

Ein Inversmodell für den Südatlantik mit der Methode der finiten Elemente

DISSERTATION
zur
Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
— Dr. rer. nat. —

dem Fachbereich I (Physik/Elektrotechnik) der
Universität Bremen
vorgelegt von

Uwe Dobrindt

Bremerhaven
Mai 1999

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
1.1	Der Südatlantik	11
1.2	Modellansätze	13
1.3	Inversmodellierung	14
1.4	Finite Elemente	15
1.5	Ziel der Arbeit	16
1.6	Aufbau der Arbeit	17
2	Das Inversmodell – Strategie und Initialisierung	19
2.1	Die Modellgleichungen	19
2.2	Die Kostenfunktion	21
2.3	Das adjungierte Modell	22
2.4	Initialisierung	24
2.4.1	Verwendete Daten	24
2.4.2	Initialisierung des horizontalen Geschwindigkeitsfeldes	30
3	Die Finite-Elemente-Methode	31
3.1	Einführung	31
3.2	Die Advektions-Diffusions-Gleichung	32
3.3	Die Standard-Galerkin-Methode	33
3.4	Die Streamline Upwind Petrov-Galerkin-Methode	37
3.5	Bubble-Funktionen	40
3.6	Das lineare Gleichungssystem	41
3.6.1	Die Steifigkeitsmatrix	42
3.6.2	Der Gewichtsvektor	43
3.6.3	Berücksichtigung der Randbedingungen	43
3.6.4	Die Massenmatrix	44
3.6.5	Speicherung der Matrizen	44
3.7	Lösungsverfahren für das lineare Gleichungssystem	45
3.8	Gittergenerierung	48
3.8.1	Die Octree-Methode	48
3.8.2	Anpassen des Randes	49
3.8.3	Die Delauny-Methode	49
3.8.4	Korrektur des Randes	49

3.9	Berechnung partieller Ableitungen	49
3.10	Die adjungierten Gleichungen	52
4	Anwendung des Modells	55
4.1	Das Modellgitter	55
4.2	Parametrisierung einer Bodenrandschicht	55
4.3	Das initialisierte Modell	64
5	Ergebnisse des Modells	73
5.1	Minimierung der Kostenfunktion	73
5.2	Die inversmodellierete Zirkulation	77
5.3	Transporte	91
5.4	Vertikalgeschwindigkeiten	97
5.5	Temperatur und Salzgehalt	99
5.6	Quellen und Senken	115
6	Fazit und Ausblick	121
6.1	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	121
6.2	Anmerkungen zum Gitter	123
6.3	Ausblick auf weitere Anwendungen	125

Danksagung

Ich möchte allen Personen danken, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit ihre Unterstützung gegeben haben. Dies gilt besonders für Prof. Dr. Dirk Olbers und Dr. Jens Schröter, die sie überhaupt erst ermöglicht haben und mir viele hilfreiche Anregungen gegeben haben. Dr. Jörn Behrens und vor allem Dr. Dmitri Nechaev danke ich für die Erläuterungen und die Diskussionen über Theorie und Anwendung der Methode der finiten Elemente. Dr. Udo Göbel hat mir sehr bei der Visualisierung der Modellergebnisse geholfen. Dr. Thomas Störtkuhl hat mich bei Problemen bezüglich der iterativen Lösungsmethoden für lineare Gleichungssysteme unterstützt. Für die vielen Diskussionen, für die Hilfe bei unterschiedlichsten Fragen und für die gute Arbeitsatmosphäre möchte ich mich namentlich bei Hartmut Borth, Dr. Vladimir Gryanik, Martin Losch, Dr. Dimitrij Mironov, Dr. Bernadette Sloyan, Dr. Manfred Wenzel und Dr. Alexey Yaremchuk bedanken.

Prof. Dr. Sprekels und Dr. Schmelzer vom Weiertraß-Institut für angewandte Analysis und Stochastik in Berlin möchte ich dafür danken, daß sie mir den IBG-Gittergenerator zur Verfügung gestellt haben. Dr. Bernard Barnier von der Equipe MEOM Laboratoire des Ecoulements Geophysiques et Industriels, Grenoble danke ich für die Überlassung der ECMWF-Daten bezüglich Netto-Wärmeflüsse und E-P-Daten.

Für ihre Unterstützung außerhalb des Alfred-Wegener-Instituts und ihr Einfühlungsvermögen danke ich meiner Familie und ganz besonders Janin Janda.

Zusammenfassung

Die groß-skalige Zirkulation des Südatlantiks und die damit verbundenen Wärme- und Salztransporte werden mit einem Inversmodell untersucht. Das Modell beruht auf herkömmliche Annahmen für die Erhaltung von Masse, Wärme und Salzgehalt. Es wird ein 3-dimensionales stationäres Geschwindigkeitsfeld abgeleitet, das geostrophisch balanciert ist. Mit diesem Geschwindigkeitsfeld wird die stationäre Advektions-Diffusions-Gleichung für Temperatur und Salzgehalt gelöst und die dazu gehörende Dichte berechnet. Ein Optimierungsansatz wird verwendet, um Referenzgeschwindigkeiten so anzupassen, daß die modellierten Temperaturen und Salzgehalte nahe an Meßdaten und die Geschwindigkeiten in geostrophischer Balance zum modellierten Dichtefeld sind. Um eine variable räumliche Auflösung zu ermöglichen, wird die Methode der finiten Elemente verwendet. Das Modellgitter ist unstrukturiert und als Elemente werden Tetraeder eingesetzt.

Es werden klimatologische hydrographische Daten, Satelliten-Altimetermessungen der absoluten Auslenkung der Meeresoberfläche (SSH) und Winddaten in das Modell assimiliert. Die Vorteile der Methode der finiten Elemente erlauben eine einfache Darstellung der Modellparameter auf den Tetraedern. Die diskreten Gleichungen können relativ leicht adjungiert werden. Das unstrukturierte Gitter gibt die komplexe Geometrie der Bodentopographie sehr gut wieder.

Die Modellösungen zeigen, daß die Referenzgeschwindigkeiten die Struktur der SSH-Daten widerspiegeln. Die oberflächennahe Zirkulation entspricht im Wesentlichen der aus der Literatur bekannten. Der Volumentransport durch die Drake-Passage wird mit 130 Sv vorgegeben. An den offenen Rändern (Drake Passage, 30°S, 20°E) zeigen Massen-, Wärme- und Salztransporte Übereinstimmungen mit Werten aus der Literatur. Dies gilt auch für die Transporte an Oberflächen-, Zwischen-, Tiefen- und Bodenwasser. Es werden im Südatlantik 9.6 Sv Bodenwasser gebildet. Der Wärmetransport nach Norden über 30°S beträgt 0.88 PW und steht im Zusammenhang mit einem Transport von 26 Sv Nordatlantischen Tiefenwasser nach Süden, der durch einen etwa gleich großen Transport an Zwischenwasser nach Norden kompensiert wird.

Abstract

The large scale flow field of the South Atlantic and its associated heat and fresh water budget are studied with an inverse model. The model relies on traditional assumptions of mass, heat and salt conservation. A 3-dimensional velocity field which is in steady state and obeys geostrophy is derived. Using this flow field, the steady state advective-diffusive equations for temperature and salinity are solved and the corresponding density is calculated. An optimization approach is used that adjusts reference velocities such that modeled temperature and salinity are close to observations and that velocities are in geostrophic balance with the modeled density field. In order to allow for a variable spatial resolution, the finite element method is used. Its mesh is totally unstructured and the 3-dimensional elements are tetrahedra.

Climatological hydrographic data, observations of sea surface height (SSH) from satellite altimetry and wind data are assimilated in the model. The advantages of the finite element method make it possible to use an easy representation of the model parameters on the tetrahedra. It is not difficult to find the adjoint form of the discrete equations. The unstructured mesh agrees well with the complex geometry of bottom topography.

The model results show, that the reference velocities return the structure of the SSH data. In general the upper-level circulation corresponds to the circulation known from the literature. The volume transport through Drake Passage is constrained to be 130 Sv. At the open boundaries (Drake Passage, 30°S, 20°E) the mass, heat and salt transports are in agreement with the literature. This is also true for the transports of surface, intermediate, deep and bottom water. 9.6 Sv of bottom water is formed in the South Atlantic. The heat transport to the north at 30°S is 0.88 PW and is a result of the transport of 26 Sv of North Atlantic Deep Water to the south, which is balanced by about the same transport of intermediate water to the north.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Der Südatlantik

Die Zirkulation des Südatlantiks setzt sich aus Strömungen unterschiedlichster Längenskalen zusammen. Die Palette reicht von klein-skaligen Wirbeln, gebildet im Ausstrom des Agulhas, bis zur groß-skaligen Rezirkulation des Nordatlantischen Tiefenwassers (Reid, 1989 [62]; Peterson und Stramma, 1991 [60]). Neben der Topographie des Bodens mit zum Teil sehr steilen Kontinentalabhängigen liegt die Ursache vor allem in den drei offenen Rändern. Durch diese ist der Südatlantik mit dem Nordatlantik, dem Südpazifik und dem Indischen Ozean verbunden. Die bedeutendsten Einströme von Wassermassen erfolgen aus dem Nordatlantik und mit dem Antarktischen Zirkumpolarstrom durch die Drake Passage.

Die Abbildungen (1.1) und (1.2) zeigen die groß-skaligen geostrophischen Strömungen und Fronten in der oberen Schicht des Südatlantiks bis 60°S . Im westlichen Teil strömt der Antarktische Zirkumpolarstrom (ACC) durch die relativ enge Drake Passage ein und dreht nordwärts in das Südatlantiksee ein, wo der Malwinen- bzw. Falkland-Strom gebildet wird. Dieser trifft dann weiter nördlich bei circa 40°S auf den Brasilstrom, der als Teil des subtropischen Wirbels entlang der Küste Südamerikas nach Süden strömt. In dieser sogenannten "Confluence Region" (Gordon, 1989 [32]) herrscht eine große räumliche und zeitliche Variabilität (Peterson und Stramma, 1991 [60]). Am östlichen Rand fließt der ACC im Bereich zwischen 40°S und 60°S in den Indischen Ozean. Zwischen der Südspitze Afrikas und dem ACC strömt der Agulhas ein. Ein Teil davon dreht nach Osten und strömt wieder aus, während der Rest um Südafrika herum fließt und den Benguela Strom bildet. Im zentralen südatlantischen Ozean findet man nördlich des ACC's den Südatlantik Strom, der als südlicher Teil des antizyklonischen subtropischen Wirbels nach Westen strömt. Südlich des ACC's tritt im Weddellmeer der zyklonische Weddellwirbel auf, der bis zum Boden reicht. Er fließt entlang der antarktischen Küste in Richtung Westen. Entlang der antarktischen Halbinsel dreht er dann nach Norden und strömt südlich des ACC's nach Westen. Im Bereich von 20°E dreht er dann schließlich wieder nach Süden ein. Das Zirkulationsmuster, das sich insgesamt daraus ergibt, zeigt die typischen westlichen Randströme von der Antarktis bis zum Äquator.

In Bild (1.2) ist der gesamte geostrophische Transport dargestellt. Die Integration wurde von der Küste der Antarktis aus gestartet. Entlang der Küste Südamerikas beträgt der Trans-

port überall 130 Sv ($1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$) und entlang der südafrikanischen Küste 132 Sv. Der Nettotransport vom Nordatlantik aus ist 2 Sv groß (Reid, 1989 [62]). Whitworth (1983) [88] gibt für den Transport des ACC's durch die Drake Passage eine quantitative Abschätzung von 120-140 Sv ab. In diesem Bereich liegt auch der Wert von 129 Sv, den Rintoul (1991) [64] angibt. Der Transport in den Indischen Ozean zwischen Südafrika und der Antarktis beträgt bei ihm 130 Sv.

Mit der Tiefe wandert der subtropische Wirbel nach Süden und beschränkt sich in großen Tiefen auf das Brasilianische Becken westlich des mittelatlantischen Rückens. Unterhalb von 3000m findet man im argentinischen Becken wie im Weddellmeer einen zyklonischen Wirbel (Reid, 1989 [62]).

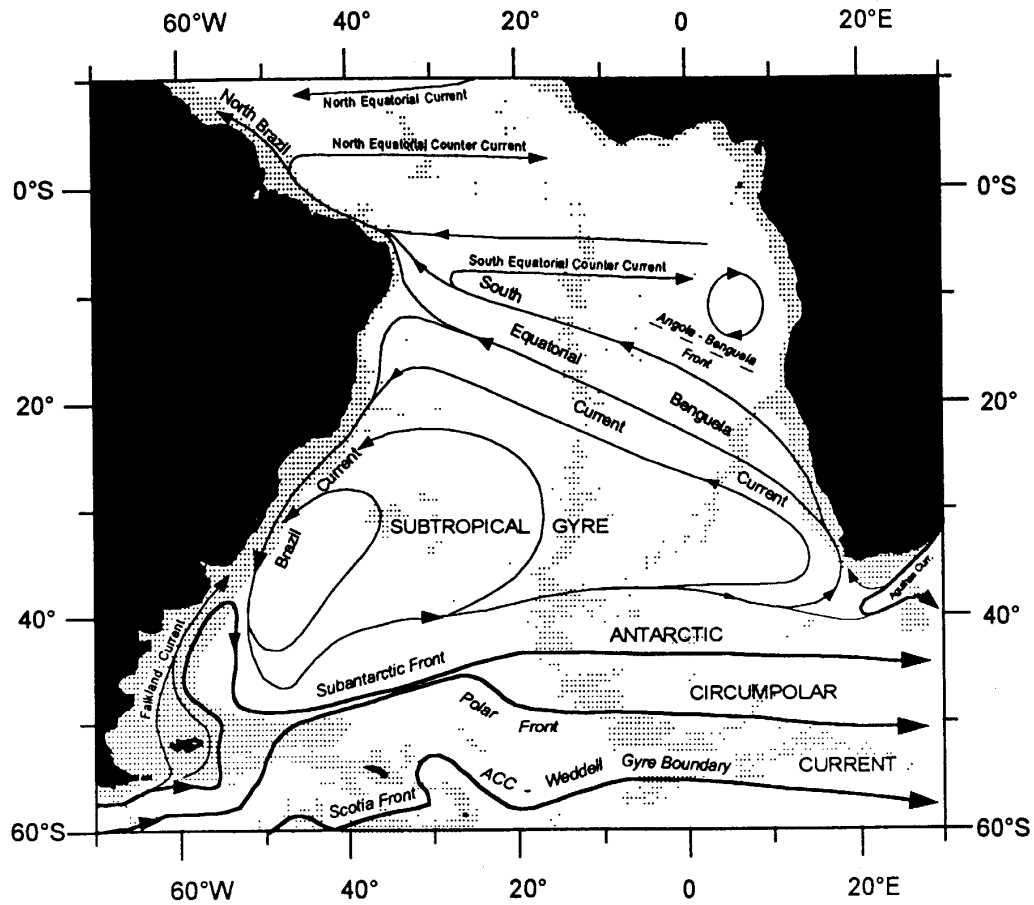


Abbildung 1.1: Darstellung der großskaligen geostrophischen Strömungen und Fronten in der oberen Schicht des Südatlantiks. Die fein gepunkteten Flächen sind flacher als 3000 m. Die Darstellung stammt im Wesentlichen von Peterson und Stramma (1991) [60] und wurde aus Wefer et al. (1996) [87] entnommen.

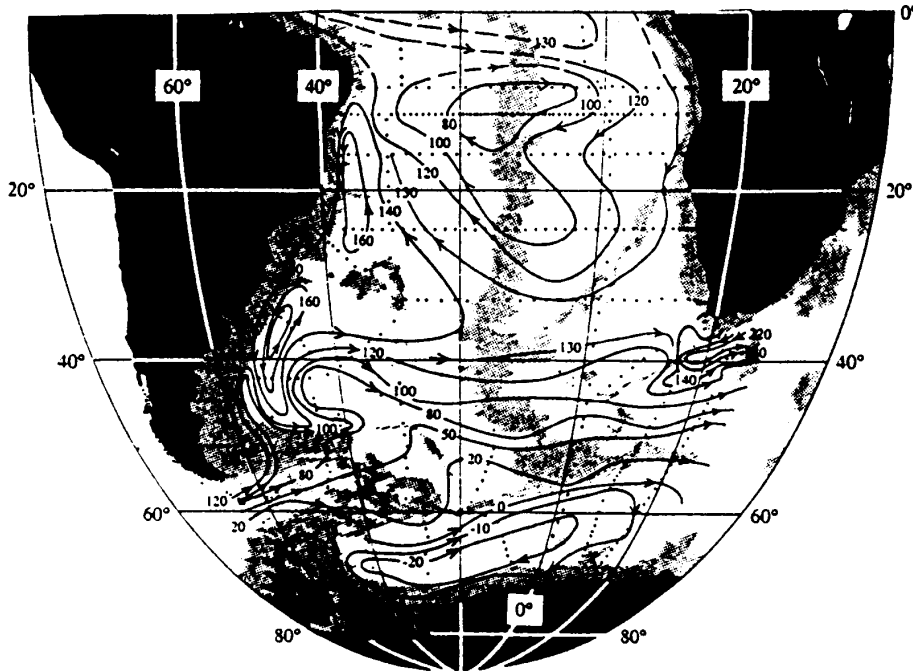


Abbildung 1.2: Geostrophische Transporte in Sv ($10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$). Die schattierten Bereiche stellen Tiefen flacher als -3500 m dar. Es wurde von der Antarktis aus in Richtung Norden integriert. Entlang der Küste Südamerikas ergeben sich 130 Sv und entlang Südafrikas 132 Sv , so daß 2 Sv aus dem Nordatlantik einströmen (aus Reid, 1989 [62]).

