F_S benutzt.

Abbildung 4.39 gibt die Einteilung der einzelnen Simulationen in das Regime der Salzfinger wieder (vergleiche mit Abbildung 3.2). Nach der linearen Theorie sind Salzfinger bis zu einem Stabilitätsverhältnis von $R_\rho^f \approx 1/\tau$ möglich. Ra_{krit} kennzeichnet diesen Grenzbereich der Rayleighzahlen. Jedoch konnte eine entsprechende Simulation mit $R_\rho^f \rightarrow 1/\tau$ nicht durchgeführt werden. Durch eine hohe Stabilität wird bis zum Entstehen von Salzfernern eine sehr lange Integrationszeit benötigt. Simulationen konnten aus diesem Grund für $R_\rho^f \approx 1/\tau$ nicht durchgeführt werden.

Sternzahlen

Die Sternzahl ist definiert durch

$$St = \frac{\beta F_S - \alpha F_T}{\nu(\alpha T_z - \beta S_z)} \quad (4.19)$$

und stellt die ursprünglich von Stern [79] aufgestellte Größe dar, mit deren Hilfe der Übergang zu instabilen Salzfernern bestimmt wurde. Dabei wurden die Sternzahlen anhand der konstanten Gradienten T_z und S_z nahe der Grenzschicht bei $z = H/2$ ermittelt. Die Profile der Sternzahlen zeigten über fast den gesamten Zeitraum ein regelmäßiges Profil. Die Sternzahlen nach eintreten des Gleichgewichtsfalles (ab t_{eq}) wurden ermittelt

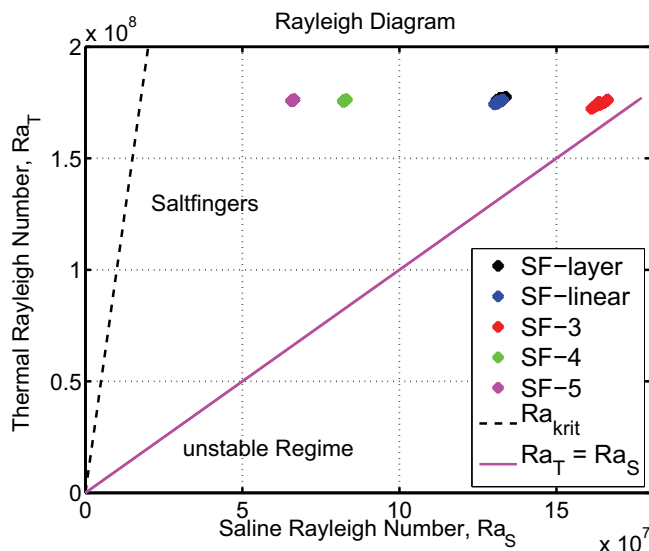


Abbildung 4.39: Diagramm der Rayleighzahlen. Vergleiche Abbildung 3.1. Die magentafarbene Linie teilt das Salzfingerregime (oberhalb) und das instabile Regime (unterhalb). Die gestrichelte Linie markiert Ra_{krit} . Die Salzfinger entstehen im Bereich zwischen Ra_{krit} und der magentafarbenen Linie. Ein Übergang zu anderen Regimen findet nicht statt.

durch

$$\langle \text{St} \rangle_t = \frac{\beta \langle F_S \rangle_t + \alpha \langle F_T \rangle_t}{\nu (\alpha \langle \Omega \% T_z \rangle_t - \beta \langle \Omega \% S_z \rangle_t)} \quad (4.20)$$

wobei $\langle \cdot \rangle_t$ das zeitliche Mittel ab t_{eq} bis Simulationsende und $\Omega = 50, 80$ bezeichnet. Abbildung 4.40 zeigt die Sternzahlen beim Erreichen von t_{max} (Kreise) und nach Eintreten des Gleichgewichts ab t_{eq} (Rauten) für 50% bzw. 80% der Gebietsgröße.

Als Grenze unter der stabile Salzfinger anwachsen und Spalten mit aufwärts, bzw. abwärts gerichteten Temperatur- und Salzgehaltsflüssen aufweisen, fand Stern (Holyer [24] verfeinerte diese Bedingung später) die Größe von $\text{St} \approx 1$. Nach Überschreiten von $\text{St} \approx 1$ durch einzelne Gruppen von Salzfinger treten Konvektionszellen auf, die die Salzfinger überlagern. Dies stellt dann den Übergang zu einer großskaligen Störung von horizontalen internen Wellen dar, was letztlich in der Bildung einer stabilen Schicht enden kann (Holyer [24, 26], Stern [79, 80]).

Mit zunehmender Stabilität R_ρ^f wurden hier abnehmende Sternzahlen

beobachtet, was auch durch Griffiths und Ruddick [22] bestätigt wird. Für die Größe der Sternzahlen sind dabei neben der Stabilität R_ρ^f auch die einzelnen Gradienten der Hintergrundschichtung T_z und S_z verantwortlich.

Ebenfalls machte Holyer [26] deutlich, daß $\text{St} > 1$ nur einen Anhaltswert für eine auftretende Instabilität beschreibt. Es sind auch Fälle bekannt – mit höheren Sternzahlen als $\text{St} = 1$ – bei denen die auftretenden Salzfinger ungestört (stabil) blieben. Neben den von Holyer beschriebenen Fällen trifft dies auch auf die hier durchgeführten Simulationen zu, was jedoch eher eine Ausnahme darstellt.

Die Sternzahlen St erreichen während der turbulenten Vermischungsphase einen Wert, der deutlich über der von Stern geforderten Instabilitätsgrenze $\text{St} > 1$. Den hohen Sternzahlen zufolge war hier eine Schichtbildung nach Stern [79], bzw. Holyer [24] zu erwarten. Jedoch ließ sich die Herausbildung einer neuen Schicht nicht mit letzter Sicherheit feststellen. Es wurde zwar an den oberen und unteren Gebietsrändern eine Stufe in Temperatur und Salzgehalt beobachtet, dies kann jedoch ebenso durch die oberen und unteren Gebietsränder bedingt sein, was bereits weiter oben erwähnt wurde.

Es wird in den vorliegenden Simulationen ebenfalls beobachtet, daß die Flüsse von Temperatur und Salzgehalt nach t_{inst} (außer bei SF-layer, diese Situation stellt einen

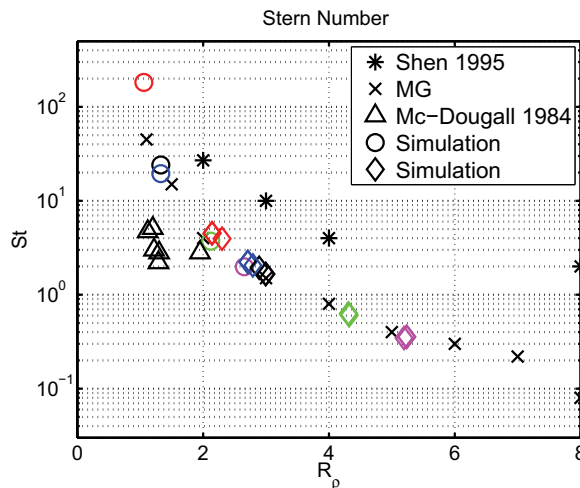


Abbildung 4.40: Sternzahlen St nahe der Grenzschicht $z = H/2$ bei t_{max} (Kreise) und im Gleichgewichtsfall nach t_{eq} (Rauten). Die Fabcodierung entspricht der voriger Abbildungen. Zum Vergleich sind die Sternzahlen von Shen [74] (Sterne), Merryfield und Grindler [51] (Kreuz) und von McDougall und Taylor [43] (Dreiecke) angegeben.

Nr	max(St)	$\langle \text{St} \rangle_t$	t_{\max} (sec)	t_{inst}
1	24, 1	1,7	230	30
2	19, 5	2,2	850	660
3	182	4,5	590	410
4	3, 73	0,6	1780	1540
5	1, 98	0,4	2610	2350

Tabelle 4.9: Die maximalen Sternzahlen $\max(\text{St})$ treten bei t_{\max} auf. $\langle \text{St} \rangle_t$ gibt die zeitlich gemittelte Sternzahl (betrachtet auf 50% der Gebietsgröße) nach der Vermischung (ab t_{eq}) wieder. Der Übergang zu kollektiver Instabilität $\text{St} > 1$ der Salzfinger erfolgt nach Erreichen von t_{inst} .

Sonderfall dar) weiter gleichmäßig anwachsen. Erst kurz vor t_{\max} beginnt die Vermischung des vorgegebenen Gebiets.

Ein Vergleich mit den Momentaufnahmen zeigt allgemein das Auftreten der Salzfinger zuerst als Spalten, mit abwechselnd auf- und abwärtsgerichteten Temperatur- und Salzgehaltsflüssen. Nach t_{inst} ($\text{St} > 1$) gehen die Salzfinger langsam in die charakteristischen unregelmäßigen Fingerformen über. Vergleiche Abbildung 4.4(b) und 4.6(b)), welche die Momentaufnahmen von SF-linear vor t_{inst} und nach t_{inst} darstellen. Die ermittelte Sternzahl von $\text{St} \approx 180$ bei SF-3 zeigt die Tendenz zu sehr hohen Werten bei einer niedrigen Stabilität.

Die beiden Situationen SF-4 und SF-5 erreichen nur geringe Sternzahlen von $\text{St} = 3, 73$, bzw. $\text{St} = 1, 98$. Abbildung 4.9(a) und 4.9(b) zeigen dabei die sehr regelmäßigen Salzfinger exemplarisch für SF-5.

Nachdem sich die Gradienten von Temperatur und Salzgehalt im inneren der Grenzschicht stabilisiert haben, treten vergleichsweise geringe Sternzahlen $\langle \text{St} \rangle_t$ auf (Tabelle 4.9). Für SF-4 und SF-5 sinken diese unter den Wert 1. Die Momentaufnahmen belegen dabei die Annahme der regelmäßigen, bzw. sehr unregelmäßigen Finger.

Özgökmen et al. [56] beschreiben einen maximalen Wert von $\max(\text{St}) \approx 1,4$ der während der Simulation abnimmt und unter den Wert $\text{St} < 1/3$ sinkt. Der Einfluß der Sternzahl auf die Stabilität oder die Finger wurde dabei nicht diskutiert.

Ebenfalls sehr hohe Sternzahlen von $\text{St} \approx 40$ bei $R_\rho^f = 1,25$ erreichten Merryfield und Grinder [51]. Dabei sank die Sternzahl mit zunehmender Stabilität R_ρ^f ab, so daß bei $R_\rho^f = 20$ nur noch eine Sternzahl von $\text{St} = 0.03$ auftrat. Merryfield und Grinder berichteten auch von sehr unregelmäßigen Salz fingern für $R_\rho^f < 4$ und sehr regelmäßigen Salz fingern bei $R_\rho^f \geq 4$. Vergleiche dazu auch die Abbildung 1.2 auf Seite 3. Für Stabilitätsverhältnisse $5 \leq R_\rho^f$ sank bei Merryfield die Sternzahl unter den Wert 1 ab, was mit der Bildung von stabilen und gleichmäßigen Salz fingern gleichgesetzt wurde (vergleiche z.B. Abbildung 1.2(c) und 1.2(d), Momentaufnahmen aus Simulationen von Merryfield und Grinder).

Es scheint, daß in den vorliegenden Situationen die Sternzahl nur als Anhaltspunkt für eine Vermischung dienen kann. Gestützt wird diese Annahme dadurch, das bis kurz vor

t_{\max} (und nicht nur bis t_{inst}) ein gleichmäßiges Anwachsen der Salzfinger zu beobachten ist. Es zeigt sich auch, daß eine geringe Stabilität (hier in etwa $R_\rho^f < 2$) zu sehr hohen Sternzahlen führt.

4.2.4 Gesetzmäßigkeit der effektiven Diffusion

Eine Gesetzmäßigkeit für die effektive Diffusion wird für den Salzgehalt gegeben. Mit Hilfe der turbulenten Lewiszahl \mathcal{T} folgt schließlich der Zusammenhang für die Temperaturkomponente.

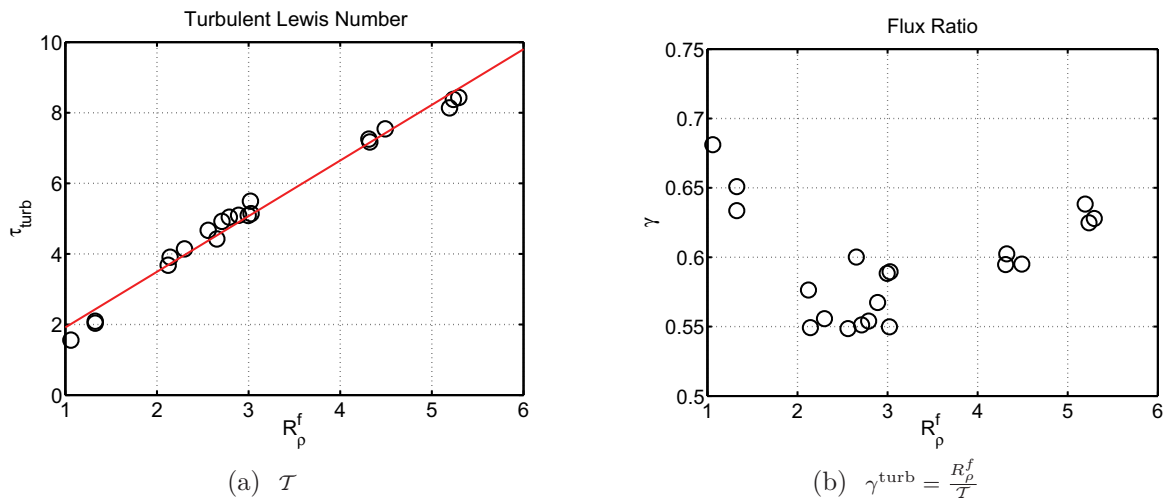


Abbildung 4.41: Die turbulente Lewiszahl \mathcal{T} (a) zeigt für die Simulationen einen nahezu linearen Zusammenhang (rote Linie) mit der Stabilität R_ρ^f , bzw. für die später ermittelten $^{\text{eq}}R_\rho^f$. Der Verlauf des Flußverhältnisses γ (b), das aus \mathcal{T} und R_ρ^f gewonnen wird, ist ähnlich zu Schmitt [66].

Die turbulente Lewiszahl in Abbildung 4.41(a) beschreibt die einzelnen Situationen mit

$$\tilde{\mathcal{T}}_{t_{\max}} = \frac{\tilde{K}_S(t_{\max}, H/2)}{\tilde{K}_T(t_{\max}, H/2)}$$

für die bei t_{\max} eintretende effektive Diffusion, bzw.

$$^{\text{eq}}\mathcal{T} = \frac{^{\text{eq}}K_S(\Omega\%) }{^{\text{eq}}K_T(\Omega\%)}, \quad \Omega = 50, 80, 90$$

für die nach Erreichen von t_{eq} eintretenden Gleichgewichtssituationen. Die turbulente Lewiszahl ergibt sich für den hier gezeigten Stabilitätsbereich $1 \leq R_\rho^f \leq 6$ mit

$$^{\text{lin}}\mathcal{T}(R_\rho^f) = \zeta_1 + \zeta_2 R_\rho^f \quad (4.21)$$

wobei $\zeta_1 = 0,338$ und $\zeta_2 = 1,577$.

Das dabei auftretende Flußverhältnis $\gamma^{\text{turb}} = \frac{R_\rho^f}{T}$ (Abbildung 4.41(b)) bewegt sich zwischen $0,55 \leq \gamma^{\text{turb}} \leq 0,68$ und fällt damit in eine Größenordnung die ebenfalls von Schmitt [65] oder Kunze [34] ermittelt wurde.

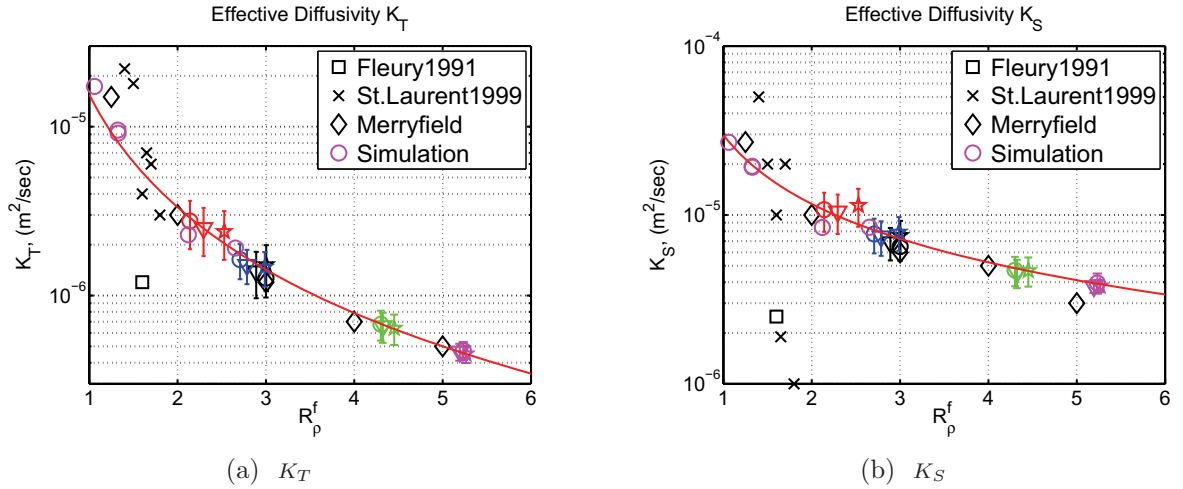


Abbildung 4.42: Effektive Diffusion ermittelt von Fleury und Lueck [16] (Quadrat). Laurent und Schmitt [39] (Kreuz) geben die anhand der *NATRE* Messreihe ermittelten Werte wieder. Merryfield und Grinder [51], Merryfield [48, 45] (Rauten) zeigen für ein breites Stabilitätsspektrum die effektive Diffusion. Die hier ermittelten Werte $K_\chi 50\%(t_{\max})$ werden durch die magentafarbenen Kreise wiedergegeben. Die übrigen farbigen Kreise bezeichnen dabei die effektive Diffusion $\langle K_\chi 50\%loc \rangle_t$ nach Erreichen des Gleichgewichts bei der entsprechend erhöhten Stabilität. $\langle K_\chi 80\%loc \rangle_t$ ist durch die farbigen Dreiecke und $\langle K_\chi 90\%loc \rangle_t$ durch die farbigen Sterne gekennzeichnet, dabei wurde jeweils ein Stabilitätsverhältnis von ${}^{\text{eq}}R_\rho^f(\Omega\%)$, $\Omega = 50, 80, 90$ angenommen.

Die effektive Diffusion des Salzgehaltes (Abbildung 4.42(b)) wird durch

$$\mathcal{K}_S = \frac{\kappa_T}{\vartheta_1 + \vartheta_2 R_\rho^f}, \quad \text{für } R_\rho^f \in [1, 6] \quad (4.22)$$

für $\vartheta_1 = -2,817 \times 10^{-3}$ und $\vartheta_2 = 7,863 \times 10^{-3}$ wiedergeben, wobei $\kappa_T = 1,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{sec}$ den molekularen Diffusionskoeffizienten der Temperatur darstellt.

Mit Hilfe $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{T}(R_\rho^f)$ ist der Zusammenhang der parametrisierten effektiven Diffusion \mathcal{K}_T und \mathcal{K}_S gegeben durch

$$\mathcal{K}_T(R_\rho^f) = \frac{\mathcal{K}_S(R_\rho^f)}{\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{T}(R_\rho^f)}. \quad (4.23)$$

Die effektive Diffusion in Abhängigkeit der Stabilität sind in Abbildung 4.42(a) für \mathcal{K}_T und (b) für \mathcal{K}_S jeweils durch die rote Kurve wiedergegeben.

Die Standardabweichung σ_{K_χ} , $\chi = T, S$ – die entsprechenden Fehlerbalken sind in Abbildung 4.42 angegeben – ist definiert durch

$$\sigma_{K_\chi} = \left(\left\langle \left({}^{\text{eq}}K_\chi(\Omega\%) - K_\chi \Omega\%loc(t) \right)^2 \right\rangle_t \right)^{1/2}$$

wobei $\langle \cdot \rangle_t$ das zeitliche Mittel ab t_{eq} bezeichnet, für jeweils $\Omega = 50, 80, 90$. Der auftretende Fehler liegt dabei um über eine Größenordnung unter der jeweiligen effektiven Diffusion.