1.2 Modellansätze

Aufgrund der großen Gebiete, mit denen der Südatlantik an seine benachbarten Ozeane grenzt und über die Transporte in und aus dem Südatlantik stattfinden, stellt die numerische Modellierung des Südatlantiks eine gewisse Herausforderung dar. Aus dem Pazifik gibt es durch die Drake Passage den starken Einstrom des ACC's, der im Osten wieder in den Indischen Ozean ausströmt (siehe vorheriger Abschnitt), und im Norden ist der offene Rand zum Nordatlantik hin mehrere tausend Kilometer lang.

Bei numerischen Untersuchungen kann man nun zwei prinzipielle Ansätze verfolgen. Beim ersten Ansatz wird ein globales Ozeanmodell entwickelt und der Südatlantik als Subsystem betrachtet. Transporte zwischen den verschiedenen Ozeanen werden dabei durch die Modell-dynamik festgelegt. Die südatlantische Zirkulation hängt dann natürlich von der globalen Modellzirkulation ab. Eine Schwäche von globalen Modellen liegt darin, daß sie die wichtigen Wassermassen, die im Südatlantik auftreten (Antarktisches Zwischenwasser AAIW, Antarktisches Bodenwasser AABW, Nordatlantisches Tiefenwasser NADW), nur mit Ein-

schränkungen bilden (Barnier et al., 1996 [4]). Ein Grund dafür ist, daß numerische Modelle physikalische Prozesse nur begrenzt auflösen können. Die Modellergebnisse hängen dann von der Parametrisierung der nicht aufgelösten Prozesse ab. Wobei hier die räumliche Auflösung des Modells eine Rolle spielt, die bei einem globalen Modell einen großen Bedarf an Rechnerressourcen erfordert. Ein weiterer Grund liegt in der Berücksichtigung der komplexen Wechselwirkungen zwischen Atmosphäre, Ozean und Meereis in den Modellen. Ein globaler Modellansatz zur Untersuchung der Zirkulation des Südatlantiks wurde beispielsweise von England und Garçon (1994) [16] durchgeführt. Sie verwendeten das GFDL-Modell des Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, das auf den primitiven Gleichungen beruht. Eine Beschreibung des Modells findet man bei Bryan (1969) [11], Cox (1984) [13] und Pacanowski et al. (1991) [58].

Bei dem zweiten Modellansatz bleibt das Modellgebiet auf den Südatlantik beschränkt. Dies spart im Vergleich zu globalen Modellen Computerressourcen und ermöglicht eine feinere räumliche Auflösung und somit auch eine bessere Auflösung der physikalischen Prozesse im Modell. Dafür muß aber das Problem der offenen Ränder in Kauf genommen werden. Die modellierte Zirkulation hängt dann sehr davon ab, welche Bedingungen auf den Rändern vorgegeben werden. Das Setzen der Randbedingungen verlangt ein Vorwissen über Temperatur und Salzgehalt, Volumen- und Massentransporte, Wärmeflüssen und Süßwasserflüssen. Dieses wird zumeist aus hydrographischen Daten gewonnen. Barnier et al. (1996) [4] haben zum Beispiel diesen Modellansatz verfolgt. Sie verwendeten ein σ -Koordinaten Modell, das auf dem semi-spektralen Modell für die primitiven Gleichungen (SPEM) von Haidvogel et al. (1991) [34] beruht.

In dieser Arbeit bleibt das Modellgebiet ebenfalls auf den Südatlantik beschränkt, auf dem ein Inversmodell mit der Methode der finiten Elemente angewendet wird.

1.3 Inversmodellierung

Nach nun mehr hundert Jahren systematischer ozeanographischer Forschung und Beobachtung ist es weiterhin schwierig, die globale Zirkulation des Ozeans zu beschreiben. Großskalige Transporte von Wassermassen können aus hydrographischen Daten (Temperatur und Salzgehalt) mit Hilfe der geostrophischen Gleichungen (thermischer Wind) abgeleitet werden. Dies gilt ebenso für die räumliche Verteilung der verschiedenen Wassermassen. Außerdem können Rückschlüsse auf Bildungs- und Vermischungsraten gezogen werden.

Die hydrographischen Datensätze liegen allerdings nur in einer inhomogenen räumlichen und zeitlichen Verteilung vor. Vor allem aber liefert die Geostrophie nur die vertikale Scherung des Geschwindigkeitsfeldes. Um absolute Geschwindigkeiten zu erhalten, wird häufig die Annahme gemacht, daß die Geschwindigkeit in einer bestimmten Tiefe – dem Referenzniveau – verschwindet (level of no motion). Der Fehler, den man dabei macht, ist in der Nähe der Oberfläche relativ klein, da die Geschwindigkeiten dort wesentlich größer sind als im tiefen Ozean, wo sie in der Größenordnung von 0.01 ms^{-1} liegen. Eine kleine Verschiebung des Referenzniveaus kann dann schon Fehler in der gleichen Größenordnung erzeugen. Außerdem muß an Stellen, an denen der Ozean flacher als das Referenzniveau ist, beispielsweise die Tiefe des Meeresbodens als Referenz verwendet werden.

Eine andere Möglichkeit, um absolute Geschwindigkeiten zu erhalten, ist die Bestimmung von Referenzgeschwindigkeiten an der Meeresoberfläche. Die Geschwindigkeiten in der

Tiefe können dann durch Integration von der Oberfläche nach unten berechnet werden. Zur Bestimmung der Referenzgeschwindigkeiten können Messungen von Satelliten-Radar-Altimetern verwendet werden. Damit geht neben den hydrographischen Daten ein zweiter unabhängiger Datensatz in die Modellberechnungen ein. An qualitativ guten hydrographischen Datensätzen stehen unter anderem der “Hydrographic Atlas of the Southern Ocean” (Olbers et al., 1992 [57]) oder die Messungen von WOCE (World Ocean Circulation Experiment) zur Verfügung. An Daten aus der Satellitenaltimetrie können die im Rahmen der TOPEX/POSEIDON-Mission gemessenen absoluten Höhen der Meeresoberfläche genutzt werden.

Die Berücksichtigung der Daten in numerischen Modellen geschieht mittels Datenassimilation. Damit ist gemeint, daß sich die zu berechnenden Modellzustände außer an den Modellgleichungen auch an Daten orientieren sollen, die in die Modelle eingegeben werden. Der Begriff Assimilation bezieht sich dabei aber eigentlich nur auf prognostische Modelle. Bei Modellen, die diagnostisch rechnen, erfolgt nämlich viel mehr eine Anpassung der Modellparameter an die Daten. Solch ein Modell bezeichnet man dann als Inversmodell. Die Parameter werden mit Optimierungsverfahren durch Zwangsbedingungen an die Daten angepaßt. Dabei wird eine sogenannte Kostenfunktion unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (den Modellgleichungen) minimiert. In der Kostenfunktion stecken dann die Daten. Grundlagen dazu findet man unter anderem bei Thacker (1988) [79], Olbers (1989) [55] und Wunsch (1996) [93]. Einfache Anwendungen der Methode wurden zum Beispiel von Schröter (1989) [71] erstellt. Schröter et al. (1993) [72] und Vogeler und Schröter (1995) [82] wendeten die Methode auf kleineren Ozeangebieten in wirbelaufösenden Modellen an. Schlitzer (1993 und 1995) [66, 67] entwickelte ein Boxmodell, das zunächst auf den Atlantik beschränkt blieb, aber später global erweitert wurde. Neben hydrographischen Daten werden in diesem Modell auch FCKW-Daten verwendet. Nechaev und Yaremchuk (1995) [54] entwickelten ein adjungiertes Modell zur Analyse von hydrographischen Schnitten. Ein globales Modell zur Untersuchung der barotropen Zirkulation des Ozeans, bei dem auch TOPEX-Daten verwendet wurden, stellte Seiß (1996) [75] vor. Ein weiteres Boxmodell zur Untersuchung der Zirkulation im Südlichen Ozean wurde von Sloyan (1997) [78] präsentiert. Die Inversmodellierung hat ihre Vorteile unter anderem darin, daß unabhängige und synoptische Datenverteilungen verwendet werden können, verschiedene (transiente) Tracer miteinander kombiniert werden können und unterschiedliche Arten von Informationen in das Modell einfließen können. Von Nachteil ist, daß das ‘Vorwärts’-Modell adjungiert werden muß. Ein weiterer Punkt sind die Rechnerressourcen, die für das Adjungieren und den Minimierungsalgorithmus benötigt werden.

1.4 Finite Elemente

Bei den im vorhergehenden Abschnitt erwähnten Modellen handelt es sich um Boxmodelle oder die Modellgleichungen werden mit der Methode der finiten Differenzen (FDM) diskretisiert. In dieser Arbeit wird nun die Methode der finiten Elemente (FEM) verwendet. Diese Methode wurde ursprünglich in den fünfziger und sechziger Jahren zur Lösung von Problemen der Elastomechanik entwickelt. Da sich aber viele physikalische Prozesse in der Form von (partiellen) Differentialgleichungen beschreiben lassen, wurde die FEM zur Behandlung vieler anderer partieller Differentialgleichungen erweitert. Theoretische Grundla-

gen der FEM werden bei Zienkiewicz (1984) [96], Johnson (1990) [44] und Schwarz (1991) [74] ausführlich beschrieben. Die Anwendung in Tiden-Modellen wird seit den frühen siebziger Jahren erfolgreich durchgeführt. Beispiele dafür sind die Arbeiten von Connor und Wang (1973) [12], Walters und Werner (1989) [84] und Le Provost und Vincent (1991) [47]. In (globalen) Zirkulationsmodellen des Ozeans wird die FEM bisher nur wenig verwendet. Eine erste Arbeit mit einem quasigeostrophischen Modell führte Fix (1975) [20] durch. Die Vorteile der finiten Elemente gegenüber den finiten Differenzen – auf die hier noch nicht näher eingegangen werden soll – zeigten Haidvogel et al. (1980) [35] in einer Arbeit, bei der beide Methoden miteinander verglichen wurden. Für Strömungsprobleme und besonders für Konvektions- bzw. Advektions-Diffusions-Probleme wurde die FEM erst in den achtziger Jahren wirklich populär. Die Gründe liegen darin, daß erst in dieser Zeit verschiedene Upwind Methoden für die FEM entwickelt wurden. Eine der grundlegenden Arbeiten dabei stammt von Brooks und Hughes (1982) [10]. In jüngerer Zeit wendeten Iskandarani et al. (1993) [43] ein spektrales finite Elemente Modell auf die Flachwassergleichungen an. Haidvogel et al. (1994) [36] präsentierten ein ähnliches Modell zur Beschreibung der globalen Zirkulation. Zhu et al. (1994) [95] assimilierten Daten in ein zweidimensionales finite Elemente Modell für die Flachwassergleichungen. Behrens (1996, 1998) [6, 7] entwickelte ein adaptives Semi-Lagrange-Finite-Elemente-Modell zur Lösung der Flachwassergleichungen, das auch parallelisiert wurde. Eine weitere aktuelle Arbeit auf diesem Gebiet stammt von Le Roux et al. (1998) [48].

Insgesamt ist die Anwendung der Methode der finiten Elemente in der Ozeanographie und besonders in der Inversmodellierung noch eher wenig verbreitet, so daß ein Inversmodell mit finiten Elementen sicherlich einen innovativen Schritt darstellt.

1.5 Ziel der Arbeit

Mit dieser Arbeit wird ein intern konsistentes (thermischer Wind) Inversmodell vorgestellt, das einen neuen Modellansatz verfolgt. Mit dem Modell soll die Bildung und Ausbreitung von Bodenwasser im Südatlantik beziehungsweise im Weddellmeer untersucht werden. Weiter sollen quantitative Aussagen über den Austausch (Stofftransport) zwischen dem Atlantik, dem Pazifischen und dem Indischen Ozean getroffen werden. Dabei ist der Wärmetransport in und aus dem Südatlantik über die offenen Ränder des Modellgebiets von besonderem Interesse.

Es wird ein stationäres Advektions-Diffusions-Modell auf der Basis der Methode der finiten Elemente entwickelt, bei dem die adjungierte Methode angewendet wird. Als Grundelemente des Modellgitters sollen Tetraeder verwendet werden. Diese Elemente eignen sich besonders gut für die Darstellung dreidimensionaler komplizierter Geometrien, wie sie durch die Bodentopographie der Ozeane vorgegeben ist. Das Modell soll die Eigenschaft haben, daß das Gitter lokal beliebig verfeinert werden kann, ohne daß Änderungen am Modellcode notwendig wären. Deshalb wird ein unstrukturiertes Gitter¹ verwendet, was eine variable Auflösung erlaubt. Dabei können beliebige Gitterpunkte zwangsweise vorgegeben werden, womit lokale Strukturen besonders gut aufgelöst werden können. Die finiten Elemente spielen damit

¹Unstrukturiert bedeutet in dieser Arbeit vor allem, daß jeder Gitterpunkt nicht unbedingt einen Nachbarpunkt in einer anderen Tiefe oder an der Meeresoberfläche mit denselben horizontalen Koordinaten haben muß.

einen ihrer deutlichen Vorteile gegenüber den finiten Differenzen aus (siehe Abs. 3.1). Ein weiterer Vorteil, der in dieser Arbeit genutzt wird, ist das relativ einfache Adjungieren der Modellgleichungen (siehe Abs. 3.10).

Das Modellgebiet erstreckt sich von der Antarktis bis 30°S und bleibt auf den Südatlantik beschränkt. Die horizontale Auflösung soll dabei im Bereich von 2° liegen.

Das Modell soll die geostrophisch balancierten Strömungen beschreiben und massen- und wärme-erhaltend sein. Die invers bestimmten Kontrollvariablen sind die horizontalen Referenzgeschwindigkeiten an der Meeresoberfläche sowie Quellen und Senken (Wärme- und Süßwasserflüsse) der Advektions-Diffusions-Gleichung. In das Modell werden unter anderen klimatologische hydrographische Daten (ohne Jahresgang) und Daten für die absolute Auslenkung der Meeresoberfläche (SSH-Daten) aus Satelliten-Altimetermessungen assimiliert, die allerdings nicht synoptisch sind.

Die Modellergebnisse zeigen erste Anwendungen, bei denen das Modell stark nach den SSH-Daten gewichtet wird. Sie werden mit Ergebnissen anderer Modelle und Ergebnissen aus Messungen, die in der Literatur vorliegen, verglichen.

1.6 Aufbau der Arbeit

Nach der Einleitung in diesem Kapitel wird im zweiten Kapitel die Strategie des adjungierten Modells und die Initialisierung der Modellparameter beschrieben. Außerdem werden die verwendeten Datensätze (Hydrographie, Satellitenaltimetrie, Windschubspannung, Netowärmeflüsse und Süßwasserflüsse) vorgestellt. Im dritten Kapitel wird die Methode der finiten Elemente ausführlich dargestellt. Es werden Vor- und Nachteile der Methode, die Diskretisierung der Gleichungen, Verfahren zur Stabilisierung, Aufstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems, die Gittergenerierung, die Berechnung partieller Ableitungen auf den Gitterpunkten und das Adjungieren der Modellgleichungen behandelt. Auf dieser Grundlage wird dann im vierten Kapitel ein Modell für den Südatlantik aufgesetzt. Dabei werden das dafür generierte Gitter und die Initialisierung des Modells vorgestellt. Die Lösungen dieses Modells werden im Kapitel 5 beschrieben und mit Ergebnissen aus Messungen und anderer Modelle verglichen. Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse, die mit dem Modell erzielt wurden, zusammengefaßt. Weiter wird ein Ausblick auf weitere mögliche Entwicklungen und Anwendungen des Modells gegeben.

Kapitel 2

Das Inversmodell – Strategie und Initialisierung

In diesem Kapitel wird die Modellstrategie vorgestellt und gezeigt, wie das Modell initialisiert wird. Die dazu verwendeten hydrographischen Daten und Satelliten-Altimeter-Messungen werden ebenfalls präsentiert.

Die Parameter des Modells sind Temperatur T , Salzgehalt S , Dichte ρ , Geschwindigkeiten $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_h, w) = (u, v, w)$ und Quellen und Senken der Advektions-Diffusions-Gleichung bezüglich Temperatur und Salzgehalt F^T und F^S . Mit Hilfe der Zustandsgleichung wird aus einer Temperatur- und Salzgehaltsverteilung die Dichte ρ berechnet. Aus dieser werden ein horizontales Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u}_h und daraus durch Massenerhaltung die Vertikalgeschwindigkeiten w bestimmt. Die Geschwindigkeiten (u, v, w) werden in die Advektions-Diffusions-Gleichung eingesetzt, aus der neue Werte für Temperatur und Salzgehalt berechnet werden. Dafür wird die Methode der finiten Elemente – die im Kapitel 3 vorgestellt wird – verwendet. In das Modell werden mit der adjungierten Methode Daten assimiliert. Das Modell wird durch eine Kostenfunktion J , die die Qualität der Modellösung beschreibt, an gemessene Daten angepaßt. Dazu werden die Parameter in unabhängige und abhängige aufgeteilt. Die unabhängigen Parameter sind die Kontrollvariablen, nach denen die Kostenfunktion variiert wird. Gesucht wird dann derjenige Satz an Parametern, mit denen der Wert der Kostenfunktion minimal wird. Dieser Satz stellt eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung (Zirkulation) mit entsprechendem Temperatur- und Salzgehaltsfeld dar.