Die von Merryfield und Grinder [51] ermittelte Diffusion in Abbildung 4.42 sind durch Rauten gekennzeichnet und werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} {}^{\text{Merr}}K_T &= \frac{\gamma}{R_\rho} {}^{\text{Merr}}K_S & \text{m}^2/\text{sec} \\ {}^{\text{Merr}}K_S &= C \frac{1 - \tau R_\rho}{R_\rho - \gamma} & \text{m}^2/\text{sec} \end{aligned} \quad (2.4)$$

mit $C = 0,17 \times 10^{-4}$, beschrieben.

Dabei zeigt sich eine Übereinstimmung bei niedriger Stabilität ($R_\rho^f \leq 4$). Für eine Stabilität $R_\rho^f > 4$ zeigen die hier durchgeführten Simulationen jedoch höhere Werte für den Salzgehalt. Tankexperimente die die Werte von Merryfield und Grinder oder die hier vorliegenden Werte wiedergeben sind bislang nicht bekannt.

Das vier-drittel Flußgesetz eignet sich in den hier vorliegenden Situationen nicht um die Flüsse darstellen zu können. Abgesehen davon das keine Konstante C ermittelt werden konnte, so daß

$$F_S = C(R) (\Delta S)^{4/3} \quad \text{oder} \quad F_S = C(R) (S_z)^{4/3}$$

die tatsächlich entstandenen Flüsse F_S oder F_T hinreichend gut wiedergegeben werden, war eine Beschreibung von $C(R)$ durch eine „einfache“ Funktion (linear, e-Funktion, etc.) nur wenig erfolgreich.

Radko [60] erwähnte, daß ein klassisches vier-drittel Flußgesetz nur bis etwa $Ra_T \sim 10^6$ anwendbar sei, so daß es auch denkbar ist, daß die Anstrengung ein vier-drittel Flußgesetz zu ermitteln aufgrund der hohen Rayleighzahlen nicht zielführend war.

Die hier gezeigte Parametrisierung der effektiven Diffusion \mathcal{K}_T und \mathcal{K}_S hat gegenüber Merryfield und Grinder den Vorteil, daß das Flußverhältnis für die Salzgehaltskomponente nicht mehr benötigt wird und bei der Temperaturkomponente in bereits parametrisierter Form durch die turbulente Lewiszahl mit einfließt. Das Flußverhältnis muß hier nicht vorab abgeschätzt, oder anderweitig ermittelt werden.

4.2.5 Zusammenfassung

Die Anfangsbedingungen einer Zwei-Schichten Situation oder eines linear geschichteten Modells haben keine oder nur eine geringfügige Auswirkung auf die Größe der entstehenden turbulenten Flüsse von Temperatur F_T und Salzgehalt F_S . Einzig in der Ausbreitung sind Unterschiede festzustellen. Während die turbulenten Flüsse bei SF-layer an der Grenzschicht sehr schnell anwachsen und sich dann vertikal mit fast gleichmäßiger

Stärke ausbreiten, ist in der linearen Ausgangssituation das Entstehen der turbulenten Flüsse über das gesamte Gebiet verteilt. Diese wachsen bis jeweils t_{\max} stetig an. Anschließend setzt die Vermischung des Gebiets ein, die im Idealfall den Beginn einer Schichtbildung markiert, was jedoch nicht beobachtet werden konnte. Nach t_{\max} fallen die Flüsse F_T und F_S ab. Zwar sind die Gebietsränder in Temperatur und Salzgehalt fixiert, jedoch wird im „inneren“ der Grenzschicht die Entstehung eines neuen Profils beobachtet. Die Gradienten von Temperatur und Salzgehalt stabilisieren sich nach t_{eq} und die Stabilität des neu entstandenen Profils innerhalb der Schicht nimmt zu.

Das Abfallen der Flüsse kann durch die sehr hohe Rayleighzahl und der damit einhergehenden starken Turbulenzen nur unzureichend erklärt werden. Merryfield und Grinder [51] berichten – als einzige Referenz – von ansteigenden Flüssen, die ein Maximum erreichen und auf diesem verharren. Die dabei ermittelten Rayleighzahlen waren jedoch jedoch mit bis zu 6×10^7 nicht sehr viel geringer. Andere Autoren zeigen die zeitliche Entwicklung der effektiven Diffusion nicht auf, so daß kein vergleichsweise ähnlicher Verlauf zu anderen Studien beobachtet werden konnte.

Die resultierenden Flüsse bei t_{\max} repräsentieren den durch die Salzfinger – erster Generation – erzeugten vertikalen Transport von Temperatur und Salzgehalt durch eine Grenzschicht zwischen zwei Treppenstufen bei vorgegebener Gesamtstabilität R_ρ^f . Ebenso werden nach Erreichen eines Gleichgewichts Flüsse beobachtet – nachdem sich Temperatur und Salzgehalt neu angeordnet haben – die den vertikalen Transport von Temperatur und Salzgehalt bei einer höheren Stabilität ${}^{\text{eq}}R_\rho^f$ wiedergeben. Diese stellen die zweite Generation der Salzfinger dar.

Die effektive Diffusion die für diese Grenzschicht charakteristisch ist, wird durch $\widetilde{K}_T(t_{\max})$ und $\widetilde{K}_S(t_{\max})$ im Mittel über 50% der Gebietshöhe dargestellt. Nach Erreichen eines Gleichgewichts bei t_{eq} stellt sich eine mittlere effektive Diffusion von ${}^{\text{eq}}K_T(\Omega\%)$ und ${}^{\text{eq}}K_S(\Omega\%)$, für $\Omega = 50, 80, 90$ ein. Dabei wird gleichzeitig die auftretende höhere Stabilität innerhalb der Schicht durch ${}^{\text{eq}}R_\rho^f$ berücksichtigt (Abbildung 4.34).

Die durchgeführten Simulationen zeigen sehr „robuste“ Werte für die effektive Diffusion von Temperatur und Salzgehalt. Einmal ergeben sich diese aus den Flüssen bei t_{\max} und folgen schließlich auch aus dem eintretenden Gleichgewicht nach t_{eq} .

Die resultierende Parametrisierung der effektiven Diffusion durch \mathcal{K}_T , bzw. \mathcal{K}_S aus den Gleichungen (4.21), (4.22) und (4.23) ergibt eine überraschend einfache Beschreibung der doppelt-diffusiven Prozesse. Dabei werden die von Merryfield [45], Radko [60, 61] oder Schmitt [70] ermittelten Größen der effektiven Diffusion weitgehend wiedergegeben.

Ebenso wurde gezeigt, daß die turbulente Lewiszahl \mathcal{T} einen fast linearen Verlauf aufweist, der von der Stabilität abhängt. Für höhere Stabilitäten ($6 \leq R_\rho^f \leq 1/\tau$) fehlen allerdings noch weitere Simulationen, deren Durchführung (mit einer linearen Anfangsschichtung) sich schwierig gestaltet.

4.3 Die zwei-Schicht Modelle, Vergleich der Lewiszahlen $\tau = 0,01$ und $\tau = 0,1$

Kurzer Überblick

Die Simulationen dieser Serie unterscheiden sich grundlegend von den anderen Simulationen aus Abschnitt 4.2. Temperatur und Salzgehalt sind an den oberen und unteren Gebietsrändern nicht festgehalten. Im Laufe der Simulation ändert sich dadurch der mittlere Salzgehaltsgradient S_z und wird negativ. Dieser ist definiert durch

$$\chi_z = \frac{\chi_{\text{oben}} - \chi_{\text{unten}}}{H}, \quad \text{für } \chi = T, S$$

wobei H die Gebietshöhe bezeichnet. Der Temperaturgradient T_z bleibt weiterhin die stabilisierende Komponente und ändert sich nur leicht. Die Simulationen 1 – 5, bezeichnet durch 3DLE0.1, 2DLE0.01, 2DLE0.1, 2DLE0.1-c und 2DLE0.01-c, zeigen die Auswirkung der unterschiedlichen Lewiszahlen $\tau = 0,01$ und $\tau = 0,1$.

Solange die oberen, bzw. unteren Gebietsränder durch die Salzfinger unberührt bleiben, können die turbulenten Flüsse (und damit die effektive Diffusion) mit den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts 4.2 verglichen werden.

Die beobachteten Abläufe lassen sich in ähnlicher Weise zum vorherigen Abschnitt 4.2 jeweils in drei Hauptgruppen einteilen:

1. Die Wachstumsphase der Salzfinger aus der Grenzschicht (Abbildung 4.43(a)).
2. Der Vermischungsprozess beider Schichten, ist zu Beginn in Abbildung 4.44(a) und (b) zu sehen. Hingegen zeigen die Abbildungen 4.46(a) und (b) das bereits fast vollständig durchmischte Gebiet der beiden Simulationen mit unterschiedlichen Lewiszahlen 2DLE0.01 und 2DLE0.1.
3. Die neue Formierung der Salzfinger nach dem Wechsel zum diffusiven Regime ist gekennzeichnet durch $Ra_S < 0 < Ra_T$ und dem dominierenden molekular-diffusiven Temperaturfluß. Die Abbildungen 4.47(a) und (b) zeigen die Neubildung zeitlich stabiler Finger, die aufgrund des verbleibenden turbulenten Salzgehaltsflusses gebildet werden. Eine Neubildung der Finger beginnt nach jeweils

$$t_{\star}^1 = 525; \quad t_{\star}^2 = 528; \quad t_{\star}^3 = 568; \quad t_{\star}^4 = 643; \quad t_{\star}^5 = 623 \text{ sec}$$

(siehe Tabelle 4.10). Die einzelnen Simulationen werden durch die Indizes $1, \dots, 5$ bezeichnet. Ab dem Zeitpunkt t_{\star} gilt (per Definition)

$${}^{\text{diff}}F_T^n(t_{\star}^n < t) > F_T^n(t_{\star}^n < t), \quad \text{für } n = 1, \dots, 5 \quad (4.24)$$

was neben der Viskosität eine zusätzliche Dämpfung bedeutet, die zur weiteren Stabilisierung der Schichtung von Temperatur und Salzgehalt beiträgt. Die unterschiedlichen Lewiszahlen $\tau = 0,01$ und $\tau = 0,1$ führen letztlich zu verschiedenen ausgeprägten Fingern (Abbildung 4.47(a) und (b)) und haben bedingt durch τ eine unterschiedliche Lebensdauer.

4.3.1 Momentaufnahmen verschiedener Entwicklungsstadien

Die hier gezeigten Momentaufnahmen belegen die Entwicklung der Salzfinger und den Vermischungsprozess, bis hin zur erneuten Formierung von Fingern für die beiden Situationen 2DLE0.01 und 2DLE0.1. Die Entwicklung der Finger nahe der Grenzschicht erzeugt etwa acht bis zehn Salzfingerpaare in der Horizontalen, die im Mittel etwa $d \approx 0,4 - 0,5$ cm breit sind. Der theoretisch ermittelte Wert (Gleichung (A.96)) deckt sich dabei mit den hier visuell ermittelten Fingergrößen.

Die nahe der Grenzschicht entstandenen Finger (Abbildung 4.43(a)) breiten sich schließlich bis zu den oberen und unteren Gebietsrändern aus und leiten einen Vermischungsprozess zwischen den beiden Schichten ein. Die Salzfinger selbst werden während des Vermischungsprozesses durch die anwachsenden turbulenten Flüsse überlagert und formieren sich anschließend zu neuen, zeitlich stabilen Salz fingern. Abbildung 4.43(b) zeigt eine Momentaufnahme bei 100 sec, einzelne Fingerspitzen lösen sich bereits ab was auf den entstehenden turbulenten Prozess hindeutet, der die Finger schließlich überlagert.

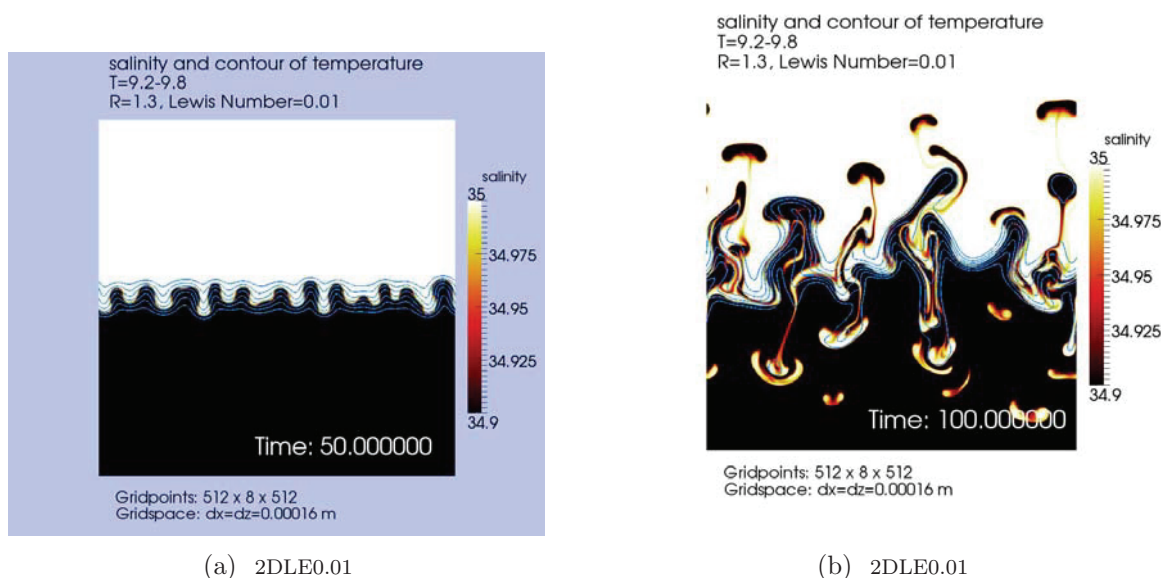


Abbildung 4.43: Momentaufnahmen der auftretenden Salzfinger mit Gitterabstand $\Delta x = \Delta z \approx 160 \mu\text{m}$, (a) bei 50 sec, Entstehung der Salzfinger und (b) bei 100 sec Beginn der Vermischung

Durch Verwendung der unterschiedlichen Lewiszahlen $\tau = 0,01$ und $\tau = 0,1$ entstehen – aufgrund der unterschiedlichen diffusiven Salzgehaltsflüsse zwischen den Fingern bei 2DLE0.01 und 2DLE0.1 – verschieden ausgeprägte Fingerstrukturen, wie Abbildung 4.44(a) und (b) (und folgende) verdeutlichen. Abbildung 4.45(a) und (b) zeigt die fortschreitende Vermischung der beiden Ausgangsschichten durch die Salzfinger. Die Abbildungen 4.46(a) und (b) zeigen das Ende der Vermischungsphase und die jeweils ähnlichen, jedoch unterschiedlich scharfen Strukturen neuer Finger von 2DLE0.01 und 2DLE0.1. Zeitlich stabile Finger formieren sich nach Erreichen von t_* und zeichnen sich

durch Gruppen von regelmäßigen, kurzen Fingern aus, die sich vertikal über das Gebiet erstrecken (Abbildung 4.47(a)) und (b)).

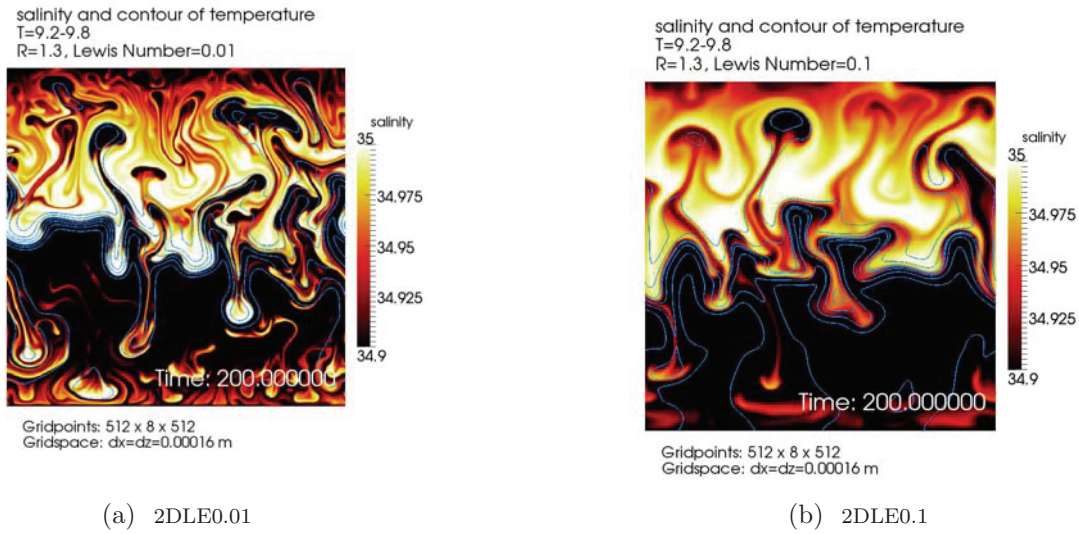


Abbildung 4.44: Momentaufnahme bei 200 sec der Salzfingersimulationen mit $\Delta x = \Delta z \approx 160 \mu\text{m}$ (a) mit $\tau = 0,01$ (b) mit $\tau = 0,1$

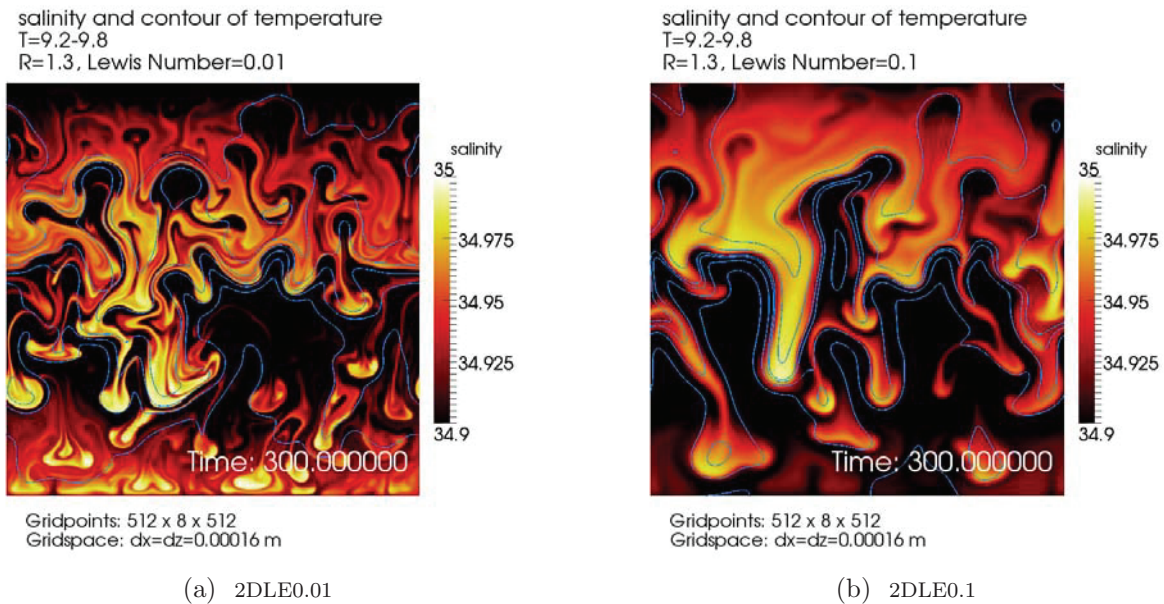
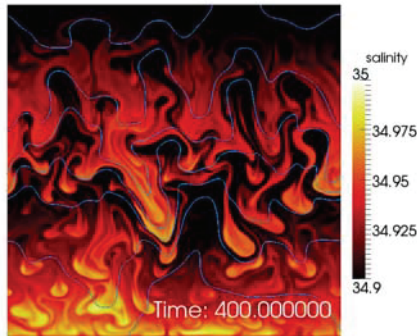


Abbildung 4.45: Momentaufnahme bei 300 sec der Salzfingersimulationen mit $\Delta x = \Delta z \approx 160 \mu\text{m}$ (a) $\tau = 0,01$ und (b) $\tau = 0,1$

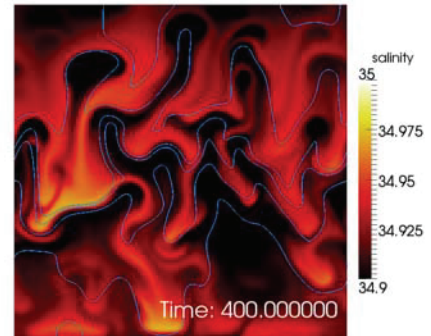
Die Momentaufnahmen der grob aufgelösten Situationen mit einer Gitterweite von $\Delta z = 1,65 \times 10^{-3} \text{ m}$ werden nicht gezeigt, die Abläufe sind fast analog zu den beiden

salinity and contour of temperature
 $T=9.2-9.8$
 $R=1.3$, Lewis Number=0.01



(a) 2DLE0.01

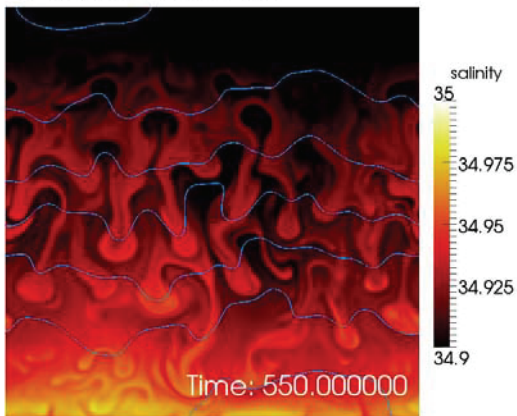
salinity and contour of temperature
 $T=9.2-9.8$
 $R=1.3$, Lewis Number=0.1



(b) 2DLE0.1

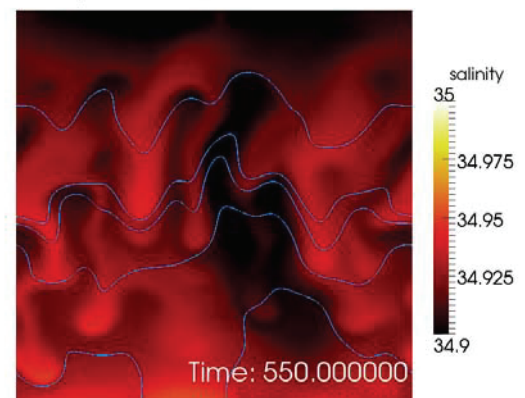
Abbildung 4.46: Momentaufnahme bei 400 sec der Salzingersimulationen mit $\Delta x = \Delta z \approx 160 \mu\text{m}$ und (a) $\tau = 0,01$ und (b) $\tau = 0,1$

salinity and contour of temperature
 $T=9.2-9.8$
 $R=1.3$, Lewis Number=0.01



(a) 2DLE0.01

salinity and contour of temperature
 $T=9.2-9.8$
 $R=1.3$, Lewis Number=0.1



(b) 2DLE0.1

Abbildung 4.47: Momentaufnahme bei 550 sec der Salzingersimulationen mit $\Delta x = \Delta z \approx 160 \mu\text{m}$. Neubildung von stabilen Fingern (a) $\tau = 0,01$ und (b) $\tau = 0,1$

vorgestellten Simulationen 2DLE0.01 und 2DLE0.1.