Zu Beginn wird \mathbf{u}_h aus hydrographischen Daten initialisiert (siehe Abs. 2.4.2). Weitere Datensätze (Abs. 2.4.1) liegen für Windschubspannung, Wärme- und Süßwasserflüsse an der Oberfläche, die Bodentopographie und die Auslenkung der Meeresoberfläche aus Satelliten-Altimeterdaten vor.

2.1 Die Modellgleichungen

Die Dichte ρ wird aus Temperatur T und Salzgehalt S mittels der UNESCO-Formel für die Zustandsgleichung (1981, siehe z.B. Gill, 1982 [31])

$$E^p = \rho - R(T, S, p) = 0 \tag{2.1}$$

berechnet; $p = 0.1 \cdot \Delta z$ ist der Druck in bar.

Die horizontalen Geschwindigkeiten u und v werden aus der thermischen Windrelation (siehe auch Gl. 2.24)

$$E^u = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{g}{\rho f} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad E^v = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{g}{\rho f} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

relativ zu den variierten Oberflächengeschwindigkeiten bestimmt:

$$u(x, y, z) = u_{ref}(x, y) - \frac{g}{\rho f} \int_z^{-h_e} \frac{\partial \rho}{\partial y} dz', \quad v(x, y, z) = v_{ref}(x, y) + \frac{g}{\rho f} \int_z^{-h_e} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz'. \quad (2.3)$$

Dabei sind g die Erdbeschleunigung und f der Coriolisparameter. Am Boden sollen die Geschwindigkeiten oder nur deren Normalkomponenten verschwinden ($\mathbf{u} = 0$ oder $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$). In der Ekman-Schicht ($0 \geq z \geq -h_e$) soll $\mathbf{u}_h(z) = \mathbf{u}_h(-h_e)$ — also $\mathbf{u}_h(-h_e) = \mathbf{u}_{ref}(0)$ — gelten.

Die Vertikalgeschwindigkeiten w werden aus der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

berechnet. Dabei wird $\partial w / \partial z$ vom Boden aus mit der Randbedingung $w(-H) = \mathbf{u}_h \nabla H$ bis zur Tiefe $-h_e$ der Ekman-Schicht integriert:

$$E^w = w(z) + \int_{-H}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz' - w(-H) = w(z) + \nabla \cdot \int_{-H}^z \mathbf{u}_h dz' = 0. \quad (2.5)$$

Temperatur und Salzgehalt werden aus der stationären Advektions-Diffusions-Gleichung

$$E^T = \mathbf{u} \cdot \nabla T - K \Delta T - F^T = 0, \quad E^S = \mathbf{u} \cdot \nabla S - K \Delta S - F^S = 0 \quad (2.6)$$

berechnet. An den offenen Rändern und an der Meeresoberfläche werden inhomogene Dirichlet-Bedingungen ($T = T_{dat}, S = S_{dat}$) und am Boden homogene Neumann-Bedingungen bezüglich Temperatur und Salzgehalt ($\partial T / \partial n = \partial S / \partial n = 0$) verwendet. Die Quellen F^T und F^S werden zugelassen, um subskalige Prozesse zu parametrisieren, die aufgrund der Modelleigenschaften (z.B. der lokalen Gitterweite) nicht aufgelöst werden.

Die unabhängigen Parameter (Kontrollvariablen) des Modells sind die horizontalen Referenzgeschwindigkeiten \mathbf{u}_{ref} und \mathbf{v}_{ref} und die Quellen und Senken der Advektions-Diffusions-Gleichung (2.6) F^T und F^S :

$$\mathbf{p} = [\dots, u_{ref,j}, \dots, v_{ref,j}, \dots, F_j^T, \dots, F_j^S, \dots]^T. \quad (2.7)$$

Die übrigen horizontalen Geschwindigkeiten und die Temperatur T , der Salzgehalt S , die Dichte ρ sowie die vertikalen Geschwindigkeiten w bilden den Satz an abhängigen Modellparametern

$$\mathbf{q} = [\dots, u_i, \dots, v_i, \dots, T_i, \dots, S_i, \dots, \rho_i, \dots, w_i, \dots]^T. \quad (2.8)$$

Die unabhängigen Parameter \mathbf{p} werden initialisiert und im adjungierten Modellschritt variiert. Die abhängigen Parameter \mathbf{q} werden aus den Modellgleichungen bestimmt.

2.2 Die Kostenfunktion

Aus den gesamten unabhängigen und abhängigen Parametern \mathbf{p} und \mathbf{q} kann die Güte des augenblicklichen Modellzustands am Wert der Kostenfunktion J abgelesen werden. Die Terme der Kostenfunktion ‘bestrafen’ ungewollte Eigenschaften der momentanen Modellösung, oder anders ausgedrückt, messen sie, wie weit die Modellösung von einem gewünschten Zustand entfernt ist. Ziel ist es, den Wert der Kostenfunktion zu minimieren, um somit das Modell in Richtung des gewünschten Zustands zu treiben. Die Lösung des Modells hängt also sehr von der Charakteristik der Kostenfunktion ab.

In diesem Modell besteht die Kostenfunktion aus folgenden Termen:

$$J = \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j=1}^{n_{uv}} \left(\frac{\rho f}{\rho_0 g} v_{ref,i} - \frac{\partial}{\partial x} \zeta_{i,dat} \right)^T W_{ij}^v \left(\frac{\rho f}{\rho_0 g} v_{ref,j} - \frac{\partial}{\partial x} \zeta_{j,dat} \right) \right. \quad (2.9)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n_{uv}} \left(\frac{\rho f}{\rho_0 g} u_{ref,i} + \frac{\partial}{\partial y} \zeta_{i,dat} \right)^T W_{ij}^u \left(\frac{\rho f}{\rho_0 g} u_{ref,j} + \frac{\partial}{\partial y} \zeta_{j,dat} \right) \quad (2.10)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n_F} \left(F_i^T - F_{i,dat}^T \right)^T W_{ij}^T \left(F_j^T - F_{j,dat}^T \right) \quad (2.11)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n_F} \left(F_i^S - F_{i,dat}^S \right)^T W_{ij}^S \left(F_j^S - F_{j,dat}^S \right) \quad (2.12)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n_w} \left(w_i - \text{curl} \left(\frac{\tau_i}{f_i} \right) \right)^T W_{ij}^w \left(w_j - \text{curl} \left(\frac{\tau_j}{f_j} \right) \right) \quad (2.13)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n_T} \left(T_i - T_{i,dat} \right)^T W_{ij}^T \left(T_j - T_{j,dat} \right) \quad (2.14)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n_S} \left(S_i - S_{i,dat} \right)^T W_{ij}^S \left(S_j - S_{j,dat} \right) \quad (2.15)$$

$$= J_{uv} + J_F + J_w + J_T + J_S .$$

Mit den ersten beiden Termen (2.9,2.10 – zusammengefaßt zu J_{uv}) wird der Gradient der Oberflächenauslenkung (SSH) ζ berücksichtigt. Dabei wird die Beziehung $p(0) = g\rho_0\zeta$ zwischen Druck an der Oberfläche $z = 0$ und SSH ausgenutzt. Setzt man diese in die geostrophischen Gleichungen (siehe Gl. 2.22) ein, erhält man

$$\rho u_{ref}(z=0) = -\frac{g\rho_0}{f} \frac{\partial}{\partial y} \zeta, \quad \rho v_{ref}(z=0) = \frac{g\rho_0}{f} \frac{\partial}{\partial x} \zeta. \quad (2.16)$$

ζ_{dat} sind Satelliten-Altimeter-Messungen der SSH (siehe Abschnitt 2.4.1). Abweichungen zwischen dem SSH-Gradienten der Modellösung und den Satellitendaten sollen gering werden.

Mit den zu J_F zusammengefaßten Termen (2.11) und (2.12) sollen die Quellen und Senken F^T und F^S den Werten von F_{dat}^T und F_{dat}^S angenähert werden. F_{dat}^T und F_{dat}^S sind überall gleich null. An der Oberfläche werden sie entsprechend den Daten gesetzt, die für Wärme-

und Süßwasserflüsse an der Oberfläche vorliegen (Abschnitt 2.4.1).

Term J_w (2.13) paßt die Vertikalgeschwindigkeiten $w_i(z = -h_e)$ an der unteren Grenze der Ekman-Schicht an die Rotation des Windfelds τ an.

Die beiden letzten Terme J_T und J_S (2.14 und 2.15) dienen dazu, daß die Werte von Temperatur T und Salzgehalt S in der Nähe der Daten T_{dat} und S_{dat} liegen.

Mit W_{ij} werden die Elemente der Wichtungsmatrizen bezeichnet, die mit den entsprechenden Varianzen σ_{kk}^2 und Kovarianzen $\sigma_{kk'}^2$ belegt werden. Die Matrizen bleiben hier aber diagonal, so daß also keine Kovarianzen berücksichtigt werden. Bei der Präsentation der Daten im Abschnitt 2.4.1 werden Angaben zu den Varianzen und Fehler der Daten gemacht. Der Faktor 1/2 wird nur gesetzt, damit er sich mit dem Faktor 2 kürzt, der beim Differenzieren der quadratischen Kostenfunktion J anfällt.

2.3 Das adjungierte Modell

Ein wesentlicher Punkt dieses Modells besteht darin, daß neue Modellzustände mit neuen Modellparametern \mathbf{p}_{neu} und \mathbf{q}_{neu} berechnet werden, für die die Kostenfunktion J einen kleineren Wert annimmt als für den momentanen Zustand mit den Parametern \mathbf{p} und \mathbf{q} . Letztendlich soll der Wert der Kostenfunktion minimal werden. Für den momentanen Modellzustand muß also eine Richtung innerhalb des von den unabhängigen Parametern \mathbf{p} aufgespannten Phasenraums gesucht werden, in der der Wert der Kostenfunktion abnimmt. Dazu wird der Gradient der Kostenfunktion ∇J in einen Minimierungsalgorithmus gegeben. In dieser Arbeit wird ein quasi-Newton Algorithmus (mit variabler Speicheranforderung) von Gilbert und Lemaréchal (1989) [29] verwendet. Bei der Minimierung der Kostenfunktion handelt es sich um ein Problem mit Zwangsbedingungen. Die Zwangsbedingungen sind die Modellgleichungen (2.1 - 2.6). Das heißt, daß beim Minimierungsprozeß nur Modellzustände in Frage kommen, die die Modellgleichungen erfüllen. Zur Lösung von Minimierungsproblemen mit Zwangsbedingungen bietet sich die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren an (Le Dimet und Talagrand, 1986 [46], Thacker, 1988 [79], Schröter, 1989 [71]). Dabei wird ausgenutzt, daß die sogenannte Lagrange-Funktion L im Minimum der Kostenfunktion J einen stationären Punkt hat. Die Lagrange-Funktion L ist eine Funktion der Modellparameter \mathbf{p} und \mathbf{q} und den unbekanntenen Lagrangeschen Multiplikatoren $\lambda = [\dots, \lambda_j, \dots]^T$ und gegeben durch

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \lambda) = J + \sum_{j=1}^{n_{eq}} \lambda_j E_j \quad \text{mit} \quad E_j = 0, \quad (2.17)$$

wobei mit E_j die Modellgleichungen (2.1 - 2.6) bezeichnet werden. n_{eq} ist die Gesamtzahl der Modellgleichungen. Wie schon erwähnt wurde, hat die Lagrange-Funktion L im Minimum der Kostenfunktion J einen stationären Punkt. Das bedeutet, daß der Gradient der Lagrange-Funktion dort verschwindet ($\nabla L = 0$). Daraus folgt, daß an diesem Punkt alle partiellen Ableitungen von L verschwinden, wobei die Ableitungen nach den λ_j gerade die Modellgleichungen ergeben:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = E_j = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial J}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n_{eq}} \lambda_j \frac{\partial E_j}{\partial q_i} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = \frac{\partial J}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^{n_{eq}} \lambda_j \frac{\partial E_j}{\partial p_i} = 0. \quad (2.20)$$

Die beiden unteren Gleichungen (2.19 und 2.20), bei denen L nach den unabhängigen und abhängigen Parametern \mathbf{p} und \mathbf{q} differenziert wird, werden als adjungierte Gleichungen bezeichnet. Das Minimum der Kostenfunktion muß also die drei obigen Gleichungen — die adjungierten Gleichungen und die Modellgleichungen — erfüllen.

Im Modell wird das Minimum von J mit Hilfe eines iterativen Prozesses bestimmt. Dabei werden zunächst die Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j aus den Gleichungen (2.19) berechnet. Diese ergeben ein n_{eq} -dimensionales lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{mit} \quad A_{ij} = \frac{\partial E_j}{\partial q_i} \quad \text{und} \quad b_i = \frac{\partial J}{\partial q_i}. \quad (2.21)$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems wird in dieser Arbeit das (iterative) GMRES-Verfahren verwendet, das im Abschnitt 3.7 näher betrachtet wird. Die so berechneten Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j werden dann in den Gleichungen (2.20) eingesetzt, womit man die partiellen Ableitungen $\partial L / \partial p_i$ erhält, die dann in den Minimierungsalgorithmus von Gilbert und Lemaréchal (1989) [29] gegeben werden.

Der gesamte Algorithmus des Modells besteht also aus den folgenden Schritten:

1. Initialisieren der unabhängigen Parameter \mathbf{p} :
 - (a) Berechnung einer Anfangsverteilung der Dichte ρ_{dat} aus hydrographischen Daten T_{dat} und S_{dat} mittels der Zustandsgleichung (2.1),
 - (b) Initialisieren des horizontalen Geschwindigkeitsfeldes und damit der Referenzgeschwindigkeiten u_{ref} und v_{ref} aus der Dichte ρ_{dat} (siehe Abs. 2.4.2),
 - (c) Initialisieren der Quellen F^T und $F^S \rightarrow$ weiter mit Punkt 2(c).
2. Berechnung der abhängigen Parameter \mathbf{q} aus den Modellgleichungen E_i . Dieser Schritt wird auch als Vorwärtsmodell bezeichnet:
 - (a) Berechnung der Dichte ρ aus der Zustandsgleichung (2.1),
 - (b) Berechnung der horizontalen Geschwindigkeiten u und v aus den thermischen Windgleichungen (2.2),
 - (c) Berechnung der vertikalen Geschwindigkeiten w aus der Kontinuitätsgleichung (2.5),
 - (d) Berechnung neuer Werte für Temperatur T und Salzgehalt S mit der Advektions-Diffusions-Gleichung (2.6).
3. Berechnung des Wertes der Kostenfunktion J .
4. Berechnung des Gradienten der Kostenfunktion ∇J durch lösen der adjungierten Gleichungen (2.19) und (2.20).

5. Anwendung des Minimierungs-Algorithmus auf ∇J , um neue unabhängige Parameter \mathbf{p}_{neu} zu erhalten.
6. Zurück zu Punkt 2 bis sich der Wert der Kostenfunktion J nur noch weniger als um ein gewisses ε ändert, oder der Gradient ∇J hinreichend klein ist.

2.4 Initialisierung

Wie der Modellalgorithmus zeigt, muß das Modell zunächst initialisiert werden. Dazu werden aus einem Ausgangsfeld von Temperatur und Salzgehalt die Dichte und daraus ein horizontales Geschwindigkeitsfeld berechnet. Außerdem werden Winddaten, Daten für die Wärme- und Süßwasserflüsse sowie Topographiedaten benötigt. Im folgenden Abschnitt werden die in dieser Arbeit benutzten Daten präsentiert. Danach wird dargestellt, wie das Geschwindigkeitsfeld initialisiert wird.

2.4.1 Verwendete Daten

Topographiedaten

Als Topographiedaten werden ETOPO5-Daten (1988) [52] verwendet. Sie liegen in einer Auflösung von $5' \times 5'$ vor. Abbildung (2.1) zeigt die Daten für den Südatlantik.

Hydrographische Daten

Zur Initialisierung des Modells wird eine Anfangsverteilung von Temperatur T und Salzgehalt S benötigt. Dafür werden klimatologische Daten aus dem “Hydrographic Atlas of the Southern Ocean” von Olbers et al. (1992) [57] verwendet. Die Daten und deren Varianzen σ_T^2 und σ_S^2 liegen im Modellgebiet mit einer Auflösung von $1^\circ \times 1^\circ$ auf 38 Tiefenniveaus vor und werden auf das Modellgitter interpoliert. Die Abbildungen (2.2) und (2.3) zeigen Temperatur und Salzgehalt an der Oberfläche für den Südatlantik.

Die TOPEX/POSEIDON-Daten

Mit den Messungen der TOPEX/POSEIDON-Mission steht erstmals ein Datensatz für die Oberflächenauslenkung ζ (SSH) zur Verfügung, dessen Genauigkeit auch Aussagen über die mittlere Zirkulation des Ozeans zuläßt (Fu et al., 1994 [25], King et al., 1994 [45]). Mit dieser Mission wurde das erste kontinuierliche Beobachtungssystem zur Messung der absoluten Auslenkung der Meeresoberfläche in seinen Orbit gebracht. Bei der Verwendung von GEOSAT-Daten wurde bisher fast nur mit SSH-Anomalien gearbeitet, da die absoluten Werte zu große Ungenauigkeiten haben. Anwendung fanden sie beispielsweise bei der Assimilation in mesoskaligen Modellen (u.a. Willebrand et al., 1990 [91], Schröter et al., 1993 [72], Vogeler und Schröter, 1995 [82]). Die TOPEX-Daten können deshalb wesentlich zum besseren Verständnis der Prozesse der allgemeinen Zirkulation des Ozeans beitragen (siehe z.B. Seiß, 1996 [75]).