Die diffusiven Salzgehaltstransporte sind allgemein mit etwa

$$F_{\beta S}^{\text{diff}} = \frac{\tau}{\text{SF} R_{\rho}} F_{\alpha T}^{\text{diff}} \quad (4.25)$$

um den Faktor $^{\text{SF}}R_\rho/\tau$ kleiner als die diffusiven Temperaturtransporte, wobei $^{\text{SF}}R_\rho$ das Verhältnis der Dichtegradienten zwischen zwei benachbarten Salz fingern beschreibt. In der Anfangsphase, wo die Salzfinger erst entstehen gilt $^{\text{SF}}R_\rho = R_\rho^f$.

Die Salzgehaltsgradienten – zwischen zwei Fingermittelpunkten etwa – bleiben nahezu unverändert, was schließlich zu der scharf abgegrenzten Struktur im Salzgehalt bei 2DLE0.01 führt, während die Struktur des Salzgehalts zwischen zwei angrenzenden Fingern durch den größeren diffusiven Fluß bei 2DLE0.1 sehr schnell geglättet wird. Die Größe der Lewiszahl ist damit verantwortlich für die Entstehung unterschiedlicher Fingerstrukturen.

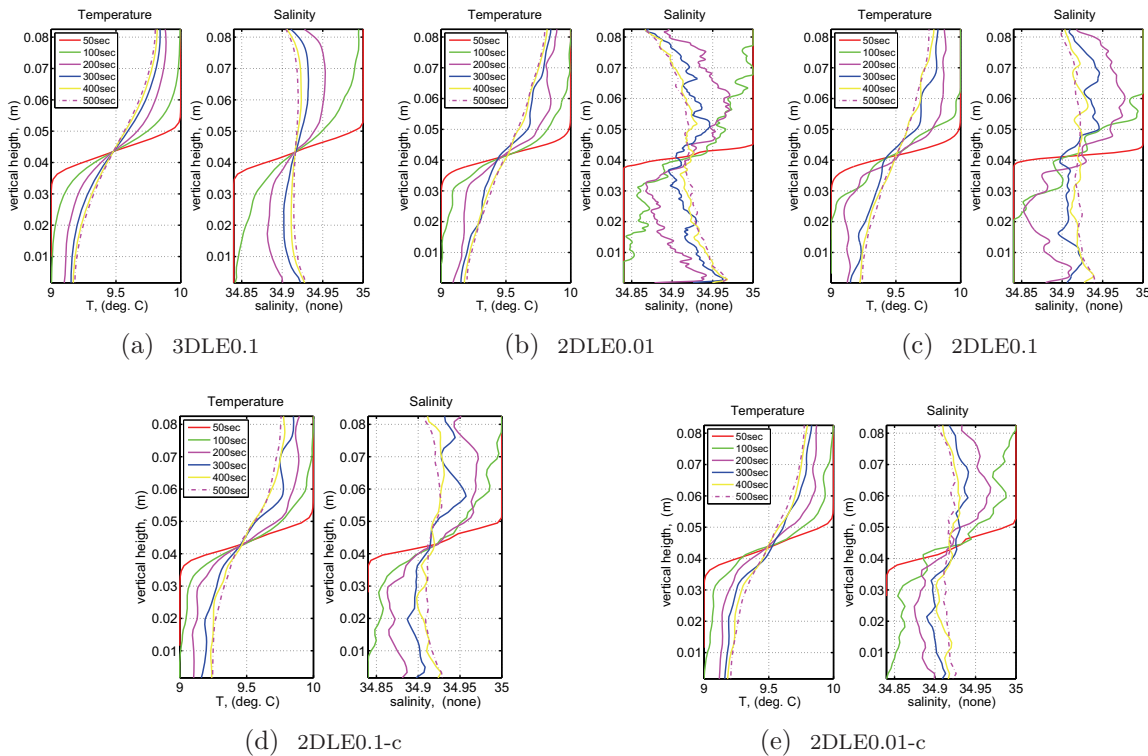


Abbildung 4.48: Profile von Temperatur und Salzgehalt, 50 bis 500 sec.

Während sich die Profile der Temperaturverteilung kaum voneinander unterscheiden, weisen die Profile des Salzgehaltes sehr unterschiedliche Strukturen auf (Abbildung 4.48(a) bis (e)), die im jeweiligen Fall (zwischen 2DLE0.01 und 2DLE0.1 bzw. 2DLE0.01-c und 2DLE0.1-c) auf die Lewiszahlen zurückzuführen sind. Über den gesamten Zeitraum der Simulationen bleibt das Temperaturprofil weitgehend erhalten. Beim mittleren Salzgehaltsgradienten hingegen folgt bei

$$t_{S_z}^1 = 260; \quad t_{S_z}^2 = 218; \quad t_{S_z}^3 = 313; \quad t_{S_z}^4 = 372; \quad t_{S_z}^5 = 353 \quad \text{sec}$$

ein Umschlagen zu $S_z \leq 0$. Damit findet gleichzeitig der Übergang zum diffusiven Regime mit $Ra_S < 0 < Ra_T$ statt.

Nr.	t_{Ra_C}	t_{\max}	t_{S_z}	t_*
1	86	56	260	525
2	102	60	218	528
3	122	79	213	568
4	100	55	372	643
5	93	55	353	623

Tabelle 4.10: Verschiedene Zeitpunkte beim Durchlaufen der Simulation. Der Zeitpunkt t_{Ra_C} gibt an, wann bei die Salzfinger die Gebietsränder erreichen, t_{\max} beschreibt den Zeitpunkt, bei dem die maximalen Flüsse nahe der Grenzschicht bei $z = H/2$ erreicht werden. Die Salzgehaltsdifferenz zwischen dem oberen und unteren Gebietsrand wird bei t_{S_z} negativ und ab t_* entstehen stabile Finger. Die einzelnen Zeitpunkte geben Anhaltspunkte über die Entwicklung des Prozessablaufs.

Rayleighzahlen

Ein Vergleich der effektiven Diffusion, bzw. der auftretenden Flüsse aus dem vorangegangenen Abschnitt kann durchgeführt werden, solange die Rayleighzahlen konstant sind. Dies ist bis zu den Zeitpunkten

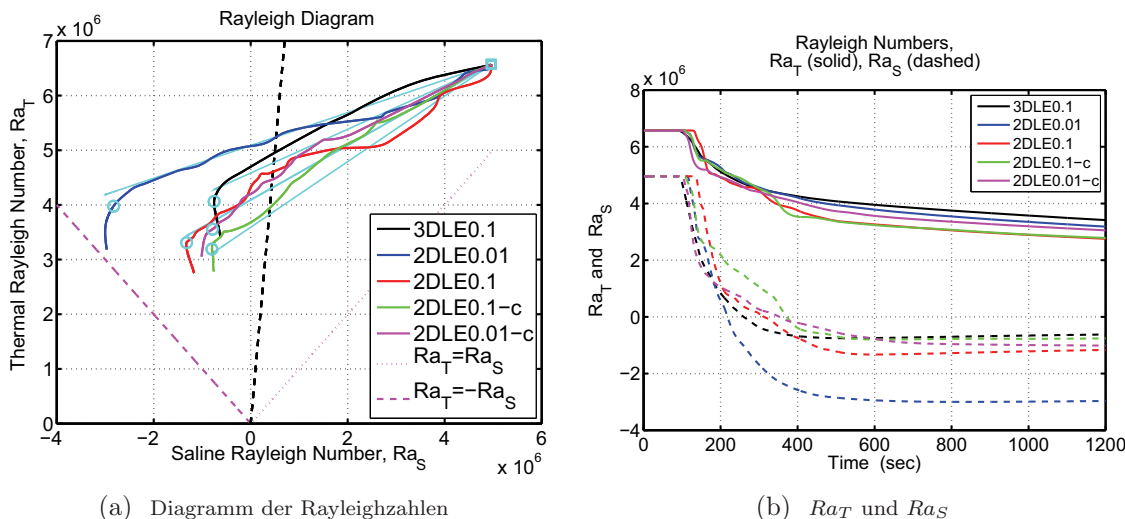


Abbildung 4.49: (a) Die Rayleighzahlen Ra_T und Ra_S gegeneinander aufgezeigt, geben den Übergang zum diffusiven Regime wieder. Die schwarz gestrichelte Linie durch den Ursprung markiert die Stabilitätsgrenze bis zu der Salzfinger entstehen. Das cyan farbene Quadrat bezeichnet dabei die Rayleighzahlen der Anfangsphase zum Zeitpunkt t_{Ra_C} , wo die Salzfinger durch ein lineares Wachstum ausgezeichnet sind, während die cyan farbigen Kreise den Beginn der erneuten Formierung von stabilen Salz fingern bei t_* anzeigen. (b) zeitlicher Verlauf der Rayleighzahlen Ra_T (durchgezogene Linien) und Ra_S (gestrichelte Linien)

$$t_{Ra_C}^1 = 86; \quad t_{Ra_C}^2 = 102; \quad t_{Ra_C}^3 = 122; \quad t_{Ra_C}^4 = 100; \quad t_{Ra_C}^5 = 93 \quad \text{sec} \quad (4.26)$$

der Fall (Tabelle 4.10). Danach erreichen die Salzfinger die oberen und unteren Gebietsränder und die Gradienten T_z , bzw. S_z sinken ab.

In Abbildung 4.49(a) ist der Zeitpunkt t_{Ra_C} mit dem cyanfarbenen Quadrat markiert. Die Temperatur- und Salzgehaltsprofile zu diesem Zeitpunkt werden in Abbil-

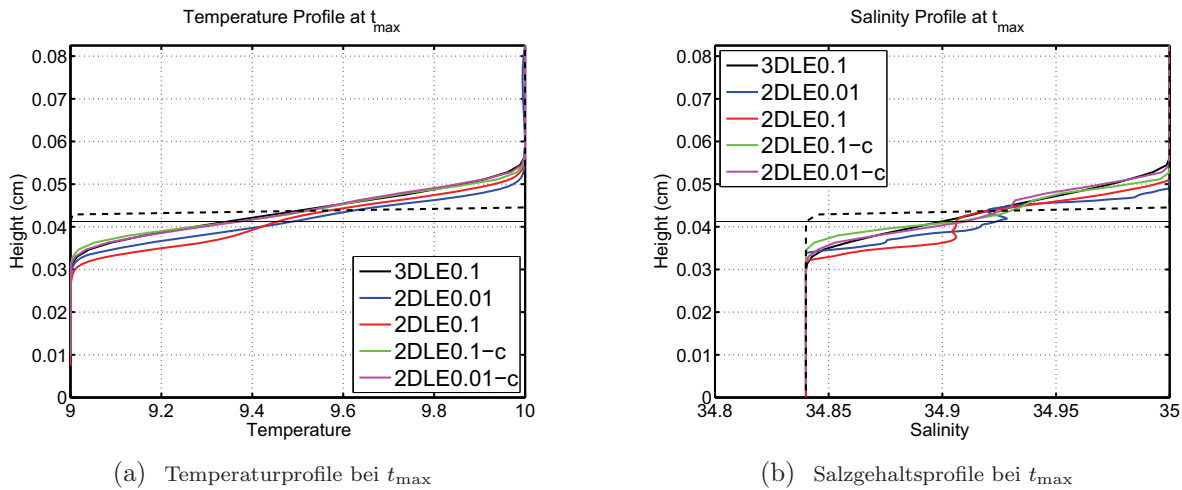


Abbildung 4.50: Temperatur- und Salzgehaltsprofile zum Zeitpunkt der maximalen Flüsse t_{\max} nahe der Grenzschicht $z = H/2$.

Abbildung 4.51(a) und (b) gezeigt. Die Profile der Temperatur- und Salzgehaltsverteilung bei t_{\max} (Abbildung 4.50) zeigen einen gleichmäßigen Verlauf. Durch den allgemein

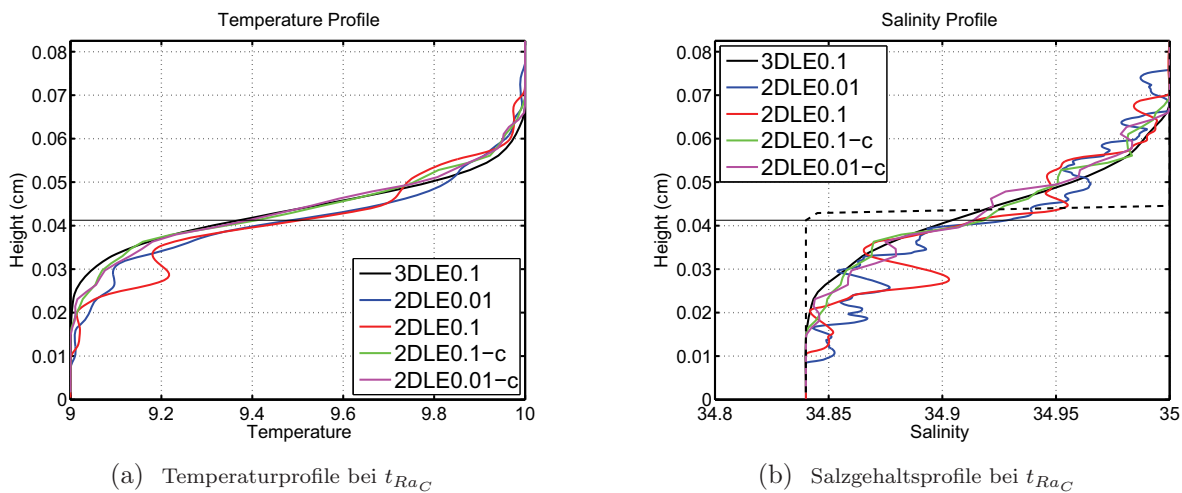


Abbildung 4.51: Temperatur- und Salzgehaltsprofile bei t_{RaC} . Die Salzfinger erreichen zu diesem Zeitpunkt die Gebietsränder.

abwärtssinkenden Salzgehalt an den Gebietsrändern nach t_{RaC} tritt das System in eine allgemeine turbulente Vermischungsphase ein. Schließlich endet die Vermischung der beiden Schichten bei t_* (markiert durch cyanfarbene Kreise in Abbildung 4.49(a)) und stabile Finger entstehen. Die dazugehörigen Temperatur- und Salzgehaltsprofile werden durch Abbildung 4.53(a) und (b) wiedergegeben.

Zeigen die Rayleighzahlen zuerst noch einem parallelen Verlauf, so wird schnell deut-

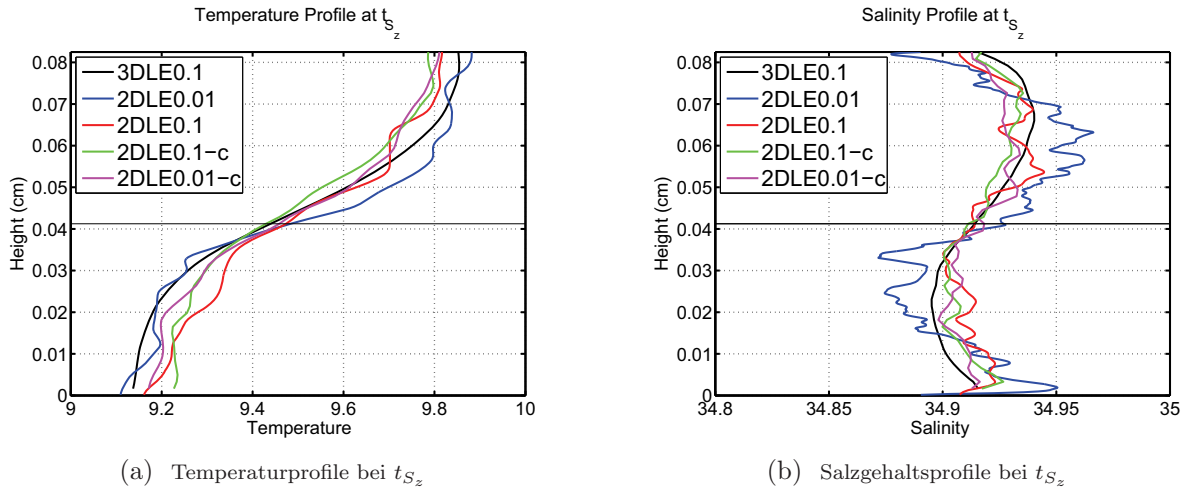


Abbildung 4.52: Temperatur- und Salzgehaltsprofile bei t_{S_z} . Die Schichtung wird neu angeordnet.

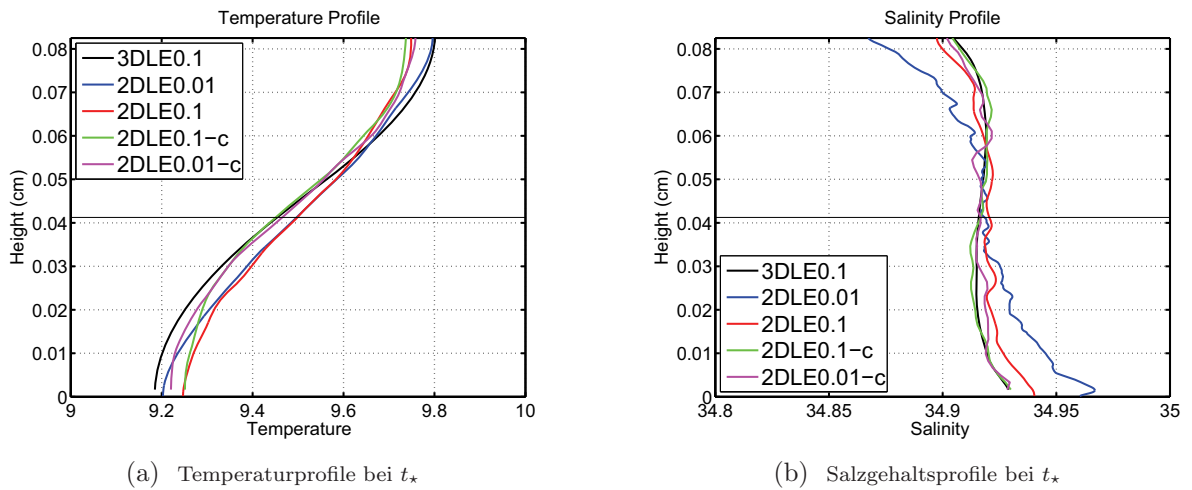


Abbildung 4.53: Temperatur- und Salzgehaltsprofile bei t_* . Stabile Finger entstehen.

lich, daß die saline Rayleighzahl Ra_S^2 (blaue Linie in Abbildung 4.49) schneller absinkt und sich dabei vom Verlauf der verbleibenden Rayleighzahlen unterscheidet. Aus den Rayleighzahlen in Abbildung 4.49(a) wird auf einen (nahezu) linearen Verlauf der Rayleighzahlen zueinander geschlossen. Dieser läßt sich durch

$$Ra_T(t) = Ra_S(t=1)R_p^f - Ra_S(t) * \gamma_{\min} \quad (4.27)$$

für $t_{Ra_C} \leq t \leq t_*$ wiedergeben. γ_{\min} beschreibt dabei das kleinste Flußverhältnis γ mit,

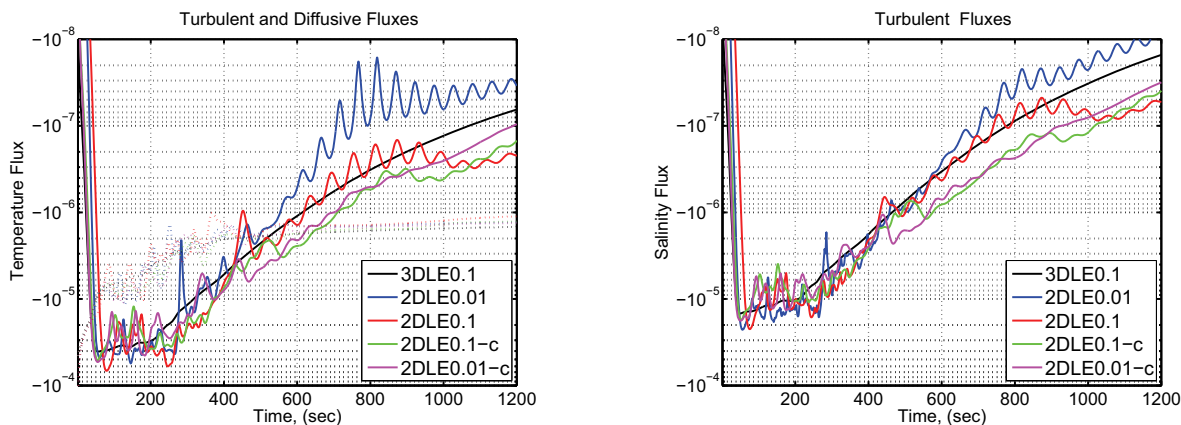
$$\gamma_{\min} = \quad 0,4; \quad 0,3; \quad 0,5; \quad 0,6; \quad 0,5$$

das zwischen t_{Ra_C} und t_* auftritt.

Während bei 2DLE0.01 die saline Rayleighzahl schnell absinkt, ist dies bei 2DLE0.1 nicht der Fall. Der leicht unterschiedliche Verlauf zwischen den beiden Simulationen wird auch hier auf die unterschiedlichen Lewiszahlen und damit auf den um Faktor zehn größeren diffusiven Salzgehaltsfluß zwischen den Salz fingern bei 2DLE0.1 zurückgeführt. Bei der groben Gitterauflösung in den Experimenten 2DLE0.01-c und 2DLE0.1-c (in Abbildung 4.49 grün und magentafarben gekennzeichnet) konnte ein solcher Verlauf nicht festgestellt werden. Bei diesen beiden Simulationen verlaufen die Rayleighzahlen nahezu parallel, was darauf schließen läßt, daß die Lewiszahl bei 2DLE0.1 durch das grobe Gitter nicht aufgelöst wird. Eine Neubildung von stabilen Salz fingern ist nach t_* zu beobachten. Während die saline Rayleighzahl dabei konstant bleibt, sinkt Ra_T im weiteren Verlauf leicht ab.

4.3.2 Vergleich der turbulenten Flüsse

Die turbulenten Flüsse von Temperatur F_T , bzw. des Salzgehaltes F_S werden in Abbildung 4.54 miteinander verglichen. Nachdem F_T und F_S das Maximum bei jeweils



(a) $F_T(t, H/2)$ (durchgezogen) und $F_T^{diff}(t, H/2)$ (gepunktet)

(b) $F_S(t, H/2)$

Abbildung 4.54: (a) Turbulenter Temperaturfluß F_T und diffusiver Temperaturfluß nahe der Grenzschicht $H/2$. (b) Turbulenter Salzgehaltsfluß F_S der diffusive Salzgehaltsfluß ist vernachlässigbar und wird nicht dargestellt. Auffallend ist bei beiden Komponenten das zuerst gleichbleibende Niveau der Flüsse zwischen t_{max} und t_{S_2} .

t_{max} erreichen, stellt sich bei F_T und F_S ein kurzzeitig gleichbleibendes Niveau ein. Die Salzfinger erreichen erst nach t_{max} bei t_{Ra_C} die oberen und unteren Gebietsränder. Der Temperaturfluß aus der molekularen Diffusion (gepunktete Linie in Abbildung 4.54(a)) wird dabei während des Salzfingerwachstums überschritten. Die Abbildungen 4.55, 4.56 und 4.57 zeigen die Profile der turbulenten Flüsse für die Zeitpunkte t_{max} , t_{Ra_C} und t_* .

Die turbulenten Flüsse von Temperatur und Salzgehalt erreichen an der Grenzschicht ein Maximum (Abbildung 4.55). Im weiteren Verlauf breiten sich die turbulenten Flüsse in der Vertikalen bis t_{Ra_C} aus. Die bis zum Zeitpunkt t_{Ra_C} erreichten turbulenten Flüsse

Nr.	$F_T(t_{\max})$	$F_S(t_{\max})$	$F_T(t_*)$	$F_S(t_*)$
1	4,0	1,4	0,21	0,068
2	4,7	2,2	0,23	0,094
3	6,8	2,2	0,18	0,054
4	5,2	1,7	0,17	0,062
5	5,4	1,7	0,21	0,07

Tabelle 4.11: Turbulente Flüsse von Temperatur und Salzgehalt nahe der Grenzschicht $z = H/2$ in Einheiten von $10^{-5} \times m\chi/sec$, $\chi = T, S$.

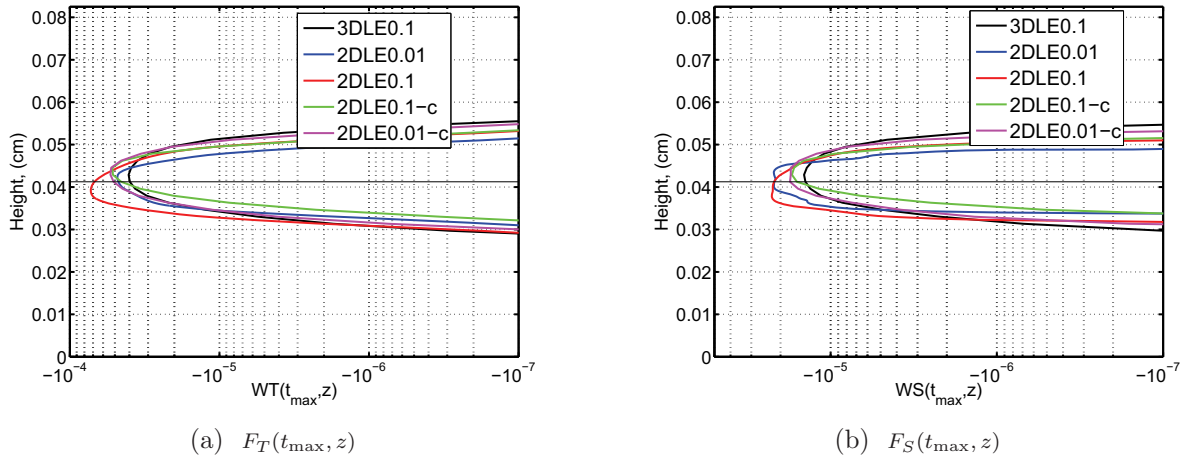


Abbildung 4.55: Profil der turbulenten Flüsse F_T und F_S bei t_{\max} , (a) turbulenter Temperaturfluß F_T . (b) zeigt den turbulenten Salzgehaltsfluß F_S .

F_T und F_S , sind in der Intensität mit den turbulenten Flüssen aus Abschnitt 4.2 (Tabelle 4.2 und Tabelle 4.11) vergleichbar. Nach diesem Zeitpunkt stoßen die auf- und absteigenden Finger an die oberen, bzw. unteren Gebietsränder. Der Verlauf der einzelnen turbulenten Flüsse F_T , bzw. F_S bleibt bis t_{s_z} sehr ähnlich, so daß die unterschiedliche molekulare Diffusion (z.B. bei 2DLE0.01 und 2DLE0.1) zuerst keinen erkennbaren Einfluß ausübt. Erst nach Erreichen von t_* hebt sich der Einfluß der Lewiszahl auf die Temperatur- und Salzgehaltsflüsse sehr deutlich ab. Bei 2DLE0.01 sinken dann die Temperatur- und Salzgehaltsflüsse im Vergleich zu 2DLE0.1 schneller ab (Abbildung 4.54). Hingegen verlaufen F_T bzw. F_S der beiden Simulationen 2DLE0.1-c und 2DLE0.01-c weiter parallel (Abbildung 4.54 grüne und magentafarbene Linie). Erst gegen Ende der Simulation (ab etwa 900 sec) zeigen die Flüsse F_T und F_S einen geringen Unterschied. Dies zeigt, daß durch das verwendete grobe Gitter die Lewiszahl nicht (oder nur teilweise) aufgelöst wird.

Nach Definition von t_* übersteigt zu diesem Zeitpunkt der diffusive Temperaturfluß den turbulenten. Dadurch werden die Filamente der Temperatur, die durch den turbulenten Vermischungsprozess entstanden sind, auf molekularer Ebene vermischt, was zu einer gleichmäßigen Struktur im Temperaturprofil führt (vergleiche Abbildung 4.47(a)

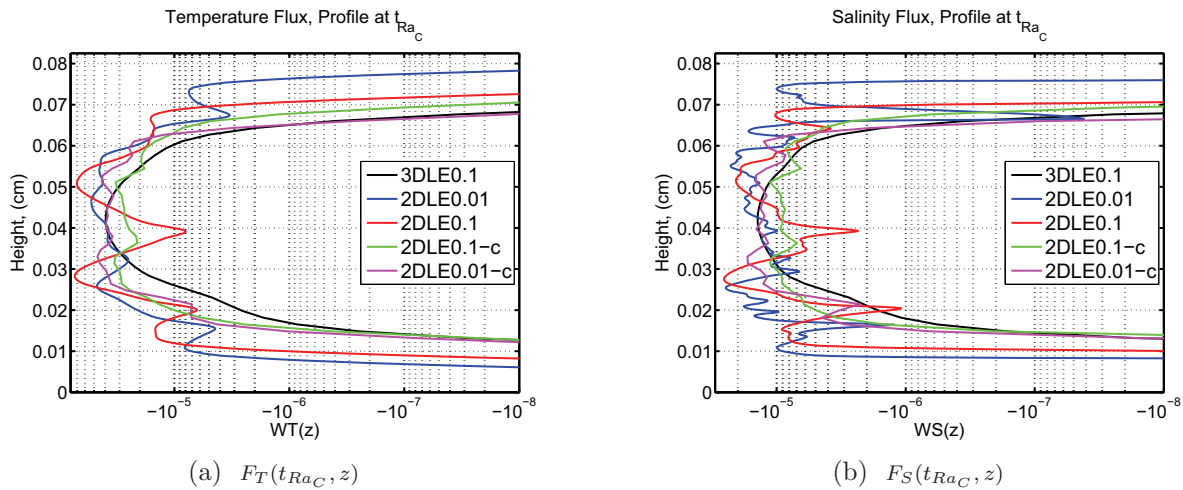


Abbildung 4.56: Profil der turbulenten Flüsse F_T und F_S bei t_{Ra_C} , (a) turbulenter Temperaturfluß F_T . (b) turbulenter Salzgehaltsfluß F_S .

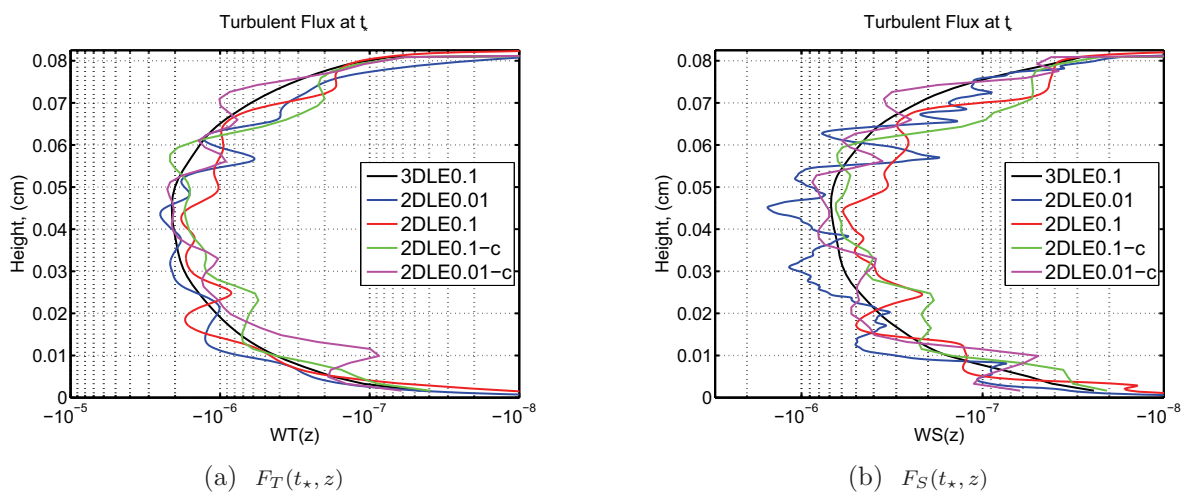


Abbildung 4.57: Profil der turbulenten Flüsse F_T und F_S bei t_* , (a) turbulenter Temperaturfluß F_T . (b) zeigt den turbulenten Salzgehaltsfluß F_S . Im zeitlichen Verlauf fallen die turbulenten Flüsse weiter ab.

und (b)). Hingegen liegt der turbulente Salzgehaltsfluß F_S bei t_* betragsmäßig zwei bis drei Größenordnungen über dem diffusiven Salzgehaltsfluß F_S^{diff} , so daß dieser nur einen marginalen Einfluß auf den ablaufenden Prozess ausübt.

Im Rückblick auf Abschnitt 4.2, wo die gleiche Gitterauflösung wie bei 2DLE0.01-c und 2DLE0.1-c verwendet wurde, zeigt sich, daß für die Salzfinger die Lewiszahl nur von untergeordneter Bedeutung ist.

4.3.3 Zusammenfassung

In erster Linie wird die Struktur der Salzfinger durch (Abbildung 4.44(a) und 4.44(b)) durch die molekulare Lewiszahl τ bestimmt.

Die entstandenen turbulenten Flüsse von Temperatur und Salzgehalt hingegen erweisen sich in der Anfangsphase bis t_{\max} , bzw. bis t_{RaC} als unempfindlich auf die unterschiedlichen Lewiszahlen bei 2DLE0.01 und 2DLE0.1, bzw. bei 2DLE0.01-c und 2DLE0.1-c. Nach Abklingen der turbulenten Flüsse (nach t_*) zeigt sich der Einfluß der Lewiszahl in F_T und F_S (Abbildung 4.54) sehr deutlich in der verschiedenen Entwicklung im zeitlichen Verlauf, wie auch im Salzgehaltsprofil bei 2DLE0.01 und 2DLE0.1. Bedingt durch die grobe Gitteraufösung ist zwischen 2DLE0.1-c und 2DLE0.01-c der Einfluß der Lewiszahl τ nur schwach erkennbar. Die Lewiszahl wurde hier nicht (oder nur zum Teil) aufgelöst.

Durch die Verwendung einer größeren Lewiszahl (z.B. $\tau = 0,1$ anstatt $\tau = 0,01$) bei entsprechender Auflösung werden die entstehenden Flüsse von Temperatur und Salzgehalt nur wenig beeinflußt. Dies gilt zumindest solange, bis ein Regime erreicht wird, in dem die Diffusion wieder eine tragende Rolle spielt (z.B. nach t_*). Dadurch kann im Salzfingerfall ein deutlich größeres Gebiet betrachtet werden ohne qualitative Abstriche bei den Flüssen F_T und F_S – und damit bei der effektiven Diffusion K_T und K_S – in Kauf nehmen zu müssen.

Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Lewiszahl nur für die Salzfinger eine untergeordnete Bedeutung einnimmt. Andere Regime, wie z.B. die Semikonvektion oder das diffusive Regime, reagieren durch die Anordnung der Schichten durchaus empfindlich auf unterschiedliche Lewiszahlen. Dies war jedoch nicht Gegenstand der Untersuchungen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Durch die Salzfinger wird eine effektive Diffusion von Temperatur K_T und Salzgehalt K_S erzeugt. Die Größenordnungen dieser effektiven Diffusion ist etwa $K_\chi \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}$, für $\chi = T, S$, während die molekulare Diffusion mit $\kappa_T \approx 10^{-7} \text{ m}^2/\text{sec} \gg \kappa_S \approx 10^{-9} \text{ m}^2/\text{sec}$ deutlich geringer ausfällt. Das Potential, das die doppelt-diffusiven Prozesse in einer stabilen Schichtung entfalten können, zeigt sich in $K_T < K_S$.

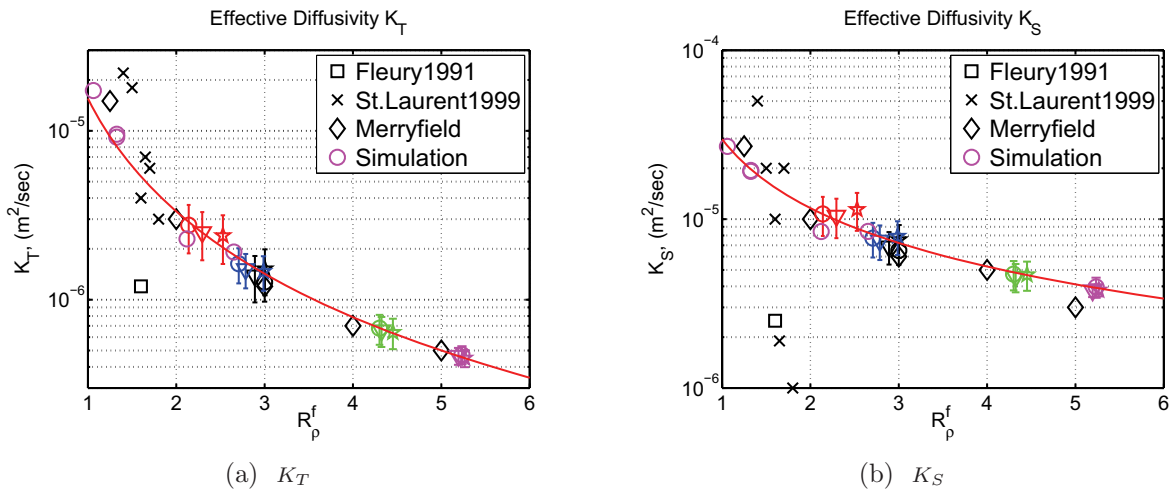


Abbildung 5.1: Zusammenfassung der effektiven Diffusion von Fleury und Lueck [16] (Quadrat), Laurent und Schmitt [39] (Kreuze) und Merryfield und Grinder [51], Merryfield [48, 45] (Rauten) für ein breites Stabilitätsspektrum. Die farbigen Markierungen geben die hier ermittelten Größen wieder.