Die TOPEX/POSEIDON-Mission ist ein französisch-amerikanisches Projekt. Der Satellit wurde 1992 gestartet. Die verbesserte Genauigkeit der Meßdaten wird vor allem durch eine genauere Bestimmung der Umlaufbahn, einer besseren Korrektur der Atmosphäreneinflüsse

und der Ausnutzung besserer Geoid- und Gezeitenmodelle erreicht. Die Inklination beträgt 66° . Eine genauere Beschreibung der Mission findet man unter anderem bei Fu et al. (1994) [25].

In dem hier vorgestellten stationärem Modell wird das jährliche Mittel der SSH-Daten verwendet. Sie stammen von King et al. (1994) [45]. Fu et al. (1994) [25] geben für die Daten einen Fehler von $\pm 4.7 - 5.1$ cm an. Südlich von 66°S , wo keine TOPEX/POSEIDON-Daten vorliegen, wird als Ersatz die dynamische Topographie relativ zu 3000 db aus dem “Hydrographic Atlas of the Southern Ocean” von Olbers et al. (1992) [57] verwendet. Im Bild (2.4) sind die SSH-Daten für den Bereich des Südatlantiks dargestellt. Es zeigt im zentralen Südatlantik ein zonales Muster, daß dem Verlauf des Antarktischen Zirkumpolarstroms (ACC) entspricht. Im Weddellmeer ist der Weddellwirbel zu erkennen. Der Wirbel schließt sich aber schon bei 20°W und hat eine breite westliche Flanke, die sich bis circa 50°W erstreckt. Im Norden bei 30°S impliziert das Muster den Einstrom des Brasilstroms östlich der südamerikanischen Küste. Vor der Küste Argentiniens zeigen die Daten keine Feinstrukturen.

Daten für die Windschubspannung

Für die Windschubspannung τ werden die Daten von Hellerman und Rosenstein (1983) [40] verwendet. Sie liegen in einer Auflösung von $2^\circ \times 2^\circ$ monatlich vor. Für das stationäre Modell wird hier das jährliche Mittel berechnet. Das Feld der Windschubspannung wird in Bild (2.5) gezeigt, wobei nur alle 4° ein Wert dargestellt wurde. Hellerman und Rosenstein geben für den Bereich des Atlantiks südlich von 40°S einen Fehler von $2.5 \cdot 10^{-2} \text{ kg/ms}^2$ an. Zwischen 30°S und 40°S wird er im Bereich von $1.0 - 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ kg/ms}^2$ angegeben. Abbildung (2.6) zeigt die Rotation der Windfeldes.

Flußdaten

An Daten für Wärme- und Süßwasserflüsse an der Meeresoberfläche stehen Nettowärmefflüsse und E-P-Daten aus Reanalyseprojekten vom ECMWF von Bernard Barnier vom Laboratoire des Ecoulements Geophysiques et Industriels zur Verfügung (Abb. 2.7,2.8). Die Erstellung dieser Daten wird bei Garnier et al. (1998) [27] beschrieben. Sie gehen als F_{dat}^T und F_{dat}^S in die Terme (2.11) und (2.12) in die Kostenfunktion J ein.

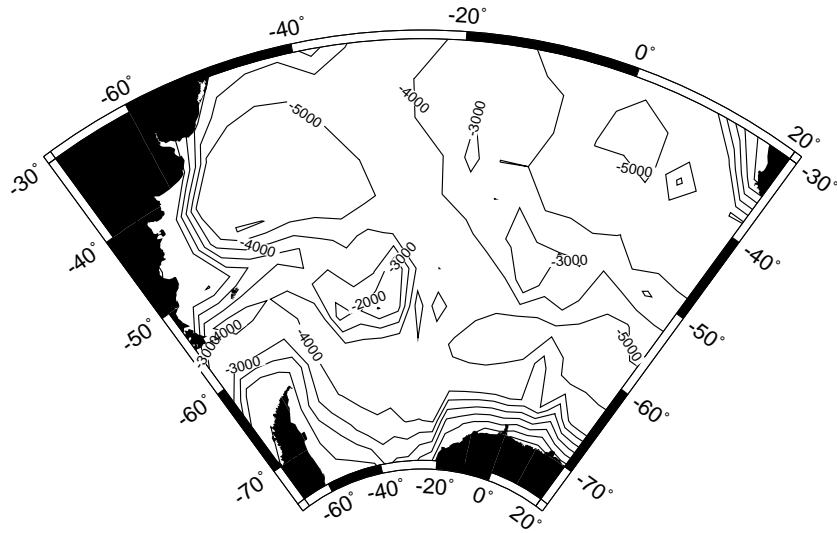


Abbildung 2.1: Topographie des Südatlantiks: Meerestiefe z in m.

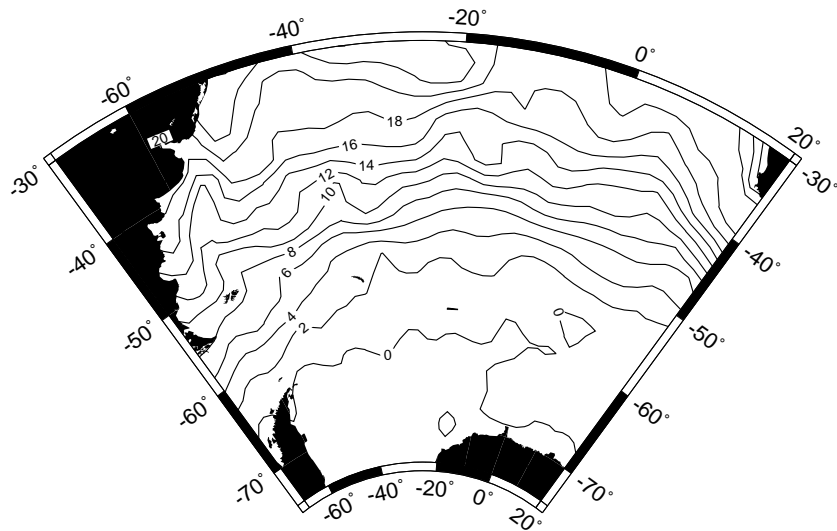


Abbildung 2.2: Temperatur in $^{\circ}\text{C}$ an der Oberfläche des Südatlantiks ($z = 0\text{m}$) aus dem Southern Ocean Atlas.

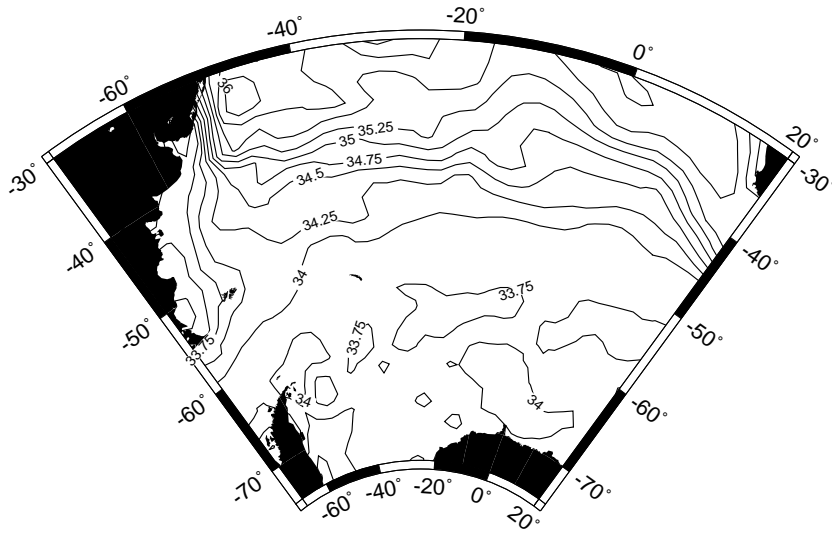


Abbildung 2.3: Salzgehalt in psu an der Oberfläche des Südatlantiks ($z = 0m$) aus dem Southern Ocean Atlas.

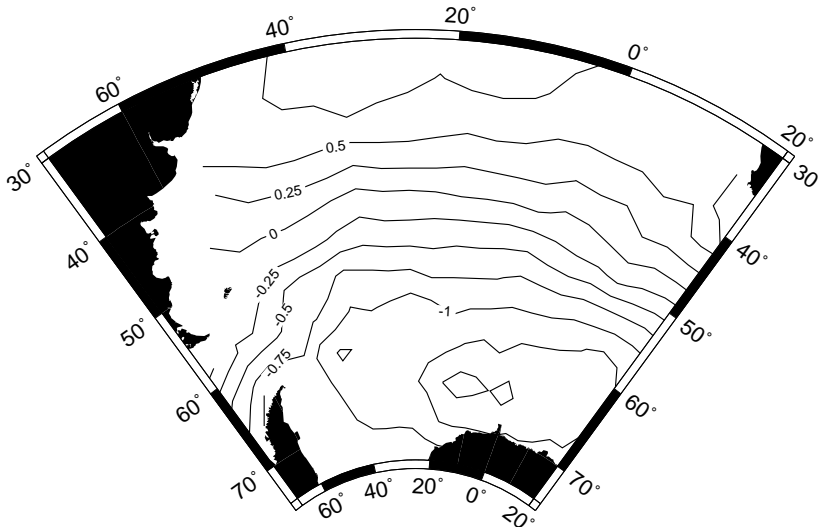


Abbildung 2.4: TOPEX/POSEIDON-Daten für die Oberflächenauslenkung ζ (SSH) in m.

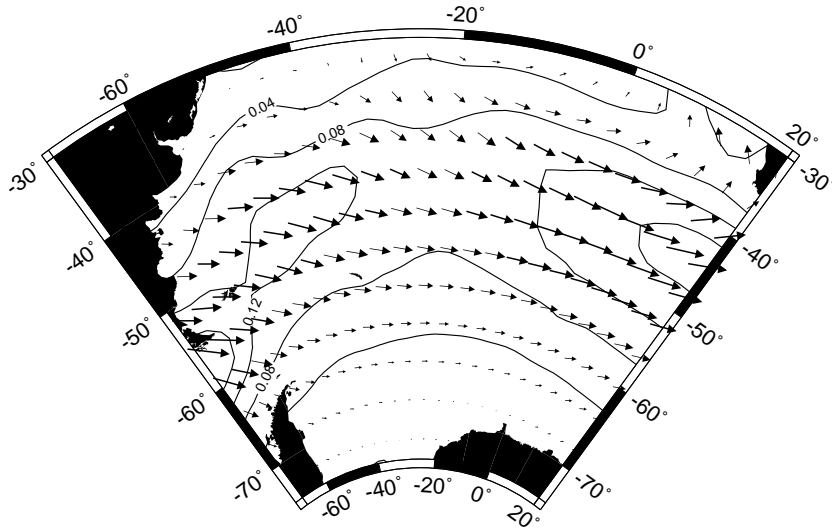


Abbildung 2.5: Windschubspannung in $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$ von Hellerman und Rosenstein (1983). Die Konturlinien zeigen den Betrag der Windschubspannung an.

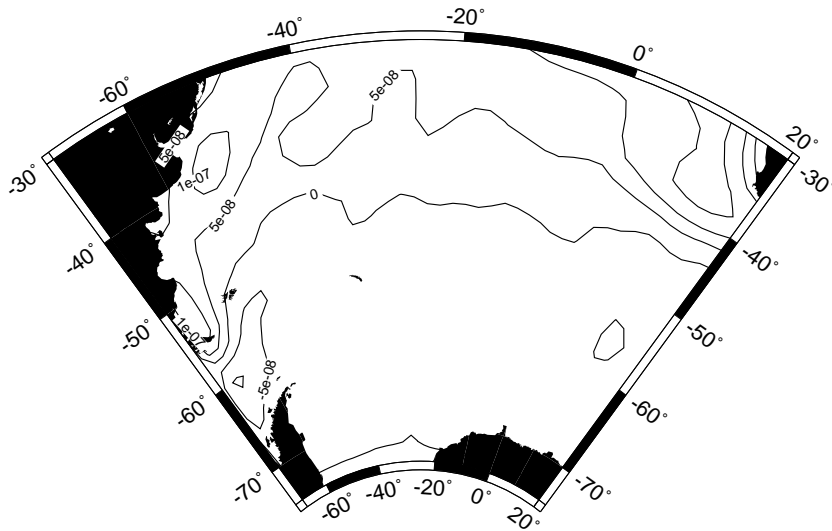


Abbildung 2.6: Rotation des Windfeldes ($\text{curl } \tau / f$) aus Abb. (2.5) in ms^{-1}

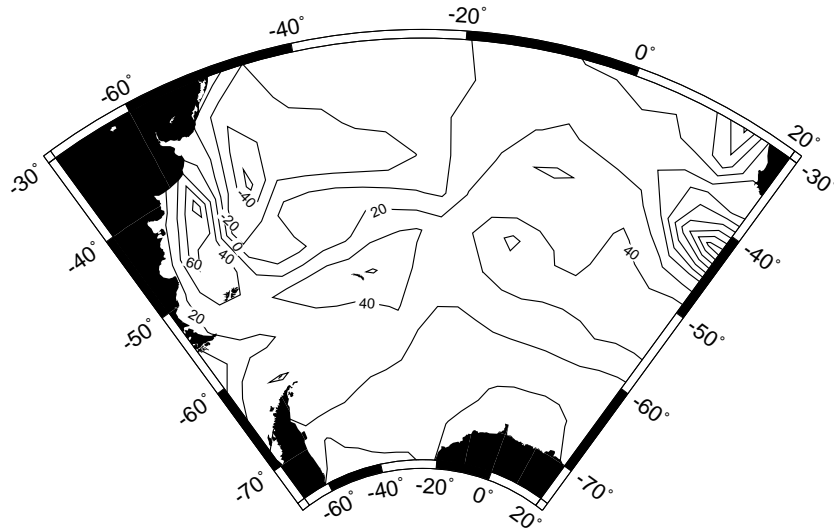


Abbildung 2.7: Nettowärmeftüsse F_{dat}^T in Wm^{-2} an der Meeresoberfläche.

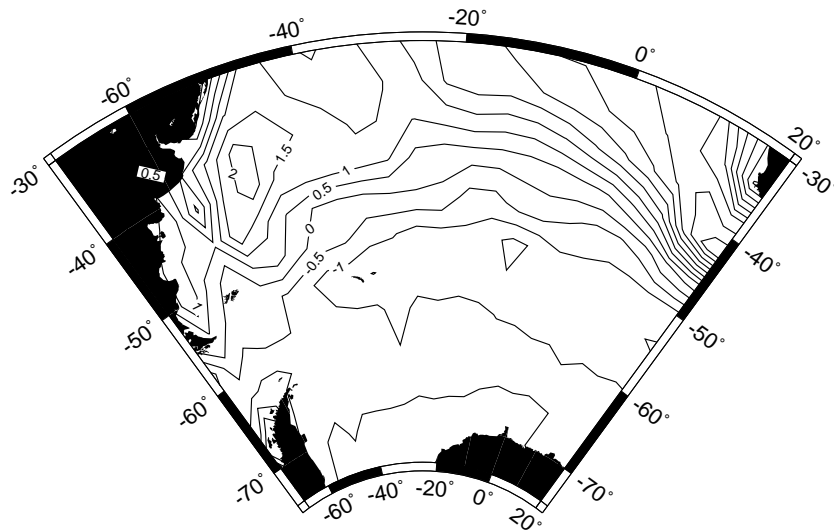


Abbildung 2.8: Süßwasserflüsse (E-P-Daten) F_{dat}^S in $10^{-8} ms^{-1}$ an der Meeresoberfläche.