Für jede der durchgeführten Simulationen aus Abschnitt 4.2 entstehen zwei Generationen von Salzfingern und effektiver Diffusion. Die erste Generation definiert sich durch die anwachsenden Salzfinger und liefert für die vorgegebene Stabilität

$$R_p^f = \quad 1,06; \quad 1,33; \quad 2,12; \quad 2,66$$

eine effektive Diffusion zum Zeitpunkt der maximalen turbulenten Flüsse (magentafarbene Kreise in Abbildung 5.1, bzw. 4.42). Diese ersten Ergebnisse bieten allerdings nur eine punktuelle Einschätzung. Eine zeitliche Mittelung ist aufgrund der schließlich absinkenden turbulenten Flüsse nicht möglich. Jedoch stimmen die so ermittelten Werte weitgehend mit denen von Merryfield [48, 45], Radko [60] und Schmitt [70] überein.

Im Anschluß an die Vermischung der zugrunde gelegten Schichtung bildet sich die zweite Generation der Salzfinger aus. Diese ist gekennzeichnet durch die Neustrukturierung der Temperatur- und Salzgehaltsprofile, sowie durch die – auf ein konstantes Niveau – absinkenden turbulenten Flüsse von Temperatur und Salzgehalt. Die Stabilität innerhalb der Grenzschicht, mit

$${}^{\text{eq}}R_\rho^f \approx \quad 2, 3; \quad 3; \quad 4, 3; \quad 5, 2$$

steigt dabei deutlich an (vergleiche Tabelle 4.5). Stabilität und turbulente Flüsse sind zeitlich robust. Die erhaltene effektive Diffusion von Temperatur und Salzgehalt (gekennzeichnet durch die farbigen Kreise, Dreiecke und Sterne in Abbildung 5.1, bzw. 4.42) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den z.B. von Merryfield [45] und Merryfield und Grinder [51] ermittelten Werten. Einzig die von Radko [60, 61] vorgestellte effektive Diffusion von Temperatur und Salzgehalt ist mit

$${}^{\text{Radko}}K_T = 1, 2 - 9 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec} \quad \text{und} \quad {}^{\text{Radko}}K_S = 2, 5 - 20 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}$$

größer, wobei die zugehörige Stabilität $1 \leq R_\rho^f \leq 2$ von Radko nicht genau zugeordnet wird.

Ein Vergleich der effektiven Diffusion erster Generation (bei $R_\rho^f = 2, 12$, und $2, 66$) und zweiter Generation (bei ${}^{\text{eq}}R_\rho^f = 2, 3$ und 3) ergibt sehr ähnliche Werte (vergleiche Abbildung 5.1). Dies zeigt (ebenso wie die Literaturangaben), daß die punktuellen Werte der effektiven Diffusion – zum Zeitpunkt der maximalen turbulenten Flüsse (magentafarbene Kreise) – bereits eine sehr gute Einschätzung der effektiven Diffusion, im eigentlichen Verständnis von

$${}^{\text{eq}}K_\chi = -\frac{\langle F_\chi \rangle_t}{\langle \partial_z \langle \chi \rangle_h \rangle_t}, \quad \text{für } \chi = T, S,$$

liefert.

Die effektive Diffusion von Temperatur und Salzgehalt wird durch

$$\mathcal{K}_T(R_\rho^f) = \frac{\mathcal{K}_S(R_\rho^f)}{\mathcal{T}(R_\rho^f)}, \quad \text{für } R_\rho^f \in [1, 6] \quad (4.23)$$

mit der turbulenten Lewiszahl

$$\mathcal{T}(R_\rho^f) = \zeta_1 + \zeta_2 R_\rho^f, \quad (4.21)$$

für $\zeta_1 = 0, 338$ und $\zeta_2 = 1, 577$ und

$$\mathcal{K}_S(R_\rho^f) = \frac{\kappa_T}{\vartheta_1 + \vartheta_2 R_\rho^f}, \quad \text{für } R_\rho^f \in [1, 6] \quad (4.22)$$

mit $\vartheta_1 = -2,817 \cdot 10^{-3}$ und $\vartheta_2 = 7,863 \cdot 10^{-3}$ parametrisiert. Dabei stellt $\kappa_T = 1,5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{sec}$ den molekularen Diffusionskoeffizienten der Temperatur dar. Beide Größen (\mathcal{K}_T und \mathcal{K}_S) werden in Abbildung 5.1 durch die rote Kurve wiedergegeben.

Die Stabilität geht bei der effektiven Diffusion mit $1/R_\rho^f$ bei K_S und mit $(1/R_\rho^f)^2$ bei K_T ein. Es konnte auch gezeigt werden, daß die Verwendung einer größeren molekularen Lewiszahl von $\tau = 0,1$ anstatt $\tau = 0,01$ (was dem realen Ozean entspricht) keine Nachteile mit sich bringt. Es wird trotzdem eine effektive Diffusion ermittelt, die mit den bisher vorgestellten Arbeiten übereinstimmt. Die Wahl einer hohen Gitterauflösung, die im Fall von $\tau = 0,01$ benötigt wird (z.B. bei der Situation 2DLE0.01 und 2DLE0.1), ist nicht zwingend notwendig. Der durch die hohe Auflösung hervorgerufene Unterschied in den entstandenen turbulenten Flüssen ist sehr gering (Abschnitt 4.3, Radko [62]). Dies wiederum führt dazu, daß ein sehr viel größeres Modellgebiet betrachtet werden kann, ohne qualitative Abstriche bei der erzeugten effektiven Diffusion hinnehmen zu müssen. Mit dieser Erkenntnis lassen sich umfangreiche Studien zu Salz fingern durchführen.

Für die übrigen doppelt-diffusiven Regime (Semikonvektion und diffusives Regime) ist dies nicht selbstverständlich. Hier ist durchaus möglich, daß die Lewiszahl zu einer signifikanten Auswirkung bei den entstehenden Flüssen führt. Vor allem das diffusive Regime stellt ein noch weitgehend unbekanntes Gebiet dar. Für die Semikonvektion zeigen z.B. Huppert und Moore [28] eine klare Abhängigkeit der entstehenden Flüsse von der molekularen Lewiszahl mit $F_T \sim F_S \tau^{-1/2}$.

5.2 Ausblick auf anschließende Arbeiten

Stabile Schichten, wie sie z.B. von Stellmach et al. [77] beschrieben wurden, konnten in dieser Arbeit nicht erzeugt werden. Dies ist nach wie vor ein unerreichtes Ziel. Die Notwendigkeit zur Durchführung einer solchen DNS-Studie liegt hier eher im theoretischen Interesse des Prozeßablaufs.

Mit Hilfe der gewonnenen Parametrisierung der effektiven Diffusion durch \mathcal{K}_T und \mathcal{K}_S können die Salzfinger auf größere Skalen (z.B. ein Gebiet das mehrere thermohaline Schichten enthält) übertragen und untersucht werden. Als nächster logischer Schritt wird die hier vorgestellte Parametrisierung der effektiven Diffusion in das MITgcm [1] eingebunden. Die Betrachtung der gesamten Wassersäule durch LES ist bereits geplant. Dies ermöglicht dann auch den Vergleich und die Überprüfung von bisherigen Parametrisierungen (z.B. diejenigen, die bei Large et al. [38] zum Einsatz kommen) mit der hier vorliegenden Parametrisierung. Die Auswirkung der Salzfinger, die sich z.B. im vertikalen Salzgehaltstransport widerspiegelt, auf die Gesamtheit der stabil geschichteten Wassersäule wird damit ebenfalls überprüft.

Im Hinblick auf die Semikonvektion sind ebenfalls Simulationen geplant, die eine Entstehung von Strukturen (ähnlich zu den Salz fingern) zeigen.

Diese sind jedoch auf einen geringen Stabilitätsbereich von etwa

$$1 \leq R_\rho^s \leq \frac{1 + \sigma}{\tau + \sigma} \quad (3.28)$$

beschränkt. Dies zu erreichen stellt sich als schwierig heraus, da aufgrund der sehr stabilen Schichtung die molekulare Lewiszahl durchaus wichtig erscheint. Folglich sind technisch aufwendige Simulationen zu erwarten.

Das Ziel weiterführender Arbeiten wird daher sein, den Parameterbereich der Semikonvektion hinsichtlich der Stabilität zu untersuchen und die resultierende effektive Diffusion aus der Semikonvektion mit der effektiven Salzfingerdiffusion zu vergleichen. Die dafür ausstehenden DNS vervollständigen dann die noch fehlenden Studien zur Semikonvektion in der Literatur. Danach müssen ebenfalls LES durchgeführt werden, die die parametrisierte Semikonvektion darstellen. Ob dieser Prozess – aufgrund der überaus stabilen Schichtung – ein signifikantes Verhalten zeigt, kann damit überprüft werden.

Durch Kombination der Parametrisierungen der Salzfinger Eigenschaft (\mathcal{K}_χ^f) sowie der Semikonvektion (\mathcal{K}_χ^s , für $\chi = T, S$) wird es schließlich möglich sein, eine Betrachtung der gesamten Wassersäule durchzuführen, die beide Prozesse beinhaltet.

Globale Aussagen über den vertikalen Transport von Temperatur und Salzgehalt zwischen Treppenstufen in kombinierten Schichtmodellen wären die wünschenswerte Folge. Dabei ist jedoch auch zu beachten, daß den Salz fingern bzw. der Semikonvektion jeweils unterschiedliche Stufenhöhen zugrunde liegen. Bei LES müssen daher die charakteristischen (mutmaßlichen) Stufengrößen von $\sim 0,5 - 5$ m (Semikonvektion) und $\sim 10 - 100$ m (Salzfinger), ebenfalls berücksichtigt werden.

Schließlich bleibt die Betrachtung des Übergangs von Salz fingern zur Semikonvektion (und umgekehrt) übrig. Bei einer kombinierten Betrachtung von Salz fingern und Semikonvektion in der gesamten Wassersäule tritt dieser Übergang zwangsläufig auf. Der einzig logisch Weg führt dabei über das diffusive Regime, das bisher kaum betrachtet wurde, mittlerweile jedoch zu einem interessanten Gebiet heranreift (Gargett et al. [19], Gargett [17], Kelly et al. [31], Merryfield et al. [52], Merryfield [50]). Der Umweg über das konvektive /instabile Regime hingegen, ist eher problemlos zu sehen. Hier spielen doppelt-diffusive Prozesse keine Rolle, es wird vielmehr erwartet, daß die effektive Diffusion in der Form von $K_T = K_S$ auftritt (Merryfield [48]) und die durch Salzfinger erzeugte effektive Diffusion bei weitem übersteigt.

A Anhang

A.1 Linearisieren der Grundgleichungen

Als Grundlage dient die Boussinesq approximierte Navier–Stokes Gleichung (z.B. aus Vallis [87])

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (3.1)$$

zusammen mit der Temperatur- und Salzgleichung

$$\partial_t T + \mathbf{u}(\nabla T) = \kappa_T \nabla^2 T \quad (3.2)$$

$$\partial_t S + \mathbf{u}(\nabla S) = \kappa_S \nabla^2 S \quad (3.3)$$

und der Divergenzfreiheit aus der Boussinesq Approximation

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

wobei $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, ($g = 9,81 \text{m/sec}^2$), P der Druck und \mathbf{u} die Geschwindigkeit sind. Die kinematische Viskosität ν , die Diffusionskoeffizienten von Temperatur κ_T und Salzgehalt κ_S sind dämpfende skalare Größen. Die Dichte und Referenzdichte werden mit ρ , bzw. ρ_0 angegeben.

Die Wirbelstromgleichung (folgt aus Gleichung 3.1)

$$\partial_t \omega + (\mathbf{u} \nabla) \omega - (\omega \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \omega + \nabla \times \left(\frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \right) \quad (A.1)$$

mit $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, (3.2) und (3.3) werden dimensionslos gestaltet durch die Skalierungsgrößen

$$t \sim \tilde{t} \frac{l^2}{\kappa_T} \quad u \sim \tilde{u} \frac{\kappa_T}{l} \quad T \sim \tilde{T} l \partial_z \langle T \rangle_h \quad S \sim \tilde{S} l \partial_z \langle S \rangle_h \quad (A.2)$$

wobei l die verwendete charakteristische Längenskala (Gebietshöhe) und κ_T der molekulare Diffusionskoeffizient der Temperatur darstellen. Unter Verwendung der Jacobideterminante

$$J(A, B) = \partial_x A \partial_z B - \partial_z A \partial_x B \quad (A.3)$$

und der Stromfunktion ψ mit

$$(u, w) = (-\partial_z \psi, \partial_x \psi) \quad (\text{A.4})$$

folgt das aus Gleichung (A.1)

$$\left(\tilde{\partial}_t - \frac{\nu}{\kappa_T} \tilde{\Delta}\right) \tilde{\Delta} \tilde{\psi} + J(\tilde{\psi}, \tilde{\Delta} \tilde{\psi}) = g \left(\frac{\alpha l^4 \partial_z \langle T \rangle_h \tilde{\partial}_x \tilde{T}}{\kappa_T^2} - \frac{\beta l^4 \partial_z \langle S \rangle_h \tilde{\partial}_x \tilde{S}}{\kappa_T^2} \right) \quad (\text{A.5})$$

Durch Einsetzen der Rayleigh-, Lewis- und Prandtlzahlen aus (3.10), (A.73) und (A.74) ergeben sich die dimensionslosen Terme

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma} \tilde{\partial}_t - \tilde{\Delta}\right) \tilde{\Delta} \tilde{\psi} + \frac{1}{\sigma} J(\tilde{\psi}, \tilde{\Delta} \tilde{\psi}) &= Ra_T \tilde{\partial}_x \tilde{T} - Ra_S \tilde{\partial}_x \tilde{S} \\ \tilde{\partial}_t \tilde{T} + \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\nabla} \tilde{T}) &= \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \\ \tilde{\partial}_t \tilde{S} + \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\nabla} \tilde{S}) &= \tau \tilde{\nabla}^2 \tilde{S} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Ab nun werden die dimensionslosen Gleichungen betrachtet und im Weiteren auf $\tilde{\cdot}$ verzichtet. Für die dimensionslosen Variablen wird statt $(\tilde{\psi}, \tilde{T}, \tilde{S})$, (ψ, T, S) verwendet.

Die Mittelwerte von Temperatur und Salzgehalt

$$\begin{aligned} T(t, \vec{x}) &= \langle T \rangle_h(z) + T'(t, \vec{x}) \\ S(t, \vec{x}) &= \langle S \rangle_h(z) + S'(t, \vec{x}) \\ \psi(t, \vec{x}) &= \langle \psi \rangle_h(z) + \psi'(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

wobei $\langle \psi \rangle_h(z) = 0$ und $\partial_z \langle \chi \rangle_h = 1$ werden in die Gleichungen (A.6) eingesetzt und es folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma} \partial_t - \Delta\right) \Delta \psi + \frac{1}{\sigma} [\partial_x \psi \partial_z \Delta \psi - \partial_z \psi \partial_x \Delta \psi] &= +Ra_T \partial_x T' - Ra_S \partial_x S' \\ \partial_t T' - \partial_z \psi \partial_x T' + \partial_x \psi \partial_z T' &= \nabla^2 T' + \nabla^2 \langle T \rangle_h - \partial_x \psi \partial_z \langle T \rangle_h \\ \partial_t S' - \partial_z \psi \partial_x S' + \partial_x \psi \partial_z S' &= \tau \nabla^2 S' + \tau \nabla^2 \langle S \rangle_h - \partial_x \psi \partial_z \langle S \rangle_h. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Mit einem allgemeinen Lösungsansatz

$$\boxed{(T', S', \psi) = (\hat{T}, \hat{S}, \hat{\psi}) e^{i(kx+mz)+\lambda t}} \quad (\text{A.9})$$

ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma} \lambda - i^2(k^2 + m^2)\right)(k^2 + m^2) i^2 \hat{\psi} + \frac{1}{\sigma} \underbrace{[i^4 k m (k^2 + m^2) - i^4 m k (k^2 + m^2)]}_{=0} \hat{\psi} e^{2i(t\lambda \dots)} \\ = Ra_T i k \hat{T} - Ra_S i k \hat{S} \\ \lambda \hat{T} + \underbrace{(i^2 m k \hat{\psi} \hat{T} - i^2 k m \hat{\psi} \hat{T})}_{=0} e^{i(\lambda t \dots)} = i^2(k^2 + m^2) \hat{T} - i k \hat{\psi} \\ \lambda \hat{S} + \underbrace{(i^2 m k \hat{\psi} \hat{S} - i^2 k m \hat{\psi} \hat{S})}_{=0} e^{i(\lambda t \dots)} = i^2 \tau (k^2 + m^2) \hat{S} - i k \hat{\psi} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma}\lambda + (k^2 + m^2)\right)(k^2 + m^2)i^2\widehat{\psi} &= Ra_T ik\widehat{T} - Ra_S ik\widehat{S} \\ (\lambda + (k^2 + m^2))\widehat{T} &= -ik\widehat{\psi} \\ (\lambda + \tau(k^2 + m^2))\widehat{S} &= -ik\widehat{\psi} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Zusammenfassen der Gleichungen (A.10) ergibt mit $\boxed{a^2 = k^2 + m^2}$,

$$\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right)\frac{a^2}{k^2} = -Ra_T \frac{1}{\lambda + a^2} + Ra_S \frac{1}{\lambda + \tau a^2} \quad (\text{A.11})$$

Daraus folgt schließlich

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right)\frac{a^2}{k^2}(\lambda + a^2)(\lambda + \tau a^2) = -Ra_T(\lambda + \tau a^2) + Ra_S(\lambda + a^2)} \quad (3.9)$$

A.1.1 Stabilitätsanalyse

Eine Stabilitätsanalyse läßt sich durchführen unter der Verwendung von $\lambda = \lambda_{re} + i\lambda_{im}$ mit

$$\Lambda(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2\xi + \lambda\eta + \delta = 0 \quad (3.11)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi &= (1 + \tau + \sigma)a^2 \\ \eta &= a^4(\tau + \sigma + \tau\sigma) + \frac{k^2}{a^2}(Ra_T - Ra_S)\sigma \\ \delta &= a^6\tau\sigma + k^2(\tau Ra_T - Ra_S)\sigma \end{aligned}$$

Für den Real- bzw. Imaginärteil folgt

$$\text{Re}(\Lambda) = \lambda_{re}^3 - 3\lambda_{re}\lambda_{im}^2 + \xi(\lambda_{re}^2 - \lambda_{im}^2) + \lambda_{re}\eta + \delta = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Im}(\Lambda) = -\lambda_{im}^3 + 3\lambda_{re}^2\lambda_{im} + 2\xi\lambda_{re}\lambda_{im} + \eta\lambda_{im} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda_{re} = 0$ folgen dann die Grenzen der Regime durch Lösen von

$$\delta = 0 \quad (\text{A.14})$$

bzw. im Fall das nur der reelle Anteil $\lambda_{re} = 0$ durch Lösen des Gleichungssystems

$$-\xi\lambda_{im}^2 + \delta = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$-\lambda_{im}^3 + \eta\lambda_{im} = 0 \quad (\text{A.16})$$

Damit folgen die Gleichungen (3.14) und (3.2.2)

$$\frac{1}{\tau}Ra_S = Ra_T + \frac{a^6}{k^2} \quad (3.14)$$

$$Ra_S = Ra_T \frac{1 + \sigma}{\tau + \sigma} + \frac{a^6}{k^2} \frac{(1 + \sigma)(1 + \tau)}{\sigma} \quad (3.2.2)$$

Für feste Wellenzahlen k und m folgt mit

$$\lambda = \tilde{\lambda}a^2 \quad (A.17)$$

und den daraus folgenden Rayleighzahlen

$$\widetilde{Ra}_T = Ra_T \frac{k^2}{a^6} \quad \text{und} \quad \widetilde{Ra}_S = Ra_S \frac{k^2}{a^6}$$

eine Lösung von $\Lambda(\tilde{\lambda})$, die nur noch von den modifizierten Rayleighzahlen \widetilde{Ra}_T und \widetilde{Ra}_S abhängt.

Mit Hilfe dieser folgt

$$\frac{1}{\tau}\widetilde{Ra}_S = \widetilde{Ra}_T + 1$$

bzw.

$$\widetilde{Ra}_S = \widetilde{Ra}_T \frac{1 + \sigma}{\tau + \sigma} + \frac{(1 + \sigma)(1 + \tau)}{\sigma}$$

Anmerkung:

Werden Temperatur und Salzgehalt am oberen und unteren Gebietsrand durch die Bedingung

$$w(z) = T'(z) = S'(z) = 0, \quad z = 0, 1 \quad (A.18)$$

festgehalten, so folgt durch den Ansatz von

$$\psi \sim e^{\lambda t} \sin(\pi k x) \sin(\pi n z) \quad (A.19)$$

$$T', S' \sim e^{\lambda t} \cos(\pi k x) \sin(\pi n z) \quad (A.20)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{R}$ direkt Gleichung (3.9) mit

$$\frac{\vartheta^2}{k^2} \left(\frac{1}{\sigma} \lambda + \xi^2 \right) (\lambda + \xi^2) (\lambda + \tau \xi^2) = -Ra_T (\lambda + \tau \xi^2) + Ra_S (\lambda + \xi^2) \quad (A.21)$$

mit $\vartheta^2 = \pi^2(k^2 + n^2)$.