2.4.2 Initialisierung des horizontalen Geschwindigkeitsfeldes

Aus den hydrographischen Daten für Temperatur und Salzgehalt kann mit der Zustandsgleichung (2.1) die Dichte ρ bestimmt werden. Aus diesem Dichtefeld wird mit den geostrophischen Gleichungen eine Anfangsverteilung für die geostrophischen Geschwindigkeiten (u, v) berechnet, die die Balance zwischen Corioliskraft und Druckgradient erfüllen. Die geostrophischen Gleichungen lauten

$$\rho u = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \text{und} \quad \rho v = \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.22)$$

mit dem Druck p und dem Coriolis-Parameter $f = 2\Omega \sin \phi$. Zusammen mit der hydrostatischen Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (2.23)$$

(g : Schwerebeschleunigung) und der Boussinesq-Approximation ergibt sich daraus die thermische Windrelation

$$\rho \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{f} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{f} \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (2.24)$$

die schon als Modellgleichung (2.2) im Abschnitt 2.1 eingeführt wurde. Werden diese beiden Gleichungen über die Vertikale integriert, folgt daraus für die geostrophischen Geschwindigkeiten $\mathbf{u}_h = (u, v)$ relativ zu einer Referenztiefe z_{ref}

$$u(z) = \frac{g}{\rho f} \int_{z_{ref}}^z \frac{\partial \rho}{\partial y} dz', \quad v(z) = -\frac{g}{\rho f} \int_{z_{ref}}^z \frac{\partial \rho}{\partial x} dz'. \quad (2.25)$$

Als Referenzniveau für die Geschwindigkeitsprofile dieser beiden Gleichungen wird hier eine Tiefe von $z_{ref} = -3000\text{m}$ gewählt. Das heißt, daß $\mathbf{u}_h(z_{ref}) = 0$ ist. Für Profile, die in Bereichen liegen, wo das Modellgebiet flacher als 3000m ist, wird die Tiefe des Modellgebiets an jener Stelle als Referenztiefe verwendet. Die Geschwindigkeit im Referenzniveau wird also willkürlich auf null gesetzt. Die geostrophischen Geschwindigkeiten geben nur die vertikale Scherung ($\partial u/\partial z, \partial v/\partial z$) der horizontalen Geschwindigkeiten an. Die vertikale Integration der Gleichungen (2.25) erfolgt nur bis zur Tiefe $-h_e$ der Ekman-Schicht. Für $z > -h_e$ wird $\mathbf{u}_h(z) = \mathbf{u}_h(-h_e)$ gesetzt. Auf die Geschwindigkeiten in der Ekman-Schicht werden außerdem Ekman-Geschwindigkeiten

$$u_e = -U_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{|h_e|} z\right) \exp\left(\frac{\pi}{|h_e|} z\right), \quad v_e = U_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{|h_e|} z\right) \exp\left(\frac{\pi}{|h_e|} z\right) \quad (2.26)$$

$$\text{mit} \quad U_0 = \frac{\sqrt{2} \pi \tau}{|h_e| \rho |f|}$$

addiert. Dabei sind $|h_e|$ die Dicke der Ekman-Schicht, $|f|$ der Betrag des Coriolisparameters und τ der Betrag der Windschubspannung. Das negative Vorzeichen in u_e gilt für die Südhalbkugel.

Kapitel 3

Die Finite-Elemente-Methode

3.1 Einführung

Bereits in der Übersicht des Einleitungskapitels wurde gesagt, daß die Methode der finiten Elemente (FEM) (Zienkiewicz, 1984 [96], Johnson, 1990 [44] und Schwarz, 1991 [74]) in den fünfziger und sechziger Jahren zunächst für die Lösung von Problemen der Elastomechanik entwickelt wurde und daß sie für Strömungsprobleme und vor allem für Advektions-Diffusions-Probleme erst in den achtziger Jahren populär wurde. Die Gründe dafür liegen darin, daß erst in dieser Zeit verschiedene Methoden zur Stabilisierung der FEM bei solchen Problemen entwickelt wurden.

Ihre großen Stärken hat die FEM in folgenden Punkten:

Mit ihr können Probleme auf komplizierten Geometrien behandelt werden, was besonders bei Verwendung von finiten Differenzen schwierig ist. So können bei der FEM auch unstrukturierte Gitter benutzt werden. Dadurch können Gitterverfeinerungen lokal ausgeführt werden, ohne daß die Zahl der Gitterpunkte deutlich erhöht werden muß. Diese Entwicklung ist bei finiten Differenzen und finiten Volumina noch nicht so weit fortgeschritten. Als Gitterelemente für 3D-Probleme werden bei der FEM u.a. Tetraeder, Prismen, Parallelepipede und krummlinige Elemente verwendet. Die Gitter in dieser Arbeit werden aus Tetraedern aufgebaut (Abb. 3.1).

Bei der FEM wird von einem Variationsprinzip ausgegangen, wobei eine Integration ausgeführt wird. Die Ableitungen, die dann bei solch einem Ansatz eine Rolle spielen, sind im allgemeinen von nur halb so hoher Ordnung, wie die der dazu entsprechenden Differentialgleichung. Das bedeutet zum Beispiel, daß die zweiten Ableitungen, die in einem Modell mit finiten Differenzen vorkommen, in der Variationsformulierung des entsprechenden Modells mit finiten Elementen gar nicht auftreten. Dadurch können die Elemente und ihre Übergangsbedingungen relativ einfach gehalten werden.

Finite Differenzen, bei denen von der partiellen Differentialgleichung selbst ausgegangen wird, betrachten das Modellgebiet quasi nur stichprobenweise an den Gitterpunkten. Dagegen wird bei der FEM durch die Linearkombination der Basisfunktionen der umgebende Raum eines Punktes mit berücksichtigt. Die (lokalen) Basisfunktionen sind Polynome niedrigen Grades. Sie sind jeweils auf einem Element so definiert, daß sie an einem Gitterpunkt des Elements gleich eins sind und an den anderen Punkten verschwinden (siehe Abschnitt

3.3). Bei der FEM sind daher die Felder kontinuierlich auf dem gesamten Modellgebiet gegeben, während sie bei finiten Differenzen nur an den Gitterpunkten bekannt sind.

Ein weiterer Punkt – der gerade für die Inversmodellierung bedeutsam ist – ist, daß die diskreten Gleichungen, die sich aus der Variationsformulierung der FEM ergeben, relativ einfach adjungiert werden können.

Ein potentieller Nachteil der FEM ist, daß das aufzustellende Gleichungssystem umso mehr Lösungsaufwand erfordert, je komplizierter das Gitter wird. Für manche Aufgabenstellungen können komplizierte Gitter aber zwingend sein, wobei dann andere Verfahren nur schwer anwendbar sind. Außerdem wird zur Verwaltung des Gleichungssystem einiger Speicherplatz benötigt, was bei neueren Computern aber weniger problematisch sein sollte. An dieser Stelle soll noch erwähnt werden, daß bei der FEM zwischen h - und p -Modellen unterschieden wird. Je nachdem, ob eine verbesserte Auflösung durch Gitterverfeinerung (h) oder durch die Wahl höhergradiger Basisfunktionen (p) erreicht wird. Modelle, bei denen beides Anwendung findet, bezeichnet man als hp -Modelle (Schwab, 1996 [73]). Die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung mit der FEM setzt sich aus folgenden grundsätzlichen Schritten zusammen (Johnson, 1990 [44]):

- Herleitung der Variationsformulierung für die gegebene Differentialgleichung,
- Diskretisierung der Variationsformulierung,
- Lösung der diskreten Gleichungen (Lösung eines linearen Gleichungssystems)
- Implementierung der Methode auf einem Computer.

Der letzte Punkt beinhaltet u.a. die Generierung eines Gitters und die Aufstellung und Lösung eines linearen Gleichungssystems.

In diesem Kapitel werden nun die Variationsformulierung der (stationären) Advektions-Diffusions-Gleichung hergeleitet, Stabilisierungsverfahren vorgestellt und die Aufstellung und Speicherung des genannten linearen Gleichungssystems und dessen Lösungsverfahren beschrieben. Außerdem wird der verwendete Gittergenerator kurz beschrieben und das Adjungieren der diskreten Gleichungen und die Berechnung partieller Ableitungen auf den Tetraedergittern dargestellt.

3.2 Die Advektions-Diffusions-Gleichung

Advektions-Diffusions Probleme treten in vielen Bereichen der Physik auf – besonders bei der Dynamik von Fluiden und bei Transportproblemen. Für einen beliebigen Tracer $C = C(\mathbf{x}, t)$ ist die Advektions-Diffusions-Gleichung durch

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot C - K \nabla C) = f(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

gegeben. In dieser linearen Gleichung sind t die Zeit, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ein Geschwindigkeitsfeld, K ein Diffusionskoeffizient und f ein Quellterm; $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$.

Mit L_c als charakteristische Länge und U_c als charakteristische Geschwindigkeit kann auf dimensionslose Größen übergegangen werden:

$$t' = \frac{Kt}{L_c^2}, \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L_c}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U_c}, \quad f' = \frac{L_c^2 f}{K}. \quad (3.2)$$

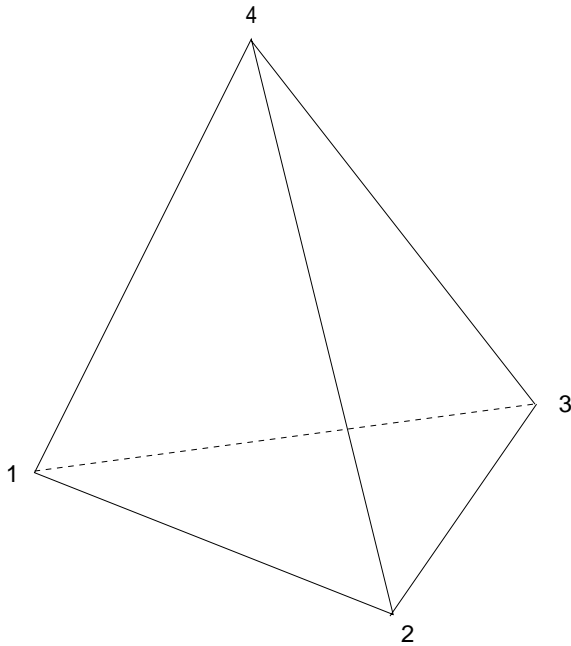


Abbildung 3.1: Als Grundelemente der Gitter werden Tetraeder verwendet.

Daraus folgt

$$\frac{\partial C}{\partial t'} + \nabla' (Pe \cdot \mathbf{u}' \cdot C - \nabla' C) = f' \quad \text{mit} \quad Pe = \frac{U_c L_c}{K}. \quad (3.3)$$

Die Péclet-Zahl Pe ist dabei ein Maß für die Wichtigkeit der verschiedenen Terme der Gleichung (3.1). Bei kleinen Péclet-Zahlen dominiert der diffusive Teil, während bei großen Werten die Advektion stärkeren Einfluß hat. Wenn $Pe \gg 1$ ist, bedeutet das aber nicht, daß Diffusion dann unwichtig ist. Sie kann dann auf kleinskaligeren Bereichen (als die durch L_c gegebenen) wichtig werden, wo lokal $Pe \approx 1$ ist.

Für inkompressible Strömungen ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) und stationäre Zustände vereinfacht sich Gleichung (3.1) zu

$$\mathbf{u} \nabla C - K \Delta C = f(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^3. \quad (3.4)$$

3.3 Die Standard-Galerkin-Methode

Die Standard-Galerkin-Methode (SGM) (Johnson, 1990 [44], Vreugdenhil, 1993 [83]) ist die grundlegende Technik der FEM bei der Behandlung von nicht-symmetrischen Problemen wie der Advektions-Diffusion-Gleichung und basiert auf deren Variationsformulierung. Dabei wird das Skalarprodukt der entsprechenden partiellen Differentialgleichung mit einer sogenannten Testfunktion gebildet. Um Ableitungen höherer Ordnungen zu entfernen, wird zusätzlich noch partiell integriert. Die SGM soll nun auf die stationäre Advektions-Diffusion-Gleichung (3.4) angewendet werden. Als Bedingungen auf dem Rand $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ von Ω

seien

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}) &= C_b(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_1 & \quad (\text{Dirichlet-Bedingungen}) \text{ und} \\ K \frac{\partial C}{\partial n} &= q, & \mathbf{x} \in \Gamma_2 & \quad (\text{Neumann-Bedingungen}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

gegeben. Gleichung (3.4) wird nun mit einer beliebigen Testfunktion ϕ multipliziert und über das Gebiet Ω integriert:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{u} \nabla C - K \Delta C] \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} f \phi \, d\Omega. \quad (3.6)$$

Partielle Integration durch Anwendung der 1. Greenschen Formel führt zu

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \nabla C) \phi + K \nabla C \cdot \nabla \phi] \, d\Omega - K \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial C}{\partial n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} f \phi \, d\Omega. \quad (3.7)$$

In diese Gleichung werden die Randbedingungen (3.5) eingesetzt. Außerdem wird angenommen, daß die Testfunktionen ϕ die homogenen Randbedingungen

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (3.8)$$

erfüllen. Die Variationsformulierung lautet dann:

Finde $C(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$, so daß

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \nabla C) \phi + K \nabla C \cdot \nabla \phi] \, d\Omega = \int_{\Omega} f \phi \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \phi \, d\Gamma \quad (3.9)$$

für alle $\phi(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$. Dabei bezeichnet $H_0^1(\Omega)$ den (Sobolev-)Raum der Funktionen, deren erste räumliche Ableitungen quadrat-integrabel sind. $H_0^1(\Omega)$ ist also ein Hilbert-Raum.

Bei der SGM wird die Variationsformulierung (3.9) durch endlich dimensionale Unterräume von $H_0^1(\Omega)$ approximiert. Die diskrete Formulierung lautet dann:

Finde $C_h \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$ mit

$$V_h = \{\phi \in H_0^1(\Omega) \mid \phi|_{\tau} \in P_1(\tau), \tau \in T_h\}, \quad (3.10)$$

so daß

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \nabla C_h) \phi_h + K \nabla C_h \cdot \nabla \phi_h] \, d\Omega = \int_{\Omega} f \phi_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \phi_h \, d\Gamma \quad (3.11)$$

ist. T_h ist die Unterteilung von Ω in Teilgebiete (finite Elemente) τ . P_1 ist die Menge aller linearen Funktionen, die auf den Elementen definiert sind. Lineare Funktionen zur Approximation sind ausreichend, da in der Variationsformulierung nur erste Ableitungen auftreten. Die approximierten C_h werden definiert durch

$$C_h = \sum_{j=1}^n C_j \cdot \varphi_j(\mathbf{x}) + C_b, \quad (3.12)$$

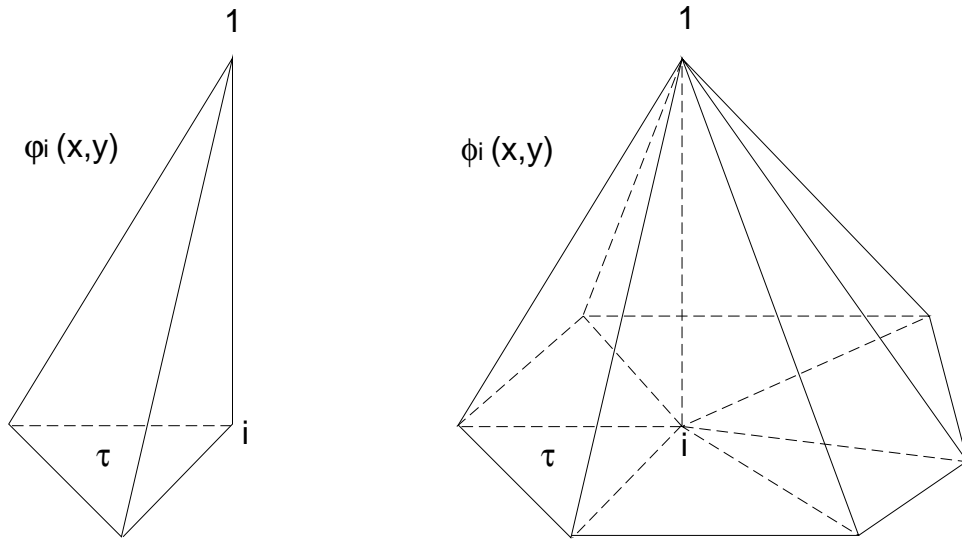


Abbildung 3.2: Lokale Basisfunktion $\varphi_i(x, y)$ des Elements τ und globale Basisfunktion $\phi_i(x, y)$ am Gitterpunkt i am Beispiel eines zweidimensionalen Dreiecks-Gitters.

wobei die $C_b \in H_0^1(\Omega)$ die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen aus Gleichung (3.5) erfüllen. n ist die Anzahl der Punkte des Gitters, das durch die Elemente geknüpft wird. Die φ_i bilden eine endliche Basis $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$, die V_h aufspannt. Sie werden daher als Basisfunktionen bezeichnet und sollen die Randbedingungen (3.8) erfüllen. Damit kann jedes $\phi_h \in V_h$ als Linearkombination

$$\phi_h = \sum_{i=1}^n \phi_{h,i} \cdot \varphi_i \quad (3.13)$$

dargestellt werden.

Stückweise lineare Basisfunktionen auf den Elementen τ können wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathbf{x}) &= a_i x + b_i y + c_i z + d_i \\ \varphi_i(\mathbf{x}_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit $\mathbf{x} \in \tau$. Mit dem Index $i, j = 1, \dots, 4$ werden die vier Eckpunkte des Tetraeders τ bezeichnet. Die globalen ϕ_h werden durch die lokalen Basisfunktionen φ_i substituiert. In der Abbildung (3.2) wird die Bedeutung der lokalen und globalen Basisfunktionen am Beispiel eines zweidimensionalen Gitters illustriert, bei dem Dreiecke als Elemente verwendet werden.