Für den stationären Fall $\lambda = 0$ oder gleichbedeutend $\partial_t(\cdot) = 0$ folgt mit $n = 1$ für den Salzfingerfall die maximale Rayleighzahl (Huppert und Moore [28]) mit

$$\frac{1}{\tau}Ra_S = Ra_T + \frac{27}{4}\pi^4 \quad (A.22)$$

und entsprechend für die Semikonvektion mit $\lambda_{re} = 0$

$$Ra_S = Ra_T \frac{1 + \sigma}{\tau + \sigma} + \pi^4 \frac{27(1 + \sigma)(1 + \tau)}{4\sigma} \quad (\text{A.23})$$

Gupta et al. [23] beweist für diese, z.B. von Stern [78] (Salzfinger) und Veronis [88] (Semikonvektion) vorgestellten Fälle, daß die Wachstumsrate durch

$$|\lambda| \leq \frac{R_\rho R_S \sigma}{4(\tau + \sigma)\pi^4} \left(\frac{4R_T \sigma}{27\pi^4(\tau + \sigma)} - 1 \right)^{1/2} \quad (\text{A.24})$$

beschränkt ist.

A.2 Der Soretteffekt

Ein Effekt, der bei der Betrachtung doppelt-diffusiver Systeme eine Rolle spielen könnte, hier jedoch nur am Rande beschrieben wird, ist der Soret- und Dufoureffekt. Ein gekoppeltes T-S-System mit dem Diffusionstensor \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \kappa_T & \kappa_{TS} \\ \kappa_{ST} & \kappa_S \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

löst nun den in den Gleichungen (3.2) und (3.3) verwendeten Fall

$$\widehat{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \kappa_T & 0 \\ 0 & \kappa_S \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

ab. Die Einheiten der gemischten Diffusionsterme sind dabei

$$[\kappa_{TS}] = \left[\frac{\text{m}^2 T}{\text{sec } S} \right] \quad \text{bzw.} \quad [\kappa_{ST}] = \left[\frac{\text{m}^2 S}{\text{sec } T} \right]. \quad (\text{A.27})$$

Untersucht wurde dieser Effekt theoretisch bereits von McDougall [42], der dies mit Hilfe linearer Theorie beschrieben hat. Malashetty und Gaikwad [40] und Parvathy und Patil [57] führten bereits eine Stabilitätsanalyse unter Zunahme von horizontalen Gradienten durch.

Durch Caldwell und Eide [8] wurde gezeigt, daß $\kappa_{ST} \sim 10^{-3} \kappa_T$ gilt. Für den Koeffizienten κ_{TS} liegen keine Werte vor, jedoch wird davon ausgegangen, daß dieser Koeffizient in ähnlicher Größenordnung vorliegt.

Für eine eindeutige Lösung mit positiven Eigenwerten gelte die Annahme

$$\det(\mathbf{K}) = \kappa_T \kappa_S - \kappa_{TS} \kappa_{ST} > 0. \quad (\text{A.28})$$

Die Annahme $\kappa_{ST} = \kappa_{TS}$ ist bisher nicht bestätigt. Durch Zufügen der Kreuzdiffusions-Terme κ_{TS} und κ_{ST} zu Gleichungen (3.2) und (3.3) ergibt sich das folgende abgewandelte Gleichungssystem

$$(\partial_t - \nu \Delta) \Delta \psi + \partial_x \psi \partial_z \Delta \psi - \partial_z \psi \partial_x \Delta \psi = (\alpha \partial_x T - \beta \partial_x S) g \quad (\text{A.1})$$

$$\partial_t T + \mathbf{u}(\nabla T) = \kappa_T \nabla^2 T + \kappa_{TS} \nabla^2 S \quad (\text{3.2 Dufour})$$

$$\partial_t S + \mathbf{u}(\nabla S) = \kappa_S \nabla^2 S + \kappa_{ST} \nabla^2 T \quad (\text{3.3 Soret})$$

Der dimensionslose Fall

Der dimensionslose Fall läßt sich analog zu dem schon oben gezeigten Fall analysieren. Jedoch gibt es bislang keine veröffentlichte Arbeit hierzu. Zu den Gleichungen (A.6) werden die dimensionslosen Anteile des Soret- und Dufoureffektes hinzugefügt. Der ursprüngliche Diffusionstensor (A.25) wird zum dimensionslosen Äquivalent

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{D} \\ \mathcal{S} & \tau \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

mit $\tau \geq \mathcal{D}\mathcal{S}$ und dem Soret- \mathcal{S} und Dufourparameter \mathcal{D} ,

$$\mathcal{S} = \frac{\kappa_{ST}\beta}{\kappa_S\alpha} \quad \text{und} \quad \mathcal{D} = \frac{\kappa_{TS}\alpha}{\kappa_T\beta} \quad (\text{A.30})$$

Zu den dimensionslosen Gleichungen (A.6) werden die beiden folgenden Terme hinzuaddiert

$$\kappa_{TS} \nabla^2 \mathcal{S} = \frac{\kappa_{TS}}{\kappa_T} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial_z \langle S \rangle_h}{\partial_z \langle T \rangle_h} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \frac{1}{R_\rho} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{S}} \quad (\text{A.31})$$

$$\kappa_{ST} \nabla^2 \mathcal{T} = \frac{\kappa_{ST}}{\kappa_T} \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial_z \langle T \rangle_h}{\partial_z \langle S \rangle_h} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{D} \tau R_\rho \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{T}} \quad (\text{A.32})$$

und damit folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma} \tilde{\partial}_t - \tilde{\Delta} \right) \tilde{\Delta} \tilde{\psi} + \frac{1}{\sigma} J(\tilde{\psi}, \tilde{\Delta} \tilde{\psi}) &= Ra_T \tilde{\partial}_x \tilde{\mathcal{T}} - Ra_S \tilde{\partial}_x \tilde{\mathcal{S}} \\ \tilde{\partial}_t \tilde{\mathcal{T}} + \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{T}}) &= \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{T}} + \mathcal{S} \frac{1}{R_\rho} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{S}} \\ \tilde{\partial}_t \tilde{\mathcal{S}} + \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\nabla} \tilde{\mathcal{S}}) &= \tau \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{S}} + \mathcal{D} \tau R_\rho \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{T}} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Durch Linearisieren mit

$$\tilde{\chi}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \langle \tilde{\chi} \rangle_h(z) + \tilde{\chi}'(\tilde{\mathbf{x}}, t), \quad \text{für} \quad \tilde{\chi} = \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\psi}, \quad (\text{A.34})$$

wobei $\partial_z \langle T \rangle_h = \text{konst}$, bzw. $\partial_z \langle S \rangle_h = \text{konst}$, $\langle \psi \rangle_h = 0$ und dem Lösungsansatz

$$(\tilde{\psi}, \tilde{\mathcal{T}}', \tilde{\mathcal{S}}') = (\hat{\psi}, \hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{S}}) e^{\lambda \tilde{t} + i(k\tilde{x} + m\tilde{z})} \quad (\text{A.35})$$

folgt für den Soret- und Dufouranteil

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \frac{1}{R_\rho} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{S}} &= -a^2 \mathcal{S} \frac{1}{R_\rho} \hat{\mathcal{S}} \\ \mathcal{D} \tau R_\rho \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathcal{T}} &= -a^2 \mathcal{D} \tau R_\rho \hat{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

wobei $a^2 = k^2 + m^2$. Diese beiden Komponenten für den Soret- und Dufouranteil werden zu den Gleichungen (A.10) hinzugefügt und ergeben

$$\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + (k^2 + m^2)\right)(k^2 + m^2)i^2\hat{\psi} = Ra_T ik\hat{T} - Ra_S ik\hat{S} \quad (\text{A.36})$$

$$(\lambda + (k^2 + m^2))\hat{T} = -ik\hat{\psi} - a^2\mathcal{S}\frac{1}{R_\rho}\hat{S} \quad (\text{A.37})$$

$$(\lambda + \tau(k^2 + m^2))\hat{S} = -ik\hat{\psi} - a^2\mathcal{D}\tau R_\rho\hat{T} \quad (\text{A.38})$$

Auflösen von Gleichung (A.36)

$$\hat{\psi} = -ik \frac{Ra_T\hat{T} - Ra_S\hat{S}}{\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right)a^2} \quad (\text{A.39})$$

und Einsetzen in die T-S-Gleichungen (A.37) und (A.38) ergibt

$$(\lambda + a^2)\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right)\hat{T} = -a^2\mathcal{S}\frac{1}{R_\rho}\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right)\hat{S} + i^2\frac{k^2}{a^2}(Ra_T\hat{T} - Ra_S\hat{S}) \quad (\text{A.40})$$

$$(\lambda + \tau a^2)\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right)\hat{S} = -a^2\mathcal{D}\tau R_\rho\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right)\hat{T} + i^2\frac{k^2}{a^2}(Ra_T\hat{T} - Ra_S\hat{S}) \quad (\text{A.41})$$

Daraus ergibt sich folgende Bedingung

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right)(\lambda + a^2)(\lambda + \tau a^2) - a^4\mathcal{S}\mathcal{D}\tau\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right) \\ &+ \lambda\frac{k^2}{a^2}(Ra_T - Ra_S) + k^2(\tau Ra_T - Ra_S) + k^2\left(\mathcal{D}\tau \underbrace{R_\rho Ra_S}_{=Ra_T} - \mathcal{S}\frac{1}{\underbrace{R_\rho}_{=Ra_S}}Ra_T\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right)(\lambda + a^2)(\lambda + \tau a^2) - a^4\mathcal{S}\mathcal{D}\tau\left(\frac{1}{\sigma}\lambda + a^2\right) \\ &+ \lambda\frac{k^2}{a^2}(Ra_T - Ra_S) + k^2(\tau Ra_T(1 + \mathcal{D}) - Ra_S(1 + \mathcal{S})) = 0 \quad (\text{A.42}) \end{aligned}$$

Stabilitätsanalyse mit Soret- und Dufourparameter

Wie schon im Falle von $\mathcal{S} = 0$ und $\mathcal{D} = 0$ läßt sich eine Stabilitätsanalyse durchführen (Vergleiche die Analyse in Abschnitt 3.1.1, bzw. im Anhang A.1).

Für die Wachstumsrate

$$\lambda = \lambda_{re} + i\lambda_{im} \quad (\text{A.43})$$

werden für die beiden Fälle der Salzfinger ($\lambda = 0$) und der Semikonvektion ($\lambda_{re} = 0$) unterschieden.

Der Salzfingerfall mit $\lambda = 0$

Der stationäre Fall mit $\lambda = 0$ liefert die Bedingung

$$\begin{aligned} a^6 \tau - a^6 \mathcal{S} \mathcal{D} + k^2 (\tau Ra_T (1 + \mathcal{D}) - Ra_S (1 + \mathcal{S})) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{a^6}{k^2} (\tau - \mathcal{S} \mathcal{D}) &= -(\tau Ra_T (1 + \mathcal{D}) - Ra_S (1 + \mathcal{S})) \end{aligned}$$

und es folgt die Bedingung

$$\boxed{Ra_S \frac{1 + \mathcal{S}}{\tau - \mathcal{S} \mathcal{D}} = \frac{a^6}{k^2} + \tau Ra_T \frac{1 + \mathcal{D}}{\tau - \mathcal{S} \mathcal{D}}} \quad (\text{A.44})$$

Bemerkung A.1. Für $\mathcal{D} = \mathcal{S} = 0$ folgt direkt Gleichung (3.14). Dies macht den Soret-effekt konsistent zu den Überlegungen vorangegangener Untersuchungen ohne den Soret- und Dufouranteil, wie z.B. von Stern [78], [79] und [80], sowie Veronis [88] und Holyer [24], [25] und [26] beschrieben wurde.

Semikonvektion mit $\lambda_{re} = 0$

Für die Semikonvektion folgt mit $\lambda = i\lambda_{im}$ analog zu Gleichung (3.2.2)

$$\begin{aligned} Ra_T &= Ra_S \frac{\tau + \sigma - \mathcal{S}}{1 + \sigma - \mathcal{D}} + \frac{a^6}{k^2} \left(\frac{\tau + \sigma}{1 + \sigma - \mathcal{D}} \mathcal{D} \mathcal{S} \tau - \frac{(\tau + 1)(1 + \sigma)(\sigma + \tau)}{\sigma(1 + \sigma - \mathcal{D})} \right) \\ Ra_S &= Ra_T \frac{1 + \sigma - \mathcal{D}}{\tau + \sigma - \mathcal{S}} - \frac{a^6}{k^2} \left(\frac{\tau + \sigma}{\tau + \sigma - \mathcal{S}} \mathcal{D} \mathcal{S} \tau - \frac{(\tau + 1)(1 + \sigma)(\sigma + \tau)}{\sigma(\tau + \sigma - \mathcal{S})} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Bemerkung A.2. Wieder werden mit $\mathcal{D} = \mathcal{S} = 0$ die schon bekannten Fälle (3.2.2) und (3.15) erhalten.

Fazit und Ergebnis

McDougall [42] hat darauf hingewiesen, daß die Soret- und Dufourparameter für das System mit Temperatur und Salzgehalt unbekannt waren, so daß nur theoretische Annahmen für die Soret- und Dufourparameter \mathcal{S} und \mathcal{D} gemacht wurden. Jedoch stellten Johnson und Niedermeier [30] bereits sehr viel früher fest, daß im Fall einer Zuckerlösung der Soretparameter etwa

$$1,1 \times 10^{-3} \leq \mathcal{S} \leq 2,8 \times 10^{-3} \quad (\text{A.46})$$

beträgt und damit vernachlässigbar klein war. Später konnten Caldwell und Eide [8] den Soretparameter in Abhängigkeit der Temperatur experimentell bestimmen, wobei mehrere verschiedene Flüssigkeitslösungen - unter anderem auch Salzlösungen - zur Anwendung kamen. Der ermittelte Soretparameter für eine Salzlösung betrug bei 20° C etwa

$$\mathcal{S} \approx 0,61 \times 10^{-3} \quad (\text{A.47})$$

und kann bei Betrachtung der Salzfinger (Gleichungen (A.44) bzw. (A.45)) vernachlässigt werden.

Bei einer Schichtbildung hingegen könnte, aufgrund der sehr langen Zeitskalen, gerade bei sehr hohen Stabilitäten ($R_\rho^f \nearrow \frac{1}{\tau}$) dieser Effekt jedoch wieder eine Rolle spielen. Bislang wurde dies noch nicht untersucht.

Für andere Stofflösungen neben den Salzgehaltslösungen ergaben sich bei Caldwell und Eide [8] sehr abweichende Ergebnisse. Bei Schwefelverbindungen wurde festgestellt, daß der Soretteffekt etwa 20 – 30% zum diffusiven Gesamtfluß beisteuerte. Im Hinblick auf die **NATRE** Messreihe (Seite 10) wo eine Schwefelverbindung in eine thermohaline Schicht eingebracht wurde, könnte der Soret-Dufoureffekt mit dieser Erkenntnis eine wichtige Rolle spielen. Untersucht wurde dies bisher nicht.

In der linearen Theorie wird durch die zusätzlichen Parameter \mathcal{D} und \mathcal{S} das Gleichungssystem nur geringfügig komplizierter, jedoch sind die nicht-linearen Wechselwirkungen, die durch den Dufourparameter bedingt sind bislang weitgehend unbekannt.

Der Soret- und Dufoureffekt konnte in speziell hierfür durchgeführten Simulationen (mit Soretkoeffizienten, die in der Größenordnung von Caldwell und Eide [8] lagen) zwar nachgewiesen werden, jedoch waren die resultierenden diffusiven Flüsse sehr klein und hatten keine Auswirkung auf die Salzfinger.

Die Stabilität (wie Gleichung (A.44) und (A.45) zeigen) wird durch den Soret- und Dufoureffekt ($\mathcal{S} \sim \mathcal{D} \sim 10^{-3}$) kaum beeinflusst und kann daher vernachlässigt werden. Aus diesem Grund wurde hier nur kurz auf den Soret- und Dufoureffekt hingewiesen, ohne weiter darauf einzugehen. Für spätere Studien mit Hilfe von DNS (z.B. mit anderen Stoffgemischen neben Salzlösungen) wurde jedoch in dieser Arbeit bereits eine Grundlage geschaffen.

A.3 Die effektive Diffusion nach Merryfield

Die Herleitung der effektiven Diffusion von Temperatur und Salzgehalt

$$\begin{aligned} {}^{\text{Merr}}K_T &= \frac{\gamma}{R_\rho} K_S \quad \text{m}^2/\text{sec} \\ {}^{\text{Merr}}K_S &= C \frac{1 - \tau R_\rho}{R_\rho - \gamma} \quad \text{m}^2/\text{sec}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit $C = 0,17 \times 10^{-4}$, die in Merryfield [48], Merryfield und Grinder [51] oder Merryfield et al. [53] verwendet wird, soll hier kurz erläutert werden.

Die Überlegungen basieren auf einem Modell, das die Flüsse von Temperatur und Salzgehalt begrenzt. Dabei wird ein (Salz-) Finger betrachtet, der mit konstanter Geschwindigkeit \mathcal{W} absinkt oder aufsteigt. Dies führt zu der folgenden Überlegung

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, \vec{x}) &= \mathcal{W}(z)\vec{e}_z + \mathbf{u}'(t, \vec{x}) \\ p(t, \vec{x}) &= p_0 + g\rho_0 z + p'(t, \vec{x}) \end{aligned} \tag{A.48}$$

wobei \mathbf{u}' die Geschwindigkeitsfluktuation und \vec{e}_z den vertikalen Einheitsvektor bezeichnen.

Durch Substitution der Gleichungen (A.48), zusammen mit den entsprechenden Substitutionen der Mittelwertgleichungen für Temperatur und Salzgehalt in die Hauptgleichungen (3.1) bis (3.3) und Annahme der Stationarität der Gleichungen, folgt (es gelte $\langle \mathbf{u}' \rangle_h = 0$, $D_t \langle T' \rangle_h = D_t \langle S' \rangle_h = 0$) nach Bilden des Mittelwerts schließlich

$$\langle (\mathbf{u}' \nabla) \mathbf{u}' \rangle_h = -\frac{1}{\rho_0} \langle \nabla p' \rangle_h + \mathbf{g}(-\alpha \langle T' \rangle_h + \beta \langle S' \rangle_h) + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}' \rangle_h \quad (\text{A.49})$$

$$\langle \mathbf{u}' \nabla T' \rangle_h = -\langle w \rangle_h \partial_z \langle T \rangle_h(z) + \kappa_T \langle \nabla^2 T' \rangle_h(z) \quad (\text{A.50})$$

$$\langle \mathbf{u}' \nabla S' \rangle_h = -\langle w \rangle_h \partial_z \langle S \rangle_h(z) + \kappa_S \langle \nabla^2 S' \rangle_h(z) \quad (\text{A.51})$$

Der Druckterm aus Gleichung (A.49) folgt durch die Divergenz von Gleichung (3.1)

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p' = -\nabla \cdot (\mathbf{u}' \nabla) \mathbf{u}' + \mathbf{g} \partial_z (\alpha T' + \beta S') \quad (\text{A.52})$$

die, eingesetzt in die z-Komponente von Gleichung (A.49) zusammen mit dem invertierten Laplaceoperator aus dem Druckterm, ergibt

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{u}' \nabla) w' \rangle_h - \langle \partial_z \nabla^{-2} (\nabla (\mathbf{u}' \nabla) \mathbf{u}') \rangle_h \\ = g \langle (1 - \partial_z^2 \nabla^{-2}) (-\alpha T' + \beta S') \rangle_h + \nu \langle \nabla^2 w' \rangle_h \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Es werden ab nun verschiedene Annahmen getroffen, z.B. sei die Geschwindigkeitsfluktuation w' proportional gegeben durch die Geschwindigkeit \mathcal{W} eines einzelnen Salzingers ($w' \sim \mathcal{W}$) was zu einer Vereinfachung der Gleichungen führt. Die Wellenzahlen folgen durch einen allgemeinen Lösungsansatz (vergleiche vorangegangenen Abschnitt A.1) mit

$$\partial_x^2 \sim -k^2 \quad \text{und} \quad \partial_z^2 \sim -m^2 \quad (\text{A.54})$$

wobei $k \sim m$, $a^2 = k^2 + m^2$ und C eine universelle Konstante darstellen.

$$\langle \mathbf{u}' \nabla w' \rangle_h - \langle \partial_z \nabla^{-2} (\nabla (\mathbf{u}' \nabla) \mathbf{u}') \rangle_h \sim Ca | \mathcal{W} | \mathcal{W} \quad (\text{A.55})$$

$$\langle \mathbf{u}' \nabla T' \rangle_h \sim Ca | \mathcal{W} | \hat{T} \quad (\text{A.56})$$

$$\langle \mathbf{u}' \nabla S' \rangle_h \sim Ca | \mathcal{W} | \hat{S} \quad (\text{A.57})$$

Eingesetzt in die Gleichungen (A.49), (A.50) und (A.51) führt dies zu dem Resultat

$$Ca | \mathcal{W} | \mathcal{W} = g(\alpha \hat{T} - \beta \hat{S}) - \nu a^2 \mathcal{W} \quad (\text{A.58})$$

$$Ca | \mathcal{W} | \hat{T} = -\mathcal{W} \partial_z \langle T \rangle_h - a^2 \kappa_T \hat{T} \quad (\text{A.59})$$

$$Ca | \mathcal{W} | \hat{S} = -\mathcal{W} \partial_z \langle S \rangle_h - a^2 \kappa_S \hat{S} \quad (\text{A.60})$$

Diese Gleichungen führen zu einem ähnlichen Eigenwertproblem wie bei Schmitt [66]. Wir definieren

$$Ca \mathcal{W} = \lambda \quad (\text{A.61})$$

wobei λ eine Wachstumsrate aus linearer Theorie ist.