Setzt man in Gleichung (3.11) die Beziehung (3.12) ein und substituiert man die ϕ_h in (3.11) durch die lokalen Basisfunktionen φ_i , erhält man ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen (Laufindex i) mit n Unbekannten (Laufindex j):

$$\sum_{j=1}^n C_j \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j) \varphi_i + K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i] d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \varphi_i d\Gamma - Q_b \quad (3.15)$$

$$\text{mit } Q_b = \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla C_b) \varphi_i + K \nabla C_b \cdot \nabla \varphi_i] d\Omega \quad \text{und } i = 1, 2, \dots, n.$$

Weil in dieser Gleichung keine Ableitungen der Geschwindigkeiten $\mathbf{u} = (u, v, w)$ auftreten, können diese diskontinuierlich durch stückweise konstante Basisfunktionen η_m approximiert werden (Thomasset, 1981 [80]), die im Element τ_m gleich eins sind und sonst verschwinden:

$$\eta_m(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \tau_m, \quad \eta_m(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sonst.} \quad (3.16)$$

Die Geschwindigkeiten sind also konstant auf den Elementen (Tetraedern). Der Zusammenhang zwischen stückweise linearer und stückweise konstanter Approximation der Geschwindigkeiten lautet

$$\begin{aligned} u_m \eta_m(\mathbf{x}_s) &= u_1 \varphi_1(\mathbf{x}_s) + u_2 \varphi_2(\mathbf{x}_s) + u_3 \varphi_3(\mathbf{x}_s) + u_4 \varphi_4(\mathbf{x}_s) \\ &= \frac{1}{4} (u_1 + u_2 + u_3 + u_4). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hierbei soll \mathbf{x}_s der Schwerpunkt des Tetraeders τ_m sein. Die linearen Basisfunktionen φ_i haben im Schwerpunkt gerade den Wert $1/4$. Die Indizes $1, \dots, 4$ beziehen sich auf die vier Eckpunkte des Tetraeders τ_m . Die auf den Elementen konstanten Geschwindigkeiten sind also die Mittelung der Geschwindigkeiten in den Eckpunkten.

Die Gleichung (3.15) kann schließlich in Form eines linearen Gleichungssystems geschrieben werden:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{f}. \quad (3.18)$$

Dabei werden \mathbf{S} als Steifigkeitsmatrix und \mathbf{f} als Gewichtsvektor bezeichnet.

$$\mathbf{c} = (C_1, \dots, C_j, \dots, C_n)^T \quad (3.19)$$

ist der gesuchte Lösungsvektor. Die Einträge der i -ten Zeile der Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} sind die Integrale aus der Summe der linken Seite der Gleichung (3.15):

$$\begin{aligned} (S_{i1}, \dots, S_{ij}, \dots, S_{in}) &= \left(\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_1) \varphi_i + K \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_i] d\Omega, \right. \\ &\quad \dots, \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j) \varphi_i + K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i] d\Omega, \\ &\quad \left. \dots, \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_n) \varphi_i + K \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_i] d\Omega \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Elemente f_i des Gewichtsvektors \mathbf{f} sind gleich der rechten Seite der Gleichung (3.15):

$$\begin{aligned} (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n) &= \left(\int_{\Omega} f \varphi_1 d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \varphi_1 d\Gamma - Q_b, \right. \\ &\quad \dots, \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \varphi_i d\Gamma - Q_b, \\ &\quad \left. \dots, \int_{\Omega} f \varphi_n d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \varphi_n d\Gamma - Q_b \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Das Variationsproblem (3.9) ist somit diskretisiert. Es muß nun das lineare Gleichungssystem (3.18) gelöst werden.

3.4 Die Streamline Upwind Petrov-Galerkin-Methode

Die Standard Galerkin Methode (SGM) für das Advektions-Diffusionsproblem hat ähnliche Eigenschaften und Probleme wie die Methode der finiten Differenzen. So treten im Falle von advektions-dominierten Strömungen – große lokale Péclet-Zahlen – bei beiden Methoden Oszillationen (Wiggles) in den Lösungen auf. Das Modell wird numerisch instabil. Es ist daher naheliegend, daß ebenso wie für die finite Differenzen Methode auch für die FEM Upwind-Techniken entwickelt werden. Die gängigste Technik ist die sogenannte Streamline Upwind Petrov-Galerkin-Methode (SUPG), die zuerst von Brooks und Hughes (1982) [10] hergeleitet wurde.

Um die SUPG näher zu erläutern, wird von Gleichung (3.6) der SGM ausgegangen. Allerdings werden nun andere Testfunktionen $\tilde{\phi}$ verwendet:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{u}\nabla C - K\Delta C] \tilde{\phi} \, d\Omega = \int_{\Omega} f\tilde{\phi} \, d\Omega. \quad (3.22)$$

Die neuen Testfunktionen $\tilde{\phi}$ werden aus den Testfunktionen ϕ der SGM und einer Funktion ψ , in der die ‘Upwind’-Korrekturen stecken, gebildet:

$$\tilde{\phi} = \phi + \psi. \quad (3.23)$$

Die Funktionen ϕ werden kontinuierlich gewählt. Die $\tilde{\phi}$ dürfen aber hinsichtlich der Funktionen ψ diskontinuierlich über die Ränder der Elemente sein. Aus Gleichung (3.22) wird damit

$$\int_{\Omega} [\mathbf{u}\nabla C - K\Delta C] \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} [\mathbf{u}\nabla C - K\Delta C] \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} f\phi \, d\Omega + \int_{\Omega} f\psi \, d\Omega. \quad (3.24)$$

Bei den Termen, die ϕ enthalten, kann wie bei der SGM partiell integriert werden. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\mathbf{u}\nabla C)\phi + K\nabla C \cdot \nabla\phi] \, d\Omega &- K \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial C}{\partial n} \, d\Gamma \\ + \int_{\Omega} [\mathbf{u}\nabla C - K\Delta C] \psi \, d\Omega &= \int_{\Omega} f\phi \, d\Omega + \int_{\Omega} f\psi \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

oder in diskreter Form

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\mathbf{u}\nabla C_h)\phi_h + K\nabla C_h \cdot \nabla\phi_h] \, d\Omega &+ \\ \sum_{\tau \in T_h} \int_{\tau} [\mathbf{u}\nabla C_h - K\Delta C_h] \psi_h \, d\Omega &= \int_{\Omega} f\phi_h \, d\Omega + \sum_{\tau \in T_h} \int_{\tau} f\psi_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} q\phi_h \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Summiert wird über alle Integrale über die Elemente τ (Hughes et al., 1986 [42]).

Die Approximation durch Gleichung (3.26) besteht aus einem in sich konsistentem Standard-Galerkin Teil und einer Summe über die Residuen der Differentialgleichung (3.6) per Element multipliziert mit einer Funktion ψ . Sie ist somit in so fern konsistent, daß die Terme bis zur ersten Ordnung einer Taylor-Entwicklung exakt wiedergegeben werden. Die Residuen approximieren null, da die diskrete Lösung \mathbf{c}_h \mathbf{c} approximiert.

Die Frage ist nun, wie die Funktionen ψ zu wählen sind. Eine mögliche Methode wurde von Brooks und Hughes (1982) [10] vorgestellt. Diese soll hier aber nicht weiter vertieft werden. Ihre Ergebnisse sollen aber näher betrachtet werden. Brooks und Hughes gingen zunächst vom eindimensionalen Problem aus. Bei der Erweiterung auf mehr Dimensionen tritt aber typischerweise eine Cross-Wind Diffusion auf. Daher ist es erforderlich, daß in mehreren Dimensionen die SUPG so angewendet wird, daß ‘Upwinding’ nur in Richtung des lokalen Geschwindigkeitsvektors \mathbf{u} wirkt. Brooks und Hughes leiteten dafür die folgende Funktion her:

$$\psi_h = \frac{h_\tau \xi(Pe_h)}{2 \|\mathbf{u}\|} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h = \chi_\tau \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h. \quad (3.27)$$

Dabei ist h_τ die lokale Gitterweite im Element τ (siehe Bild 3.3) in Richtung der Geschwindigkeit \mathbf{u} , die ja auf dem Element konstant ist. $\xi(Pe_h)$ ist eine dimensionslose Größe, die von der lokalen Péclet-Zahl

$$Pe_h = \frac{\|\mathbf{u}\| h_\tau}{2 K} \quad (3.28)$$

abhängt, für deren Wahl mehrere Möglichkeiten vorgestellt wurden (Hughes et al., 1986 [42], Franca et al., 1992 [23]):

$$\begin{aligned} \xi(Pe_h) &= \coth(Pe_h) - Pe_h^{-1} && \text{‘optimal’} \\ \xi(Pe_h) &= \min\left(\frac{1}{3}Pe_h, 1\right) && \text{‘doppelt asymptotisch’} \\ \xi(Pe_h) &= \max(0, 1 - Pe_h^{-1}) && \text{‘kritisch’}. \end{aligned}$$

Wird ψ_h aus (3.27) in Gleichung (3.26) eingesetzt und berücksichtigt, daß die C_h stückweise linear auf den Elementen τ sind ($\Delta C_h = 0$), folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \nabla C_h) \phi_h + K \nabla C_h \cdot \nabla \phi_h] d\Omega + \sum_{\tau \in T_h} \int_{\tau} (\mathbf{u} \nabla C_h) \chi_\tau \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h d\Omega \\ &= \int_{\Omega} f \phi_h d\Omega + \sum_{\tau \in T_h} \int_{\tau} f \chi_\tau \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_h d\Omega + \int_{\Gamma_2} q \phi_h d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Hughes et al. (1989) [41] haben eine modifizierte Version der SUPG vorgeschlagen, die als Galerkin/least-squares-Methode (GLS) bezeichnet wird. Dabei wird der Term $\nabla \phi_h$ der Funktion ψ_h (Gl. 3.27) durch das Residuum der Advektions-Diffusions-Gleichung (3.4) angewendet auf die Testfunktion ϕ ersetzt. Die Funktion ψ_h lautet dann

$$\psi_h = (\mathbf{u} \nabla \phi_h - K \Delta \phi_h) \chi_\tau = (\mathbf{u} \nabla \phi_h) \chi_\tau. \quad (3.30)$$

Für χ_τ soll

$$\chi_\tau = O(h_\tau / \|\mathbf{u}\|), \quad \text{für große } Pe_h \quad \text{und} \quad \chi_\tau = O(h_\tau^2 / K), \quad \text{für kleine } Pe_h$$

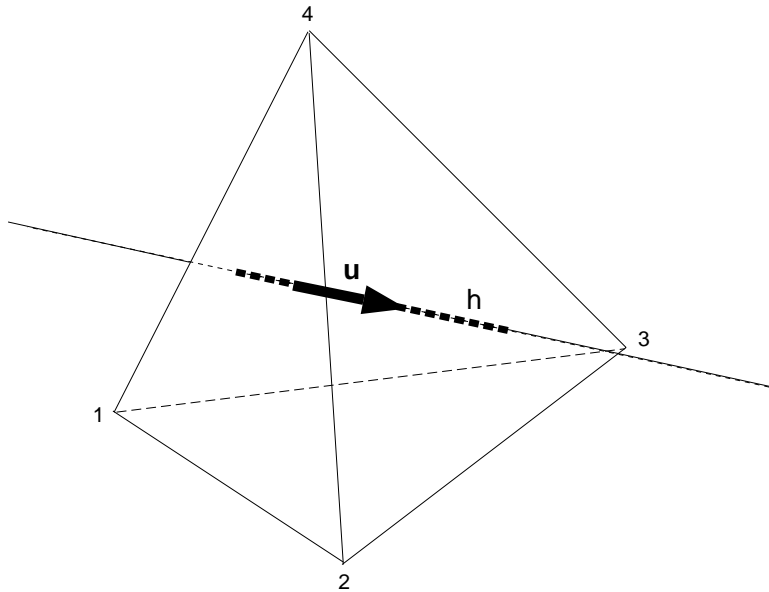


Abbildung 3.3: Die lokale Gitterweite h_τ im Tetraeder τ in Richtung des lokalen Geschwindigkeitsvektors \mathbf{u} ist der Abstand zwischen den beiden Schnittpunkten der Tetraederflächen mit der Geraden, die parallel zum Geschwindigkeitsvektor liegt und durch dem Schwerpunkt des Tetraeders geht.

angenommen werden. Eine mögliche Funktion mit diesen Eigenschaften für stationäre Probleme schlugen Hughes et al. (1989) [41] vor:

$$\chi_\tau = \frac{h_\tau}{2 \|\mathbf{u}\|} \sqrt{\frac{Pe_h^2}{m + Pe_h^2}} \quad (m > 0).$$

Der Wurzelterm stellt eine Funktion dar, die mit wachsender Pe_h gegen eins geht, und zwar umso schneller je kleiner m ist.

Vorteilhaft an der SUPG (bzw. GLS) Methode ist das nahezu optimale ‘Upwinding’ in Richtung des lokalen Geschwindigkeitsvektors und die relativ einfache Implementierung. Von Nachteil ist, daß die Massenmatrix \mathbf{M} (siehe Abschnitt 3.6.4), die allerdings erst bei zeitabhängigen Problemen in den diskreten Gleichungen auftritt, nicht mehr symmetrisch ist und daß die Wahl der Funktion ψ zusätzliche Freiheitsgrade einführt (Vreugdenhil, 1993 [83]).

Bei der Implementierung besteht der eigentliche Aufwand darin, den lokalen Gitterabstand h_τ (Abb. 3.3) im jeweiligen Tetraeder τ zu bestimmen. Dazu werden die Schnittpunkte der Tetraederflächen mit der Geraden bestimmt, die aus dem Schwerpunkt des Tetraeders und dem Geschwindigkeitsvektor gebildet wird. Die Entfernung der beiden Schnittpunkte ist dann gerade gleich h_τ .

3.5 Bubble-Funktionen

Eine neuere Möglichkeit zur Stabilisierung der Standard-Galerkin-Methode (SGM) bietet ein Verfahren, bei dem die SGM mit sogenannten Bubble-Funktionen kombiniert wird (Brezzi et al., 1992 [9]). Dabei stabilisieren die Bubble-Funktionen den Advektions-Operator, ohne daß auf ‘Upwinding’ oder andere numerische Verfahren zurückgegriffen werden muß. Wie gezeigt werden wird, ist diese Methode bei Advektions-Diffusions-Modellen äquivalent zur SUPG-Methode, die im vorherigen Abschnitt vorgestellt wurde.

Für die stationäre Advektions-Diffusions-Gleichung (3.4) mit den Randbedingungen $C = 0$ auf $\partial\Omega$ lautet die Variationsformulierung (siehe Abs. 3.3)

$$(\mathbf{u}\nabla C, \phi) + (K\nabla C, \nabla\phi) = (f, \phi), \quad C, \phi \in H_0^1(\Omega); \quad (a, b) = \int_{\Omega} a \cdot b \, d\Omega. \quad (3.31)$$

Die Standard-Galerkin-Methode liefert dann die diskreten Gleichungen

$$(\mathbf{u}\nabla C_h, \phi_h) + (K\nabla C_h, \nabla\phi_h) = (f, \phi_h), \quad \text{mit} \quad C_h, \phi_h \in V_h \subset H_0^1(\Omega) \quad (3.32)$$

aus (3.10). Sei nun V_h ein Unterraum von $H_0^1(\Omega)$ mit

$$V_h = V_h^b = \{\phi \in H_0^1(\Omega) \mid \phi_{h|\tau} \in P_1(\tau) \oplus B(\tau), \tau \in T_h\}, \quad (3.33)$$

wobei T_h weiterhin die Partition von Ω in die finiten Elemente τ ist. $P_1(\tau)$ ist wieder der Raum der linearen Funktionen, die auf den Elementen τ definiert sind. $B(\tau)$ ist der Raum der beispielsweise quadratischen Bubble-Funktionen $\varphi^b \in B(\tau)$. Diese sollen die folgenden Eigenschaften haben:

$$\begin{aligned} \varphi^b(\mathbf{x}) &> 0 && \text{für alle } \mathbf{x} \in \tau, \\ \varphi^b(\mathbf{x}) &= 0 && \text{für alle } \mathbf{x} \in \partial\tau, \\ \varphi^b(\mathbf{x}_s) &= 1 && \text{im Schwerpunkt } \mathbf{x}_s \text{ von } \tau, \\ \int_{\tau} \varphi^b \, d\Omega &= A_{1\tau} h_{\tau}^2 = A_{3\tau} \int_{\tau} 1 \, d\Omega && \text{und} \quad \|\nabla\varphi^b\|_{0,\tau} = (\nabla\varphi^b, \nabla\varphi^b)^{1/2} = A_{2\tau}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Die Konstanten $A_{1\tau}$, $A_{2\tau}$ und $A_{3\tau}$ sind unabhängig von der lokalen Gitterweite h_{τ} . Die Bubble-Funktionen bilden also eine Art Blase (daher der Name Bubble-Funktionen) über das Element τ . Setzt man in Gleichung (3.32) $\phi_h = \varphi^b(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \tau$ und sonst $\phi_h = 0$ ein, erhält man die sogenannte Bubble-Gleichung

$$(\mathbf{u}\nabla C_h, \varphi^b)_{\tau} + (K\nabla C_h, \nabla\varphi^b)_{\tau} = (f, \varphi^b)_{\tau}. \quad (3.35)$$

Die gesuchte Lösung C_h kann in einen linearen Teil $C_1 \in V_1$ und einen Anteil der Bubble-Funktionen aufgeteilt werden:

$$C_h = C_1 + \sum_{\tau \in T_h} C_b^{\tau} \varphi^b, \quad V_1 = \{\phi \in H_0^1(\Omega) \mid \phi_{h|\tau} \in P_1(\tau), \tau \in T_h\}. \quad (3.36)$$

C_b^{τ} wird als Bubble-Koeffizient bezeichnet. Einsetzen in die Bubble-Gleichung, ergibt dann

$$(\mathbf{u}\nabla C_1, \varphi^b)_{\tau} + C_b^{\tau} (\mathbf{u}\nabla\varphi^b, \varphi^b)_{\tau} + (K\nabla C_1, \nabla\varphi^b)_{\tau} + C_b^{\tau} (K\nabla\varphi^b, \nabla\varphi^b)_{\tau} = (f, \varphi^b)_{\tau}. \quad (3.37)$$

Der zweite und der dritte Term verschwinden, was durch partielle Integration gezeigt werden kann. Dabei wird berücksichtigt, daß \mathbf{u} auf dem Element τ stückweise konstant und somit $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ist (Brezzi et al., 1992 [9]). Wird dann der erste Term auf die rechte Seite gebracht, folgt daraus für den Bubble-Koeffizienten

$$\begin{aligned} C_b^\tau &= \frac{1}{(K\nabla\varphi^b, \nabla\varphi^b)_\tau} (f - \mathbf{u}\nabla C_1, \varphi^b)_\tau = \frac{-1}{K \|\nabla\varphi^b\|_{0,\tau}^2} (\mathbf{u}\nabla C_1 - f, \varphi^b)_\tau \\ &= \frac{-1}{K \|\nabla\varphi^b\|_{0,\tau}^2} (\mathbf{u}\nabla C_1 - f) \Big|_\tau \int_\tau \varphi^b d\Omega. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß \mathbf{u} und ∇C_1 stückweise konstant auf den Elementen τ sind, was hier auch für f angenommen werden soll. Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung (3.32) ein und berücksichtigt, daß $(K\nabla\varphi^b, \nabla\phi_h)_\tau = 0$ (partielle Integration) ist, ergibt sich

$$(\mathbf{u}\nabla C_1, \phi_h) + \sum_{\tau \in T_h} C_b^\tau (\mathbf{u}\nabla\varphi^b, \phi_h)_\tau + (K\nabla C_1, \nabla\phi_h) = (f, \phi_h). \quad (3.39)$$

Brezzi et al. (1992) [9] haben gezeigt, daß man für den zweiten Term schreiben kann:

$$\begin{aligned} C_b^\tau (\mathbf{u}\nabla\varphi^b, \phi_h)_\tau &= \frac{1}{K \|\nabla\varphi^b\|_{0,\tau}^2} (\mathbf{u}\nabla C_1 - f) \Big|_\tau (\mathbf{u}\nabla\phi_h) \Big|_\tau \left(\int_\tau \varphi^b d\Omega \right)^2 \\ &= \frac{A_{1\tau} A_{3\tau} h_\tau^2}{A_{2\tau}^2 K} (\mathbf{u}\nabla C_1 - f, \mathbf{u}\nabla\phi_h)_\tau \\ &= \chi_\tau (\mathbf{u}\nabla C_1 - f, \mathbf{u}\nabla\phi_h)_\tau. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dabei wurden die Eigenschaften der Bubble-Funktionen (Gl. 3.34) ausgenutzt. χ_τ hat demnach die gleiche Größenordnung $O(h_\tau^2/K)$ wie bei der SUPG-Methode. Gleichung (3.39) lautet dann schließlich

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}\nabla C_1, \phi_h) + (K\nabla C_1, \nabla\phi_h) + \sum_{\tau \in T_h} (\mathbf{u}\nabla C_1, \chi_\tau \mathbf{u} \cdot \nabla\phi_h)_\tau \\ = (f, \phi_h) + \sum_{\tau \in T_h} (f, \chi_\tau \mathbf{u} \cdot \nabla\phi_h)_\tau. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dies ist identisch mit Gleichung (3.29), da V_1 aus Gleichung (3.36) gleich V_h aus Gleichung (3.10) ist (C_1 und C_h sind linear auf dem Element). Wobei hier das Integral über den Rand Γ_2 nicht auftritt, weil auf dem Rand $C = 0$ angenommen wurde. Die Methode der Bubble-Funktionen ist also für die stationäre Advektions-Diffusions-Gleichung äquivalent zur SUPG-Methode.

3.6 Das lineare Gleichungssystem

In diesem Abschnitt soll die Aufstellung des linearen Gleichungssystems (3.18) aus Abschnitt 3.3 beschrieben werden. Dort wurden auch die linearen Basisfunktionen (Gl. 3.14)

$$\varphi_i(x, y, z) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i \quad (3.42)$$

eingeführt. Sie sind auf dem Element (Tetraeder) τ_m mit den Eckpunkten $j = 1, 2, 3, 4$ so definiert, daß $\varphi_i = 1$ für $i = j$ und $\varphi_i = 0$ für $i \neq j$ gilt. Die Koeffizienten a_i, b_i, c_i und d_i können durch die Koordinaten \mathbf{x}_j der Eckpunkte j dargestellt werden. Die Basisfunktion $\varphi_1(x, y, z)$ zum Eckpunkt $j = 1$ des Tetraeders τ_m lautet dann

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{\alpha(x - x_3) + \beta(y - y_3) + \gamma(z - z_3)}{6 \cdot V_{Tetra}} \quad (3.43)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= (y_4 - y_3)(z_2 - z_3) + (y_3 - y_2)(z_4 - z_3) \\ \beta &= (x_2 - x_3)(z_4 - z_3) + (x_4 - x_3)(z_3 - z_2) \\ \gamma &= (x_2 - x_3)(y_3 - y_4) + (x_4 - x_3)(y_2 - y_3). \end{aligned}$$

Das Volumen des Tetraeders berechnet sich zu

$$V_{Tetra} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}. \quad (3.44)$$

Mit den Basisfunktionen auf den Tetraedern des generierten Gitters kann nun das lineare Gleichungssystem $\mathbf{S} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{f}$ aufgestellt werden.

3.6.1 Die Steifigkeitsmatrix

Ausgehend von der Gleichung (3.15) bzw. (3.20) der Standard-Galerkin-Methode werden die Einträge S_{ij} der Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} durch

$$S_{ij} = \int_{\tau \in T_h} [(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_j + K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j] d\Omega \quad (3.45)$$

berechnet. Dabei sollen die Randbedingungen zunächst unberücksichtigt bleiben. Da die Geschwindigkeiten Konstanten auf den Elementen sein sollen (Abs. 3.3, Gl. 3.16, 3.17), ist hier $\mathbf{u} = (\mathbf{u}(1) + \mathbf{u}(2) + \mathbf{u}(3) + \mathbf{u}(4))/4$ gerade die Geschwindigkeit im Schwerpunkt des Tetraeders. Das Integral (3.45) verschwindet ($S_{ij} = 0$), wenn die Gitterpunkte i und j nicht gemeinsam in einem Element liegen. Es wird berechnet als die Summe der Integrale über den Elementen τ_m , die i und j beinhalten:

$$S_{ij} = \sum_{\tau} \int_{\tau} [(\mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_i) \varphi_j + K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j] d\Omega = \sum_{\tau} E_{ij}^S, \quad (3.46)$$

wobei mit $i, j = 1, 2, 3, 4$ die 4 Eckpunkte numeriert sind. Die 4×4 -Matrizen \mathbf{E}^S werden als Elementsteifigkeitsmatrizen bezeichnet. Die φ_i und φ_j sind dabei die jeweils auf dem Element lokal definierten Basisfunktionen aus Gleichung (3.43).

Die Integrale der Elementsteifigkeitsmatrizen können numerisch berechnet werden. Für eine beliebige Funktion $g(x, y, z)$ ist dann

$$\int_{\tau} g(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{k=1}^n \omega_k g(\tilde{\mathbf{x}}_k) V_{Tetra}^T. \quad (3.47)$$

Die Punkte $\tilde{\mathbf{x}}_k$ sind die Stützstellen im Element und ω_k die zugehörigen Gewichte; n ist die Anzahl der Stützstellen. Stützstellen und Gewichte für Tetraeder findet man beispielsweise bei Zienkiewicz (1984) [96] oder Hammer et al. (1956) [37]. Für Polynome ersten Grades ist der Schwerpunkt \mathbf{x}_s des Tetraeders mit dem Gewicht $\omega_s = 1$ die einzige Stützstelle. Für die linearen Basisfunktionen gilt daher $\varphi_i(\mathbf{x}_s) = 0.25$. Damit kann die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen vereinfacht werden. Mit den Basisfunktionen aus Gleichung (3.43) gilt dann

$$E_{ij}^S = \left[\frac{1}{4}(ua_i + vb_i + wc_i) + K(a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j) \right] V_{Tetra}^T. \quad (3.48)$$

Die so berechnete Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} ist nur schwach besetzt, so daß sie in einem platzsparenden Format gespeichert werden kann. Sie ist aufgrund des Advektionsterms unsymmetrisch.

3.6.2 Der Gewichtsvektor

Die Aufstellung des Gewichtsvektors \mathbf{f} geschieht analog zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} . Wiederum von Gleichung (3.15) bzw. (3.21) ausgehend, ergibt sich

$$f_i = \int_{\tau \in T_h} f \varphi_j \, d\Omega = \sum_{\tau} \int_{\tau} f \varphi_j \, d\Omega = \sum_{\tau} E_i^f, \quad (3.49)$$

wobei \mathbf{E}^f als Elementgewichtsvektor bezeichnet wird. Auch hier werden die Randbedingungen zunächst nicht berücksichtigt. Mit $\varphi_i(\mathbf{x}_s) = 1/4$ können die Elementgewichtsvektoren wie folgt berechnet werden:

$$E_i^f = \int_{\tau} f \varphi_j \, d\Omega = \frac{1}{4} f V_{Tetra}^T. \quad (3.50)$$

3.6.3 Berücksichtigung der Randbedingungen

Bis zu diesem Punkt wurden in der Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} und dem Gewichtsvektor \mathbf{f} noch nicht die Terme der Randbedingungen der Gleichung (3.15) berücksichtigt. Durch die Randbedingungen werden \mathbf{S} und \mathbf{f} modifiziert. Eine übersichtliche Darstellung dazu findet man bei Behrens (1996) [6]. Für die verschiedenen Arten von Randbedingungen ergeben sich folgende Modifizierungen:

- **Homogene Dirichlet-Bedingungen:** In der Steifigkeitsmatrix werden die Zeilen und Spalten gleich null gesetzt, deren Index zu einem Randpunkt gehört. Das entsprechende Diagonalelement wird aber gleich eins gesetzt. Der zugehörige Wert im Gewichtsvektor wird ebenfalls auf null gesetzt. Falls \mathbf{S} symmetrisch war, bleibt die Symmetrie auch erhalten.
 - **Inhomogene Dirichlet-Bedingungen:** In diesem Fall werden nur die Zeilen, die einem Randpunkt entsprechen, gleich null und das Diagonalelement gleich eins gesetzt. Der Eintrag im Gewichtsvektor wird gleich dem Randwert gesetzt. Falls \mathbf{S} symmetrisch war, wird sie nun leicht unsymmetrisch.
- Dirichlet-Randbedingungen sind in Gleichung (3.15) durch den Term Q_b dargestellt.

- Homogene Neumann-Bedingungen: Weder die Steifigkeitsmatrix noch der Gewichtsvektor werden verändert, da das Integral über das Randstück Γ_2 in Gleichung (3.15) verschwindet ($q = 0$).
- Inhomogene Neumann-Bedingungen: Die Steifigkeitsmatrix wird in diesem Fall nicht verändert, aber in den Gewichtsvektor geht nun das Integral

$$\int_{\Gamma_2} q \varphi_i \, d\Gamma \quad (3.51)$$

aus Gleichung (3.15) ein. Der Beitrag dieses Integrals muß zu dem entsprechenden Element des Gewichtsvektors \mathbf{f} addiert werden. Es wird ebenfalls numerisch berechnet, wobei das Integrationsgebiet ein Dreieck κ (die Randfläche eines Tetraeders der am Rand des Modellgebiets liegt) mit der Fläche A_κ ist. Für beliebige Polynome $g(\mathbf{x})$ lautet die Formel zur Berechnung:

$$\int_{\kappa} g(\mathbf{x}) \, d\Gamma = \sum_{k=1}^n \omega_k g(\bar{\mathbf{x}}_k) A_\kappa. \quad (3.52)$$

Für lineare Polynome g ist $n = 1$ und $\omega = 1$, wobei der Schwerpunkt des Dreiecks κ die einzige Stützstelle ist. Bei quadratischen Polynomen werden die drei seitenhalbierenden Punkte des Dreiecks benötigt. Die Gewichte betragen hier $\omega_k = 1/3$ (Zienkiewicz, 1984 [96], Johnson, 1990 [44]).

3.6.4 Die Massenmatrix

Die Massenmatrix \mathbf{M} ist symmetrisch und positiv definit und wird durch

$$M_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) := \sum_{\tau} \int_{\tau} \varphi_i \cdot \varphi_j \, d\Omega = \sum_{\tau} E_{ij}^M \quad (3.53)$$

berechnet. Man kann leicht zeigen, daß für die Elementmassenmatrizen \mathbf{E}^M

$$\mathbf{E}^M = \int_{\tau} \varphi_i \cdot \varphi_j \, d\Omega = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot V_{Tetra}^{\tau} \quad (3.54)$$

gilt. Beispielrechnungen für ein- und zweidimensionale Gitterelemente findet man bei Schwarz (1991) [74].

3.6.5 Speicherung der Matrizen

Die Matrizen, die bei der FEM auftreten (z.B. Steifigkeits- oder Massenmatrix), sind nur spärlich besetzt. Die Anzahl der Matrixeinträge pro Zeile, die nicht Null sind, ist klein. Denn in der i -ten Zeile treten nur Einträge in den Spalten i und j auf, wobei mit j die Nachbarn des Gitterpunktes i gemeint sind. Für genügend große Matrizen lohnt es sich daher, spezielle sparsame Speicherformate zu verwenden. Hier wird ein kompaktes spaltenweises Format

benutzt, weil dieses vom Lösungsverfahren für das lineare Gleichungssystem (siehe nächster Abschnitt) akzeptiert wird. Seien n die Zahl der Gitterpunkte und nza die Zahl der nicht verschwindenden Matrixeinträge, dann werden für dieses Speicherformat zwei Arrays der Länge nza und ein Array der Länge $n + 1$ benötigt:

1. Werte-Array $S(1 \dots nza)$ für die Matrixeinträge,
2. Zeilen-Array $si(1 \dots nza)$ für die Zeilenpositionen der Einträge und
3. Spalten-Array $sj(1 \dots n + 1)$.

Die Zeilenindizes und Werte der Matrixeinträge ungleich Null der ersten Spalte werden in aufsteigender Reihenfolge in den Arrays si und S gespeichert. Dann geschieht das Gleiche für die zweite Zeile etc.. Der erste Eintrag im Spalten-Array ist 1 ($sj(1) = 1$). Der k -te Eintrag ist gleich $sj(k - 1)$ plus der Anzahl der nicht verschwindenden Matrixeinträge der k -ten Zeile, so daß $sj(n + 1) = nza + 1$ ist. Als Beispiel soll die folgende 5×5 Matrix dienen:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 & s_{14} & 0 \\ 0 & s_{22} & s_{23} & 0 & s_{25} \\ 0 & s_{32} & s_{33} & s_{34} & 0 \\ s_{41} & 0 & s_{43} & s_{44} & 0 \\ 0 & s_{52} & 0 & 0 & s_{55} \end{pmatrix}.$$

Die drei Arrays haben dann die Einträge:

$$\begin{aligned} S &= (s_{11} \ s_{41} \ s_{22} \ s_{32} \ s_{52} \ s_{23} \ s_{33} \ s_{43} \ s_{14} \ s_{34} \ s_{44} \ s_{25} \ s_{55}) \\ si &= (1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 5 \ 2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5) \\ sj &= (1 \ 3 \ 6 \ 9 \ 12 \ 14). \end{aligned}$$

Bei symmetrischen Matrizen kann noch mehr Platz gespart werden. Es genügt dann, nur die untere oder obere Diagonalmatrix mit der Diagonalen zu speichern.

Will man mehrere Matrizen speichern reicht es aus, einmal si und sj und die jeweiligen Werte-Arrays aufzustellen. Um die Matrizen später ohne weiteren Rechenaufwand transponieren zu können, wird ein weiteres Array st der Länge nza zusammen mit den si und sj aufgestellt. In diesem wird festgehalten, an welchen Positionen k des Werte-Arrays S sich die Einträge der transponierten Matrix \mathbf{S}^T befinden.

3.7 Lösungsverfahren für das lineare Gleichungssystem

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems (3.18) wird ein GMRES-Verfahren (Generalized Minimal RESidual, Saad und Schultz, 1986 [65], Barrett et al., 1994 [3]) verwendet, das für unsymmetrische Systeme geeignet ist. GMRES berechnet eine Folge von orthogonalen Vektoren und kombiniert diese durch eine Least-Squares-Lösung. Dies erfordert relativ viel Speicherplatz, da alle Vektoren gespeichert werden müssen. Um den benötigten Speicherplatz und die erforderlichen Iterationen nicht zu groß werden zu lassen, wird die Zahl der Vektoren, die gespeichert werden können, begrenzt. Auf Grund dessen werden 'Restart'-Versionen des GMRES-Verfahrens verwendet. Tieferen Einblick in die Theorie des Verfahrens findet man bei Saad und Schultz (1986) [65]. Der Algorithmus der GMRES-Methode mit Prädiktionierer \mathbf{P} (siehe unten) lautet:

1. Wähle “initial guess” \mathbf{c}_0 .
2. Berechne $\mathbf{Pr}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{Sc}_0$ und $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0 / \|\mathbf{r}_0\|$
3. Iteriere: for $j = 1, 2, \dots, m$
 - berechne ω aus $\mathbf{P}\omega = \mathbf{S}\mathbf{v}_j$
 - for $i = 1, 2, \dots, j$
 - $h_{i,j} = (\omega, \mathbf{v}_i)$
 - $\omega = \omega - h_{i,j}\mathbf{v}_i$
 - $h_{j+1,j} = \|\omega\|$ und $\mathbf{v}_{j+1} = \omega / h_{j+1,j}$
4. Formuliere die approximierte Lösung:
 - $\mathbf{c}_m = \mathbf{c}_0 + \mathbf{y}_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{y}_2\mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{y}_m\mathbf{v}_m$, wobei $\mathbf{y}_m \|\beta\mathbf{e}_1 - \mathbf{H}\mathbf{y}\|$ minimiert. $\beta = \|\mathbf{r}_0\|$, \mathbf{e}_1 ist die erste Spalte der $m \times m$ Einheitsmatrix. Die Einträge des oberen $m \times m$ triangularen Teils der Matrix \mathbf{H} (obere Hessenberg-Matrix) sind die $h_{i,j}$, die übrigen Einträge verschwinden.
5. Restart: Berechne $\mathbf{r}_m = \mathbf{f} - \mathbf{Sc}_m$; ist \mathbf{c}_m genau genug, dann stop, sonst setze $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_m$ und $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_m / \|\mathbf{r}_m\|$ und setze mit 2. fort.