Aus den Gleichungen für Temperatur und Salzgehalt ergibt sich

$$\begin{aligned}\alpha\lambda\widehat{T} &= -\alpha\mathcal{W}\partial_z\langle T \rangle - \alpha\kappa_T a^2\widehat{T} \\ \beta\lambda\widehat{S} &= -\beta\mathcal{W}\partial_z\langle S \rangle - \beta\kappa_S a^2\widehat{S}\end{aligned}\tag{A.62}$$

und unter Annahme von $\gamma = \frac{\alpha\widehat{T}}{\beta\widehat{S}}$ und $R_\rho = \frac{\alpha\langle T_z \rangle}{\beta\langle S_z \rangle}$ folgt aus den Gleichungen (A.62) schließlich

$$\frac{\lambda}{a^2} = \frac{(\tau R_\rho - \gamma)}{\gamma - R_\rho} \kappa_T\tag{A.63}$$

Aus der vereinfachten Salzgleichung (A.60) folgt nach Vernachlässigung des molekularen Diffusionskoeffizienten κ_S

$$\lambda\widehat{S} = -\mathcal{W}\partial_z\langle S \rangle\tag{A.64}$$

und mit Verwendung der Bedingung $|\mathcal{W}| = \frac{\lambda}{Ca}$, ergibt sich

$$\lambda\mathcal{W}\widehat{S} = -\mathcal{W}^2\partial_z\widehat{S}\tag{A.65}$$

$$= -\frac{\lambda^2}{C^2 a^2}\partial_z\widehat{S}\tag{A.66}$$

Die effektive Diffusion des Salzgehaltes wird damit bestimmt durch

$${}^{\text{Merr}}K_S = \frac{\mathcal{W}\widehat{S}}{\partial_z\langle S \rangle} = -\frac{\lambda}{a^2 C^2}\tag{A.67}$$

$$\stackrel{\text{(A.63)}}{=} \frac{1}{C^2} \frac{(\tau R_\rho - \gamma)}{\gamma - R_\rho} \kappa_T\tag{A.68}$$

und entsprechend folgt für die effektive Diffusion der Temperatur

$${}^{\text{Merr}}K_T = \frac{\mathcal{W}\widehat{T}}{\partial_z\langle T \rangle} = {}^{\text{Merr}}K_S \frac{\gamma}{R_\rho}\tag{A.69}$$

Mit Hilfe numerischer Simulationen wurde von Merryfield der Wert

$$\frac{\kappa_T}{C^2} \approx 0,17 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}\tag{A.70}$$

bestimmt. Daraus ergeben sich die in Merryfield et al. [53] und Merryfield und Grinder [51] gemachten Angaben der effektiven Diffusion.

A.4 Glossar der verwendeten Parameter und verschiedener Kenngrößen

Koeffizienten von Temperatur und Salzgehalt

Der Ausdehnungskoeffizient von Temperatur α und der Kontraktionskoeffizient des Salzgehalts β sind definiert durch

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \partial_T \rho|_{S,p} \quad (\text{A.71})$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \partial_S \rho|_{T,p} \quad (\text{A.72})$$

Lewis- und Prandtlzahl

Das Verhältnis der molekularen Diffusionskoeffizienten von Salzgehalt κ_S und Temperatur κ_T wird durch die Lewiszahl τ beschrieben, während die Prandtlzahl σ das Verhältnis von kinematischer Viskosität ν und des molekularen Diffusionskoeffizienten von Temperatur wiedergibt

$$\tau = \frac{\kappa_S}{\kappa_T} \quad (\approx 0,01 \quad \text{im Ozean}) \quad (\text{A.73})$$

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa_T} \quad (\approx 7 \quad \text{im Ozean}) \quad (\text{A.74})$$

Die Lewiszahl stellt dabei die eigentliche Herausforderung bei der Simulation von Salz-fingern dar. Je größer der Unterschied zwischen den molekularen Difusionskoeffizienten ist, desto feiner muß die Gitterauflösung gewählt werden. Bei unzureichender Gitterauflösung werden vor allem die Salzgehaltsstrukturen und damit die Salzfinger in ihren Eigenheiten nicht vollständig aufgelöst, was zu falschen Ergebnissen und Schlußfolgerungen führen kann.

Turbulente Flüsse

Die abwärtsgerichteten turbulenten Flüsse von Temperatur F_T und Salzgehalt F_S sind gegeben durch

$$F_\chi(t, z) = \langle w' \chi' \rangle_h(t, z) \quad (\text{A.75})$$

wobei $\chi \in \{T, S\}$ die Temperatur und den Salzgehalt darstellen. Dabei wird durch $\langle \cdot \rangle_h$ das horizontale Mittel definiert.

Die (turbulenten) Dichteflüsse und deren Komponenten von Temperatur und Salzgehalt ergeben sich durch:

$$F_{\alpha T}(t, z) = \alpha \langle w' T' \rangle_h(t, z) \quad (\text{A.76})$$

$$F_{\beta S}(t, z) = \beta \langle w' S' \rangle_h(t, z) \quad (\text{A.77})$$

$$\begin{aligned} F_\rho(t, z) &= \langle w' \rho' \rangle_h(t, z) = -\alpha \langle w' T' \rangle_h(t, z) + \beta \langle w' S' \rangle_h(t, z) \\ &= -F_{\alpha T}(t, z) + F_{\beta S}(t, z) \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

Diffusive Flüsse

Die diffusiven Flüsse von Temperatur und Salzgehalt sind

$${}^{\text{diff}}F_{\chi}(t, \vec{x}) = \kappa_{\chi} \nabla \chi(t, \vec{x}) \quad (\text{A.79})$$

wobei der mittlere vertikale diffusive Fluß gegeben ist mit

$${}^{\text{diff}}F_{\chi}(t, z) = \kappa_{\chi} \partial_z \langle \chi \rangle_h(t, z) \quad (\text{A.80})$$

wobei $\chi \in \{T, S\}$.

Stabilitätsverhältnis

Das Stabilitätsverhältnis definiert sich durch das Verhältnis der Dichtekomponenten von Temperatur und Salzgehalt. Für die Salzfinger (R_{ρ}^f) gilt

$$R_{\rho}^f(t, z) = \frac{\alpha \partial_z \langle T \rangle_h(t, z)}{\beta \partial_z \langle S \rangle_h(t, z)} \quad (\text{3.17})$$

während das Stabilitätsverhältnis im Fall der Semikonvektion (R_{ρ}^s) durch

$$R_{\rho}^s(t, z) = \frac{\beta \partial_z \langle S \rangle_h(t, z)}{\alpha \partial_z \langle T \rangle_h(t, z)} \quad (\text{3.18})$$

gegeben ist. Aufgrund der sehr unterschiedlichen Regime der Salzfinger und Semikonvektion wird jeweils eine eigene Definition der Stabilität benötigt. Ein Stabilitätsverhältnis von

$$R_{\rho}^f \geq 1, \quad \text{bzw.} \quad R_{\rho}^s \geq 1 \quad (\text{A.81})$$

zeigt für den jeweiligen Fall eine stabile Schichtung an.

Es hat sich gezeigt, daß, durch die auftretenden Turbulenzen in Temperatur und Salzgehalt, die lokalen Gradienten $\partial_z \chi(t, z)$, $\chi = T, S$ starken Schwankungen unterlegen waren.

Die Stabilität der vorgegebenen Schichtung wird alternativ durch

$$R_{\rho}^f = \frac{\alpha T_z}{\beta S_z} \quad \text{bzw. durch} \quad R_{\rho}^s = \frac{\beta S_z}{\alpha T_z}$$

definiert, wobei T_z , bzw. S_z die konstanten Temperatur, bzw. Salzgehaltsgradienten der Hintergrundschichtung wiedergeben.

Nach einer turbulenten Vermischung stabilisieren sich die Profile von Temperatur und Salzgehalt. Die Stabilität steigt dabei an und die Stabilität der neu erzeugten Schichtung wird definiert durch

$${}^{\text{eq}}R_{\rho}^f(z) = \frac{\alpha \langle \partial_z \langle T \rangle_h(t, z) \rangle_t}{\beta \langle \partial_z \langle S \rangle_h(t, z) \rangle_t} \quad (\text{4.9})$$

wobei $\langle \cdot \rangle_t$ das zeitliche Mittel definiert

Flußverhältnis

Aus den turbulenten Flüssen folgt das Flußverhältnis γ mit

$$\gamma(t, z) = \frac{F_{\alpha T}(t, z)}{F_{\beta S}(t, z)} \quad (\text{A.82})$$

also das Verhältnis zwischen den von Temperatur- und Salzgehaltsanteilen des Dichteflusses. Ein Flußverhältnis von $\approx 0,6$ wird von Merryfield [48] im allgemeinen angenommen und passt zu den meisten Werten aus der bekannten Literatur. Jedoch beschreiben unter anderem Stern und Turner [81] davon abweichend für Werte $1,25 < R_\rho < 2$ ein Flußverhältnis von $\gamma \approx 0,91$. Sehr viel geringere Werte, $\gamma \ll 0,6$, sind ebenfalls bekannt, z.B. von Piacsec und Toomre [58].

Effektive Diffusion

Die effektive Diffusion von Temperatur K_T und Salzgehalt K_S durch die Grenzschicht hindurch, wird lokal definiert durch

$$K_\chi(t, z) = -\frac{F_\chi(z, t)}{\partial_z \langle \chi \rangle_h(z, t)} \quad (\text{4.3})$$

wobei $\chi \in \{T, S\}$.

Die effektiven Diffusionskoeffizienten der Dichtekomponenten und der Dichte ergeben sich durch die bereits definierten effektiven Diffusionskoeffizienten K_T und K_S . Es gilt:

$$K_{\alpha T}(t, z) = -\frac{F_{\alpha T}(t, z)}{\alpha \partial_z \langle T \rangle_h} = -\frac{F_T(t, z)}{\partial_z \langle T \rangle_h} = K_T(t, z) \quad (\text{A.83})$$

beziehungsweise

$$K_{\beta S}(t, z) = -\frac{F_{\beta S}(t, z)}{\beta \partial_z \langle S \rangle_h} = -\frac{F_S(t, z)}{\partial_z \langle S \rangle_h} = K_S(t, z) \quad (\text{A.84})$$

Nachdem sich die turbulenten Flüsse und Gradienten von Temperatur und Salzgehalt stabilisiert haben, folgt die effektive Diffusion mit

$${}^{\text{eq}}K_\chi(z) := -\frac{\langle F_\chi \rangle_t(z)}{\langle \partial_z \langle \chi \rangle_h \rangle_t(z)}, \quad \chi = T, S, \quad (\text{4.4})$$

wobei $\langle \cdot \rangle_t$ das zeitliche Mittel ist.

Die parametrisierte effektive Diffusion wird durch

$$\mathcal{K}_S \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{K}_T \quad (\text{4.22, bzw., 4.23})$$

bezeichnet.

Turbulente Lewiszahl

Die turbulente oder effektive Lewiszahl ergibt sich durch

$$\mathcal{T} = \frac{K_S}{K_T} = \frac{R_\rho^f}{\gamma} \quad (4.13)$$

Für die doppelt-diffusiven Prozesse werden Werte von $\mathcal{T} \geq 1$ erwartet.

Nusseltzahl

Die Nusseltzahlen von Temperatur Nu_T und Salzgehalt Nu_S sind definiert als das Verhältnis des Gesamtflusses zum rein diffusiven Anteil und geben die dimensionslosen Flüsse von Temperatur und Salzgehalt wieder.

$$\text{Nu}_\chi(t, z) = \left| \frac{\langle w' \chi' \rangle_h(t, z)}{\kappa_\chi \partial_z \langle \chi \rangle_h} - 1 \right| \quad (\text{A.85})$$

mit $\chi \in \{T, S\}$. In den vorliegenden Situationen von Abschnitt 4.2 wurde der Fluß aus der molekularen Diffusion vernachlässigt. Die Nusseltzahl ergibt sich hier durch $\text{Nu}_\chi(t, z) = \left| \frac{\langle w' \chi' \rangle_h(t, z)}{\kappa_\chi \partial_z \langle \chi \rangle_h} \right|$.

Coxzahl

Durch die Coxzahl läßt sich ebenfalls der effektive Diffusionskoeffizient bestimmen.

$$\begin{aligned} \text{Cox}_\chi^z(t, z) &= \frac{\langle |\partial_z \chi'|^2 \rangle_h}{(\partial_z \langle \chi \rangle_h)^2} \\ \text{Cox}_\chi^h(t, z) &= \frac{\langle |\partial_x \chi'|^2 \rangle_h}{(\partial_z \langle \chi \rangle_h)^2}, \quad \text{mit } \chi \in \{T, S\} \\ \text{Cox}_\chi(t, z) &= \text{Cox}_\chi^z(t, z) + \text{Cox}_\chi^h(t, z) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die daraus resultierenden effektiven (turbulenten) Diffusionskoeffizienten für Temperatur K_T^C und Salzgehalt K_S^C sind gegeben durch

$$K_\chi^C(t, z) = \kappa_\chi \text{Cox}_\chi(t, z), \quad \text{mit } \chi \in \{T, S\} \quad (4.16)$$

Die Coxzahlen unterliegen starken Schwankungen und variieren zwischen den unterschiedlichen Simulationen. So berichten z.B. Merryfield und Grinder [51] von thermalen Coxzahlen $\text{Cox}_T \approx 50$ bei $R_\rho^f = 1, 25$, während Marmorino et al. [41], bzw. Fleury und Lueck [16] von thermalen Coxzahlen $\text{Cox}_T \approx 0, 1 - 1000$ berichten in Abhängigkeit des Temperaturgradienten, der zwischen den einzelnen beobachteten thermohalinen Schichten gemessen wurde. Diese Definition geht davon aus, daß (z.B. bei den beobachteten Fällen) die Schichtung stationär ist.

Definition der effektiven Diffusion für die nicht stationären Fälle: Für nicht stationäre Fälle gehen wir zurück zu den Turbulenzgleichungen für Temperatur und Salzgehalt.

Von den Temperatur- und Salzgleichungen ((3.2) bzw. (3.3)) werden die Reynolds-gemittelten von (3.2)(bzw. (3.3)) abgezogen und es folgt

$$\frac{1}{2}\partial_t\langle\chi'^2\rangle_h + \frac{1}{2}\langle\mathbf{u}\rangle_h\langle\nabla(\chi')^2\rangle_h + \langle w'\chi'\rangle_h\partial_z\langle\chi\rangle_h + \frac{1}{2}\langle\mathbf{u}'\nabla(\chi')^2\rangle_h = \kappa_x\langle(\nabla\chi')\chi'\rangle_h \quad (\text{A.86})$$

für $\chi = T, S$, wobei

$$\langle(\nabla^2\chi')\chi'\rangle_h = \frac{1}{2}\langle\nabla^2(\chi')^2\rangle_h - \langle(\nabla\chi')^2\rangle_h \quad (\text{A.87})$$

und von einer Linearisierung der Komponenten ausgegangen wurde. Die Terme dritter Ordnung ($\langle\mathbf{u}'\nabla(\chi')^2\rangle_h$) konnten hier vernachlässigt werden, ebenso wie die Terme $\langle\nabla^2(\chi')^2\rangle_h$ und die Advektionsterme $\langle u\rangle_h\nabla(\chi')^2$. Während dem Anwachsen der Salzfinger erwiesen sich diese um Größenordnungen kleiner als die übrigen Terme.

Zusammen mit der Definition der effektiven Diffusion

$$K_\chi(t, z) = \frac{|\langle w'\chi'\rangle_h(t, z)|}{\partial_z\langle\chi\rangle_h(t, z)}$$

ergibt sich nach Umformen von Gleichung (A.86) und (A.87) die effektive Diffusion für $\chi = T, S$ aus den Coxzahlen

$$K_\chi^C(t, z) = \left| \frac{\kappa_x\langle(\nabla\chi')^2\rangle_h + \frac{1}{2}\partial_t\langle(\chi')^2\rangle_h}{(\partial_z\langle\chi\rangle_h)^2} \right| (t, z) \quad (4.2)$$

Rayleighzahlen

Die Rayleighzahlen für Temperatur Ra_T und Salzgehalt Ra_S sind definiert durch

$$\begin{aligned} Ra_T &= \frac{\alpha g l^4 \partial_z\langle T\rangle_h}{\nu\kappa_T} \\ Ra_S &= \frac{\beta g l^4 \partial_z\langle S\rangle_h}{\nu\kappa_T}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei l die charakteristische Länge (die zugrunde liegende Schichtdicke) ist. Zur exakten Klassifizierung und Charakterisierung der im einzelnen auftretenden doppelt-diffusiven Regime werden die Rayleighzahlen hinzugezogen (vergleiche Abbildungen 3.1 und 3.2).

Sternzahl

Die Sternzahl kennzeichnet den Beginn der kollektiven Instabilität der Salzfinger und ist definiert durch

$$\begin{aligned} St &:= \frac{\beta F_S - \alpha F_T}{\nu(\alpha T_z - \beta S_z)} \geq \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{im 2D-Fall} \\ \frac{2}{3} & \text{im 3D-Fall} \end{cases} \\ &= K_T \frac{R_\rho^f}{\gamma} \frac{1 - \gamma}{\nu(R_\rho^f - 1)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

vier-drittel Flußgesetz

Allgemein wurde das vier-drittel Flußgesetz mit

$$F_S^{4/3} = C(\Delta S)^{4/3} \quad (\text{A.88})$$

beschrieben, wobei $C(R, \tau, \dots)$ eine zu ermittelnde Konstante ist.

Das vier-drittel Flußgesetz von Turner [85]

$$F_S^{4/3} \approx \left(\frac{g\kappa_T^3}{\nu^2} \right)^{1/3} (S_z)^{4/3} \quad (\text{A.89})$$

wurde immer wieder und in vielfach abgewandelter Form verwendet, z.B. von Stern [80] mit

$$F_{\beta S}^{4/3} = C\kappa_T^{1/3}(g\beta\Delta S)^{4/3} \quad (\text{A.90})$$

wobei C nur von der Stabilität, σ und τ abhängen sollte. Von Stern [80] wurde die Konstante C mit $C = 0,07 \pm 0,03$ ermittelt. ΔS bezeichnet die Differenz im Salzgehalt zwischen der oberen und der unteren Schicht.

Das von Shen [73] beschriebene vier-drittel Flußgesetz, ist gegeben durch

$$F_{\beta S} = f(R_\rho^f)(g\nu)^{1/3}(\beta\partial_z S)^{4/3} \quad (\text{A.91})$$

mit g der Gravitationskonstanten, ν der kinematischen Viskosität, $\partial_z S$ der Salzgehaltsgradient. Die monotone Funktion $f(R_\rho^f)$ hängt dabei von der Stabilität R_ρ^f ab.

Özgökmen et al. [56] verwendete eine dimensionslose Variante mit

$$\text{Nu}_S \tau = C \left(\frac{Ra_T}{\sigma R_\rho^f} \right)^{1/3} (\Delta S)^{4/3} F_S^{4/3} = \quad (\text{A.92})$$

Radko [61] beschrieb verallgemeinerte Flußgesetze für die Nusseltzahlen der Schichten (Treppenstufen) mit

$$\text{Nu}_T = C_L Ra_T^a \quad (\text{A.93})$$

wobei $0,2 \leq a \leq 1/3$ ein zu bestimmender Exponent ist, der angepasst werden kann. Dabei wird für Rayleighzahlen $Ra_T > 10^6$ der Exponent geringer ausfallen, und für $Ra_T \leq 10^6$ der Exponent zu höheren Werten $a \nearrow 1/3$ tendieren.

Effektive Diffusion nach Merryfield

$$\begin{aligned} {}^{\text{Merr}}K_T &= \frac{\gamma}{R_\rho^f} K_S \quad \text{m}^2/\text{sec} \\ {}^{\text{Merr}}K_S &= C \frac{1 - \tau R_\rho^f}{R_\rho^f - \gamma} \quad \text{m}^2/\text{sec} \end{aligned} \quad (\text{2.4})$$

wobei $C = 0,17 \times 10^{-4}$ eine Konstante ist, welche durch diverse Simulationen von Merryfield und der **C-SALT** Messreihe bestimmt wurde.

Kolmogorov Längenskala

Die von Kolmogorov definierte Längenskala η

$$\eta(t) = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon(t)} \right)^{1/4}, \quad (\text{A.94})$$

wobei ν die kinematische Viskosität ist und

$$\epsilon(t) = \nu \left\langle \sum_{i,j=1}^3 (\partial_i u'_j(\vec{x}, t))^2 \right\rangle_h \quad (\text{A.95})$$

die Dissipation darstellt, gibt die aufzulösende Skala wieder.

Verglichen mit der Fingerbreite des am schnellsten wachsenden Salzingers

$$d = \left(\frac{\nu \kappa_T}{g \alpha T_z} \right)^{1/4} \quad (\text{A.96})$$

ist η in den hier vorliegenden Simulationen von gleicher Größenordnung.

Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Dirk Olbers der diese Arbeit betreut hat. Durch die vielen hilfreichen Bemerkungen und die große Geduld konnte ich so manche Durststrecke umschiffen.

Ebenso danke ich Dr. Sergey Danilov und Dr. Martin Losch für die Hilfe bei der Bewältigung technischer Schwierigkeiten und dem unermüdlichen Einsatz. Ohne die vielen Diskussionen, die mir immer wieder eine neue Sichtweise eröffneten, wäre diese Arbeit wohl nie zum Ende gekommen.

Außerdem danke ich Dr. Vladimir Gryanik für die vielen Gespräche. Diese haben zwar den ein oder anderen Tag bis ins unendliche verlängert, jedoch waren sie eine ständige Quelle neuer Ideen.

Die Arbeit wurde durch das Schwerpunktprojekt *Metström* der DFG gefördert. Den beiden Projektleitern PD Mag. Dr. Friedrich Kupka (MPA Garching) und Dr. Martin Losch (AWI Bremerhaven) danke ich für ihre ständige Bereitschaft und Hilfestellung.

Zuletzt danke ich all denen, die sich mühevoll durch meine Arbeit gekämpft haben.

Um niemandem auf die Füße zu treten weise ich ausdrücklich darauf hin, daß die Sortierung der Namen alphabetisch erfolgte.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, daß diese Arbeit selbstständig von mir durchgeführt und nur die erlaubten Hilfsmittel eingesetzt wurden. Alle Zitate oder Ergebnisse fremder Arbeiten, soweit diese bis Fertigstellung dieser Arbeit bekannt waren, wurden durch entsprechende Literaturangaben kenntlich gemacht.

Die hier gezeigten Abbildungen, die ich nicht selbst erstellt habe, wurden mit freundlicher Genehmigung der betreffenden Autoren verwendet, sofern diese ausfindig gemacht werden konnten. Soweit dies notwendig war wurden selbige durch einen Literaturverweis entsprechend gekennzeichnet.

Bremerhaven den 6. September 2011

Thomas Zweigle

Literaturverzeichnis

- [1] Alistair Adcroft, Jean-Michel Campin, Stefanie Dutkiewicz, Constantinos Evangelinos, David Ferraira, Gael Forget, Bayler Fox-Kemper, Patrick Heimbach, Chris Hill, Ed Hill, Helen Hill, Oliver Jahn, Martin Losch, John Marshall, Guillaume Maze, Dimitris Menemenlis, und Andrea Molod. M.I.T **General Circulation Model** (MITgcm), Dokumentation und Quellcode. <http://mitgcm.org>, 2008.
- [2] A.B. Arons, H. Stommel, und D. Blanchard. An oceanographic curiosity: the perpetual salt fountain. *Deep sea research*, vol.3:152–153, 1956.
- [3] P.G. Baines und A.E. Gill. On thermohaline convection with linear gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.37:289–306, 1969.
- [4] G.K. Batchelor. Diffusion in a field of homogeneous turbulence. ii. the relative motion of particles. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol.48: 345–362, 1952.
- [5] Alejandro A. Bianchi, Alberto R. Piola, und Gerade J. Collino. Evidence of double diffusion in the Brazil–Malvinas confluence. *Deep Sea Research*, vol.49:41–52, 2002.
- [6] Joseph A. Biello. Layer formation in semiconvection. *arXiv:astro-ph/0102338 v1*, 2001.
- [7] Janice D. Boyd und Henry Perkins. Characteristics of thermohaline steps off the northeast coast of South America. *Deep Sea Research*, vol.34:337–364, 1987.
- [8] D.R. Caldwell und S.A. Eide. Separation of seawater by Soret diffusion. *Deep Sea Research*, vol.32:965–982, 1985.
- [9] Vittorio Canuto. Turbulence in astrophysical and geophysical flows. *Lecture notes in Physics*, Springer, 2006.
- [10] V.M. Canuto, Y. Cheng, und A.M. Howard. A new model for double diffusion + turbulence. *Geophysical Research Letters*, vol.35, 2008.
- [11] V.M. Canuto, A. Howard, Y. Cheng, und M-S. Dubovikov. Ocean turbulence. part 1: One-point closure model - momentum and heat vertical diffusivities. *Journal of Physical Oceanography*, vol.31:1413–1426, 2001.
- [12] V.M. Canuto, A. Howard, Y. Cheng, und M.S. Dubovikov. Ocean turbulence. part 2: Vertical diffusivities of momentum, heat, salt, mass and passive scalars. *Journal of Physical Oceanography*, vol.32:240–264, 2002.

- [13] Sandro Carniel, Mauro Sclavo, Lakshmi Kantha, und Hartmut Prandke. Double-diffusive layers in the Adriatic Sea. *Geophysical Research letters*, vol.35, 2008.
- [14] Gilles Chabrier und Isabelle Baraffe. Heat transport in giant (exo)planets: A new perspective. *The Astrophysical Journal*, vol.661:81–84, 2007.
- [15] C. Charbonnel und J.-P. Zahn. Thermohaline mixing: A physical mechanism governing the photospheric composition of low-mass giants. *Astronomy and Astrophysics*, vol.467:15–18, 2007.
- [16] M. Fleury und R. Lueck. Fluxes across a thermohaline interface. *Deep Sea Research*, vol.38:745–769, 1991.
- [17] Ann E. Gargett. Differential diffusion: An oceanographic primer. *Elsevier, Progress in Oceanography*, vol.56:559–570, 2003.
- [18] Ann E. Gargett und Greg Holloway. Sensitivity of the GFDL ocean model to different diffusivities for heat and salt. *Journal of Physical Oceanography*, vol.22:1158–1177, 1992.
- [19] Ann E. Gargett, William J. Merryfield, und Greg Holloway. Direct numerical simulation of differential scalar diffusion in three-dimensional stratified turbulence. *Journal of Physical Oceanography*, vol.33:1758–1782, 2003.
- [20] Ann E. Gargett und Raymond W. Schmitt. Observations of salt fingers in the central waters of the Eastern North Pacific. *Journal of Geophysical Research*, vol.87:8017–8029, 1982.
- [21] T. Gerkema, J.T.F. Zimmerman, L.R. Maas, und H. van Haren. Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation. *Reviews of Geophysics*, vol.46, 2008.
- [22] R.W. Griffiths und B.R. Ruddick. Accurate fluxes across a salt-sugar finger interface deduced from direct density measurements. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.99:85–95, 1980.
- [23] J.R. Gupta, Joginder S. Dhiman, und Jayant Thakur. Thermohaline convection of Veronis and Stern types revisited. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol.264:398–407, 2001.
- [24] Judith Y. Holyer. On the collective instability of salt fingers. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.110:195–207, 1981.
- [25] Judith Y. Holyer. Double-diffusive interleaving due to horizontal gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.137:347–362, 1983.
- [26] Judith Y. Holyer. The stability of long steady three-dim salt fingers to longwavelength perturbations. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.156:495–503, 1985.

- [27] Herbert E. Huppert. On the stability of a series of double-diffusive layers. *Deep Sea Research*, vol.18:1005–1021, 1971.
- [28] Herbert E. Huppert und D.R. Moore. Nonlinear double-diffusive convection. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.78:821–854, 1976.
- [29] Herbert E. Huppert und J. Stewart Turner. Double-diffusive convection. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.106:299–329, 1981.
- [30] Richard S. Johnson und William Niedermeier. Soret coefficient and thermal diffusion constant of aqueous solutions of sugars. *Thermochimica Acta*, vol.2:497–504, 1971.
- [31] D.E. Kelly, H.J.S. Fernando, A.E. Gargett, J.Tanny, und E. Özsoy. The diffusive regime of double-diffusive convection. *Progress in Oceanography*, vol.56:461–481, 2003.
- [32] Alan R. Kerstein. One-dimensional turbulence part 2. staircases in double-diffusive convection. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, vol.30:25–46, 1999.
- [33] Satoshi Kimura, William Smyth, und Eric Kunze. Turbulence in a sheared, salt-fingering-favorable environment: Anisotropy and effective diffusivities. *Journal of Physical Oceanography*, 2011. URL <http://journals.ametsoc.org/doi/abs/10.1175/2011JP04543.1>.
- [34] Eric Kunze. Limits on growing, finite-length salt fingers: A richardson number constraint. *Journal of Marine Research*, vol.45:533–556, 1987.
- [35] Eric Kunze. A proposed flux constraint for salt fingers in shear. *Journal of Marine Research*, vol.52:999–1016, 1994.
- [36] Eric Kunze. A review of oceanic salt-fingering theory. *Progress in Oceanography*, vol.56:399–417, 2003.
- [37] Eric Kunze, Albert J. Williams, und Raymond W. Schmitt. Optical microstructure in the thermohaline staircase east of barbados. *Deep Sea Research*, vol.34:1697–1704, 1987.
- [38] William G. Large, J. C. MacWilliams, und S. C. Doney. Oceanic vertical mixing: A review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization. *Reviews of Geophysics*, vol.32:363–403, 1994.
- [39] L. St. Laurent und R.W. Schmitt. The contribution of salt fingers to vertical mixing in the North Atlantic Tracer Release Experiment. *Journal of Physical Oceanography*, vol.29:1404–1424, 1999.
- [40] M.S. Malashetty und S.N. Gaikwad. Effect of cross diffusion on double diffusive convection in the presence of horizontal gradients. *International Journal of Engineering Science*, vol. 40:773–787, 2002.

- [41] G.O. Marmorino, W.K. Brown, und W.D. Morris. Two-dimensional temperature structure in the C-SALT thermohaline staircase. *Deep Sea Research*, vol.34:1667–1676, 1987.
- [42] Trevor J. McDougall. Double-diffusive convection caused by coupled molecular diffusion. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.126:379–397, 1983.
- [43] Trevor J. McDougall und John R. Taylor. Flux measurements across a finger interface at low values of the stability ratio. *Journal of Marine Research*, vol.42:1–14, 1984.
- [44] M.G. McPhee, J.H. Morison, und F. Nielsen. Revisiting heat and salt exchange at the ice-ocean interface: Ocean flux and modeling considerations. *Journal of Geophysical Research*, vol.113, 2008.
- [45] Bill Merryfield. Ocean mixing in 10 steps. *Science*, vol.308:641–642, 2005.
- [46] William J. Merryfield. Salt Fingering, eine von Merryfield mitgestaltete Homepage über Vermischungsprozesse im Ozean. Weitere Unterstützung und Finanzierung durch das Office of Naval Research der US Navy, n.n. URL <http://www.planetwater.ca/research/oceanmixing/saltfingers.html>.
- [47] William J. Merryfield. Hydrodynamics of semiconvection. *Astrophysical Journal*, vol.444:1046–1068, 1995.
- [48] William J. Merryfield. Origin of thermohaline staircases. *Journal of Physical Oceanography*, vol.30:1046–1068, 2000.
- [49] William J. Merryfield. Intrusions in double-diffusively stable arctic waters: Evidence for differential mixing. *Journal of Physical Oceanography*, vol.32:1452–1459, 2002.
- [50] William J. Merryfield. Dependence of differential mixing on n and r_ρ . *Journal of Physical Oceanography*, vol.35:991–1003, 2005.
- [51] William J. Merryfield und Matt Grinder. Salt fingering fluxes from numerical simulations. Private Korrespondenz, unveröffentlichtes Material, 2008.
- [52] William J. Merryfield, Greg Holloway, und Ann E. Gargett. Differential vertical transport of heat and salt by weak stratified turbulence. *Geophysical Research Letters*, vol.25:2773–2776, 1998.
- [53] William J. Merryfield, Greg Holloway, und Ann E. Gargett. A global ocean model with double-diffusive mixing. *Journal of Physical Oceanography*, vol.29:1124–1142, 1999.
- [54] Hideki Nagashima, Jiro Yoshida, und Yoshinori Nagahama. A three dimensional modeling of salt-fingering convection. *Proceedings of an international congress on modeling and simulation*, vol.1:189–191, 1997.

- [55] A. Oschlies, H. Dietze, und P. Kähler. Salt-finger driven enhancement of upper ocean nutrient supply. *Geophysical research letters*, vol.30, 2003.
- [56] Tamay M. Özgökmen, Oleg E. Esenkov, und Donald B. Olson. A numerical study of layer formation due to fingers in double-diffusive convection in a vertically-bounded domain. *Journal of Marine Research*, vol.56:463–487, 1998.
- [57] C.P. Parvathy und Prabhamani R. Patil. Thermohaline instability with thermal diffusion and horizontal gradients. *Applied Scientific Research*, vol.45:163–178, 1988.
- [58] S.A. Piacsec und J. Toomre. Nonlinear evolution and structure of salt fingers. *Elsevier Oceanography Series*, vol.28:193–219, 1980.
- [59] K. Polzin, R.W. Schmitt, und J.M. Toole. SFTRE1 and SFTRE2, Woods Hole Oceanographic Institution. <http://hrp.whoi.edu/hrpgrp/hrp.html>, 2001.
- [60] Timour Radko. A mechanism for layer formation in a double-diffusive fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.497:356–380, 2003.
- [61] Timour Radko. What determines the thickness of layers in a thermohaline staircase? *Journal of Fluid Mechanics*, vol.532:79–98, 2005.
- [62] Timour Radko. Importance of saltfingering, 2009. privater Gedankenaustausch und Korrespondenz.
- [63] Timour Radko und Melvin Stern. Finite-amplitude salt fingers in a vertically bounded layer. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.425:133–160, 2000.
- [64] Martin Schmid, Myles Busbridge, und Alfred Wüest. Double-diffusive convection in Lake Kivu. *Limnology and Oceanography*, vol.55(1):225–238, 2010.
- [65] Raymond W. Schmitt. Flux measurements at an interface. *Journal of Marine Research*, vol.37:419–436, 1979.
- [66] Raymond W. Schmitt. The growth rate of super-critical salt fingers. *Deep-Sea Research*, vol.26A:23–40, 1979.
- [67] Raymond W. Schmitt. The characteristics of saltfingers in a variety of fluid systems, including stellar interiors, liquid metals, oceans and magmas. *Physics of Fluids*, vol.26:2373–2377, 1983.
- [68] Raymond W. Schmitt. Mixing in a thermohaline staircase, in small-scale turbulence and mixing in the ocean. *Elsevier, New York*, pages 435–452, 1988.
- [69] Raymond W. Schmitt. The salt finger experiment of Jevons (1857) and Rayleigh (1880). *Journal of Physical Oceanography*, vol.25:8–17, 1994.
- [70] Raymond W. Schmitt. Enhanced diapycnal mixing by salt fingers in the thermocline of the tropical atlantic. *Science*, vol.308:685–688, 2005.

- [71] Raymond W. Schmitt, H. Perkins, J.D. Boyd, und M.C. Stalcup. C-SALT: an investigation of the thermohaline staircase in the western tropical North Atlantic. *Deep Sea Research*, vol. 34:1655–1665, 1987.
- [72] Colin Y. Shen. The evolution of the double–diffusive instability: Salt fingers. *Physics of Fluids A*, vol.1:829–844, 1989.
- [73] Colin Y. Shen. Heat–salt finger fluxes across a density interface. *Physical Fluids A*, vol.5(11):2633–2643, 1993.
- [74] Colin Y. Shen. Equilibrium salt–fingering convection. *Physics of Fluids A*, vol.7: 706–717, 1995.
- [75] Colin Y. Shen und George Veronis. Scale transition of double–diffusive finger cells. *Physical Fluids A*, vol.3(1):58–68, 1991.
- [76] L. Siess. Thermohaline mixing in super-AGB stars. *Astronomy and Astrophysics*, vol.497:463–468, 2009.
- [77] Stephan Stellmach, Pascale Garaud, Adrienne Traxler, Nicholas Brummel, und Timour Radko. Spontaneous layer formation by compositionally-driven double-diffusive convection. *eingereicht bei Nature, bislang unveröffentlicht*, 2008.
- [78] Melvin E. Stern. The „salt–fountain“ and thermohaline convection. *Tellus*, vol.12 Heft 2:172–175, 1960.
- [79] Melvin E. Stern. Collective instability of salt fingers. *Journal of Fluid Mechanics*, vol.35:209–218, 1969.
- [80] Melvin E. Stern. Maximum buoyancy flux across a salt finger interface. *Journal of Marine Research*, vol.34:95–110, 1976.
- [81] Melvin E. Stern und J. Stewart Turner. Salt fingers and convecting layers. *Deep Sea Research*, vol.16:497–511, 1969.
- [82] R.I. Tait und M.R. Howe. Thermohaline staircase. *Nature*, vol.231:178–179, 1971.
- [83] John R. Taylor. Anisotropy of salt fingers. *Journal of Physical Oceanography*, vol.23: 554–565, 1993.
- [84] John R. Taylor und P. Bucens. Laboratory experiments on the structure of salt fingers. *Deep Sea Research*, vol.16:1675–1704, 1989.
- [85] J.S. Turner. Salt fingers across a density interface. *Deep Sea Research*, vol.14: 599–611, 1967.
- [86] J.S. Turner. Multicomponent convection. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol.17: 11–44, 1985.

- [87] Geoffrey K. Vallis. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamic*. Cambridge University Press, 2005.
- [88] George Veronis. On finite amplitude instability in thermohaline convection. *Journal of Marine Research*, vol.23:1–17, 1965.
- [89] C. von Rohden, B. Boehrer, und J. Ilmberger. Evidence for double diffusion in temperate meromimic lakes. *Hydrology and Earth System Sciences*, vol.14:667–674, 2010.
- [90] A. Weiss, J. Wagenhuber, und P.A. Denissenkov. ${}^3\text{He}$ in stars of low and intermediate mass. *Astronomy and Astrophysics*, vol.313:581–590, 1996.
- [91] Achim Weiss. The progenitor of SN 1987A: Uncertain evolution of a 20 M star. *The Astrophysical Journal*, vol.339:365–381, 1989.
- [92] D.W.A. Whitfield, G. Holloway, und J.Y. Holyer. Spectral transform simulations of finite amplitude double–diffusive instabilities in two dimensions. *Journal of Marine Research*, vol.47:241–265, 1989.
- [93] Jiro Yoshida und Hideki Nagashima. Numerical experiments on salt–finger convection. *Progress in Oceanography*, vol.56:435–495, 2003.
- [94] George Zodiatis und Gian Pietro Gasparini. Thermohaline staircase formations in the Tyrrhenian Sea. *Deep Sea Research*, vol.43(No.5):655–678, 1996.