Mit Hilfe von Prädiktionierung (siehe z.B. Barrett et al., 1994 [3]) soll die Konvergenzrate einer iterativen Methode (hier: GMRES) verbessert werden. Die Konvergenzrate hängt von den spektralen Eigenschaften der Matrix \mathbf{S} ab. Mit der Prädiktionierungsmatrix \mathbf{P} soll das zu lösende lineare Gleichungssystem so transformiert werden, daß das transformierte System zwar die gleiche Lösung aber bessere spektrale Eigenschaften als das Ursprungssystem hat, was heißt, daß weniger Iterationsschritte bis zur Konvergenz notwendig sind. Wenn die Matrix des linearen Systems die Einheitsmatrix \mathbf{E} ist, konvergiert jedes Iterationsverfahren in einem Schritt. Die Prädiktionierungsmatrix \mathbf{P} soll also leicht zu invertieren sein, und es soll $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S} \approx \mathbf{E}$ gelten. Je nachdem ob \mathbf{S} von rechts oder von links mit \mathbf{P}^{-1} multipliziert wird, spricht man von rechter oder linker Prädiktionierung, und als beidseitige Prädiktionierung wird der Fall bezeichnet, wenn \mathbf{P} multiplikativ in $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ aufgespaltet wird:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{c} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f} && \text{(linke Prädiktionierung)} \\
 \mathbf{S} \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{P} \mathbf{c}) &= \mathbf{f} && \text{(rechte Prädiktionierung)} \\
 \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P}_2^{-1} (\mathbf{P}_2 \mathbf{c}) &= \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{f} && \text{(beidseitige Prädiktionierung)}.
 \end{aligned}$$

Bei der einfachsten Prädiktionierung ist \mathbf{P} eine Diagonalmatrix, wobei die Diagonalelemente gleich der Diagonalelemente der Matrix \mathbf{S} sind. Dieses Verfahren wird als Jacobi-Prädiktionierung bezeichnet. In dieser Arbeit wird eine ILU-Faktorisierung (Incomplete LU-Factorization, Barrett et al., 1994 [3]) als Prädiktionierer verwendet. Die Prädiktionierungsmatrix ist hier in der Form $\mathbf{P} = \mathbf{LU}$ gegeben und approximiert die Matrix \mathbf{S}

$$\mathbf{P} = \mathbf{LU} = \mathbf{S} + \mathbf{R}. \quad (3.55)$$

Dabei ist \mathbf{L} eine untere und \mathbf{U} eine obere trianguläre Matrix. \mathbf{R} ist eine Restmatrix. Wenn sie mit der Nullmatrix identisch ist, liegt eine vollständige Zerlegung (Faktorisierung) von \mathbf{S} in \mathbf{L} und \mathbf{U} vor. Verschwindet \mathbf{R} nicht so ist die Faktorisierung unvollständig. Je besser die Approximation ist, desto weniger Iterationen braucht das Lösungsverfahren bis es konvergiert. Umso aufwendiger wird dann aber die Berechnung von \mathbf{L} und \mathbf{U} und umso mehr

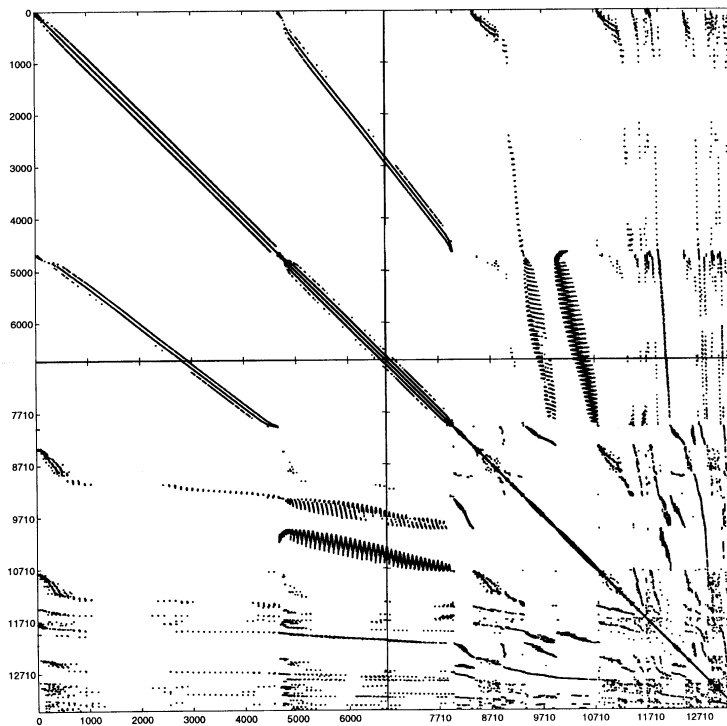


Abbildung 3.4: Beispiel für die Struktur einer Steifigkeitsmatrix. Die nicht-verschwindenden Einträge wurden schwarz gedruckt. Die Dimension der dargestellten Matrix beträgt 13431.

Speicherplatz wird benötigt. Die Reduzierung der Konvergenzrate durch Präkonditionierung muß also durch einen größeren Speicherbedarf erkauft werden.

Abschließend soll noch bemerkt werden, daß der zusätzliche Speicherbedarf begrenzt werden kann, indem man bei der Aufstellung der Matrix des zu lösenden Gleichungssystems darauf achtet, daß die nicht verschwindenden Einträge möglichst nahe an der Hauptdiagonalen liegen. Es werden dann bei der Berechnung von \mathbf{L} und \mathbf{U} weniger Füllelemente (siehe Barrett et al., 1994 [3]) und damit weniger Speicherplatz benötigt. Dazu müßte aber die Durchnumerierung der Gitterpunkte optimiert werden, was bei einem dreidimensionalen unstrukturierten Tetraedergitter recht schwierig sein wird. Das eine optimierte Numerierung der Gitterpunkte gerade bei unstrukturierten Gittern sinnvoll sein kann, zeigt Bild (3.4). Dort ist die Struktur der Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} dargestellt, die zu dem Gitter gehört, das in Kapitel 4 verwendet wird. Wie man sieht, streuen die nicht-verschwindenden Einträge sehr weit um die Hauptdiagonale. Im oberen, linken Viertel der Matrix bilden die Punkte mit niedrigen Nummern zwei Bänder an Nebendiagonalen. Dies hängt damit zusammen, daß die oberen Schichten des betreffenden Gitters relativ strukturiert sind. Die unstrukturierten Eigenschaften des Gitters treten vor allem in den unteren Schichten bei den Punkten mit hohen Nummern auf. Die entsprechenden Einträge in der Steifigkeitsmatrix streuen stark und liegen teilweise sehr weit von der Hauptdiagonalen entfernt. Daraus folgt eine sehr große Bandbreite.

Damit zeigt sich, daß deutlich Speicherkapazität gespart werden kann, wenn es mit einer verbesserten Durchnummerierung der Gitterpunkte gelänge, die nicht-verschwindenden Einträge der Matrix dichter an der Hauptdiagonalen zu plazieren und somit die Bandbreite zu verkleinern.

3.8 Gittergenerierung

Zur Generierung der Gitter wird der IBG-Gittergenerator (Intersection-Based Grid Generator) von I. Schmelzer vom Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS) verwendet. Er arbeitet mit einer kombinierten Octree-/Delauny-Methode. Eine detaillierte Darstellung des IBG-Generators findet man bei Schmelzer (1993 und 1995) [69, 70]. Sein Algorithmus besteht aus den folgenden Schritten:

1. Octree-Methode mit anisotroper anwendungsbezogener Verfeinerung,
2. Randanpassungs-Prozedur; Berechnung der Schnittpunkte des Randes mit dem (Octree-)Gitter aus 1.,
3. Delauny-Methode; Berechnung des Delauny-Gitters für den Satz an Gitterpunkten aus 2.,
4. Korrektur des Randes; suchen und korrigieren von Unterschieden zwischen dem in 3. berechneten Gitter und der Geometriebeschreibung.

Der Anwender muß die Arbeitsweise des Generators bei der Aufstellung des Ausgangsatzes an Datenpunkten, aus denen das Gitter generiert werden soll, berücksichtigen und ein entsprechendes Interface schreiben. Dabei wird zunächst ein reguläres rechtwinkliges Tensorprodukt-Gitter (Coarse Grid) aus drei eindimensionalen Gittern der drei Raumrichtungen kreiert. So erhält man einen Kasten mit einem Rohgitter, der das zu betrachtende Ozeangebiet (Modellgebiet) enthält. Im zweiten Schritt werden dann die Topographiedaten des Ozeans in Form einer charakteristischen Funktion $f(x, y, z) = z - e(x, y)$ definiert, wobei $e(x, y)$ angibt, wie tief der Ozean unter der Position (x, y) ist. Mit dieser Funktion wird der Kasten in zwei Teile zerlegt: In das Modellgebiet, in welches im weiteren Verlauf das Gitter generiert wird, und einem Rest, der nicht weiter von Interesse ist. Das generierte Modellgitter besteht dann letztlich aus n Gitterpunkten und m Tetraedern (Elementen). Dabei ist $m > n$, was klar wird, wenn man bedenkt, daß ein Quader in 6 Tetraeder zerfällt. Betrachten wir nun die einzelnen Punkte des Algorithmus etwas genauer.

3.8.1 Die Octree-Methode

Zur isotropen oder anisotropen Verfeinerung des Rohgitters wird eine Variante der sogenannten (Quadtree-/)Octree-Methode verwendet. Während bei der Standard-Octree-Methode die Verfeinerungskriterien auf die Elemente angewendet werden, werden sie hier auf deren Kanten angewendet. Dieses bringt den Vorteil, daß im resultierendem Gitter die Gesamtzahl der Gitterpunkte kleiner bleibt als bei der Standardmethode.

3.8.2 Anpassen des Randes

Im zweiten Schritt wird der Rand des zu triangulierenden Gebiets (die charakteristische Funktion) in das Octree-Gitter eingebettet. Um nun die Randgitterpunkte zu erhalten, werden zunächst die Schnittpunkte und -flächen der Octree-Elemente (Quader) mit den Rändern berechnet. Mit einem gefundenen Schnittpunkt kann wie folgt weiterverfahren werden:

- Der nächstgelegene reguläre Gitterpunkt wird zum Schnittpunkt hin verschoben.
- Der Schnittpunkt wird als neuer Gitterpunkt eingefügt.
- Es wird weitergehend verfeinert.
- Der Schnittpunkt wird ignoriert.

Dabei sollte aber die Zahl der zuzufügenden Gitterpunkte minimal bleiben. Andererseits sind Gitterpunkte zu vermeiden, an denen relativ viele Kanten zusammentreffen (Vermeidung von ‘Spinnen’-Punkten).

3.8.3 Die Delauny-Methode

Zur Berechnung von Delauny-Gittern sind verschiedene Algorithmen bekannt, die auf den Watson-Algorithmus basieren (siehe z.B. Filipiak, 1996 [19]). Eine positive Eigenschaft der Delauny-Methode ist, daß sich innerhalb der einen Tetraeder umschreibenden Kugel keine weiteren Gitterpunkte befinden.

Hier wird eine modifizierte Version des Watson-Algorithmus angewendet. Das Delauny-Gitter wird aus dem (dem Rand angepaßten) Octree-Gitter generiert. Davon ausgehend werden neue Punkte iterativ in das Delauny-Gitter eingefügt. Jeder Tetraeder des Delauny-Gitters hat ein Volumen größer als ein gewisses ε .

3.8.4 Korrektur des Randes

Ein Problem der Delauny-Methode ist, daß das resultierende Gitter nicht zwangsläufig mit der Randbeschreibung übereinstimmt. Es ist möglich, daß einzelne Tetraeder den Rand schneiden. Für die Korrektur solcher Gitterfehler, gibt es verschiedene Verfahren, von denen aber keines ideal ist. Am geeignetsten erscheint es noch, den Ausgangssatz an Gitterpunkten für das Octree-Gitter mit anschließender Anpassung an den Rand so aufzustellen, daß im Delauny-Gitter möglichst wenig Gitterfehler auftreten.

3.9 Berechnung partieller Ableitungen

Bei der Berechnung der geostrophischen Geschwindigkeiten (u, v) im Abschnitt 2.4.2 – wie auch bei der Bestimmung anderer Modellparameter – treten partielle Ableitungen auf, wobei deren Werte an den Gitterpunkten (den Eckpunkten der Tetraeder) benötigt werden. In diesem Abschnitt werden nun zwei Methoden vorgestellt, mit deren Operatoren partielle Ableitungen auf dreidimensionalen unstrukturierten Gittern bestimmt werden können. Sie sollen im Folgendem als Normalen-Verfahren und als Massenmatrix-Verfahren bezeichnet werden.

Das Normalen-Verfahren

Das Normalen-Verfahren basiert auf einer Methode von Akima (1984) [1] für zweidimensionale Gitter, die u.a. auch von Behrens (1996) [6] angewandt wurde. Das für dreidimensionale Gitter erweiterte Verfahren lautet:

Sei f eine beliebige Funktion mit dem Wert $f_i = f(x_i, y_i, z_i)$ am Punkt i . Gesucht sind nun die partiellen Ableitungen von f_i in Richtung der drei Raumrichtungen. Zunächst werden für jeden Tetraeder m die sechs Vierervektoren

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{pmatrix} r_{x,ij} \\ r_{y,ij} \\ r_{z,ij} \\ r_{f,ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \\ f_i - f_j \end{pmatrix} \quad \text{mit } i \neq j \quad (3.56)$$

berechnet, wobei $i, j = 1, 2, 3, 4$ die Eckpunkte des Tetraeders m sind. Aus diesen wird das 4D-Vektorprodukt (4D-Kreuzprodukt)

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_{ij} \widehat{\mathbf{r}}_{ik} \mathbf{r}_{il} \quad \text{mit } i \neq j \neq k \neq l \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, 4) \quad (3.57)$$

gebildet, das für beliebige Vierervektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ wie folgt definiert wird:

$$\mathbf{s} = \widehat{\mathbf{abc}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_f \\ a_x & a_y & a_z & a_f \\ b_x & b_y & b_z & b_f \\ c_x & c_y & c_z & c_f \end{vmatrix} \quad (3.58)$$

($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_f$ sind Einheitsvektoren). Es gilt dann $\mathbf{s} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und $\widehat{\mathbf{abc}} = -\widehat{\mathbf{bac}}$.

Die vierte Komponente der \mathbf{s}_i soll nicht negativ sein ($s_{f,i} \geq 0$). Für jeden Eckpunkt i eines Elementes m gibt es einen Vektor \mathbf{s}_i . Durch Mittelung der vier \mathbf{s}_i des Tetraeders m wird nun ein 4D-Normalenvektor \mathbf{n}_m berechnet:

$$\mathbf{n}_m = \frac{1}{4} (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 \mathbf{s}_i. \quad (3.59)$$

Der 4D-Normalenvektor $\tilde{\mathbf{n}}_i$ am Gitterpunkt i ergibt sich aus dem gewichteten Mittelwert der Normalenvektoren \mathbf{n}_m der Elemente m , die den Punkt i beinhalten:

$$\tilde{\mathbf{n}}_i = \sum_{m, \mathbf{x}_i \in m} \omega_{m,i} \cdot \mathbf{n}_m \cdot \left(\sum_{m, \mathbf{x}_i \in m} \omega_{m,i} \right)^{-1}. \quad (3.60)$$

Mit den Gewichtungsfaktoren $\omega_{m,i}$ wird berücksichtigt, daß die Tetraeder unterschiedliche Öffnungswinkel haben. Akima (1984) [1] hat gezeigt, daß bei zweidimensionalen Dreiecksgittern, die partiellen Ableitungen genauer werden, wenn die Normalenvektoren mit den Öffnungswinkeln des Dreiecke gewichtet werden. Der Gewichtungsfaktor $\omega_{m,i}$ am Eckpunkt i des Tetraeders m wird hier durch

$$\omega_{m,i} = \frac{1}{3} (\sin \alpha_i + \sin \beta_i + \sin \gamma_i)$$

mit den Winkeln $\alpha_i = \sphericalangle(\tilde{\mathbf{r}}_{ij}, \tilde{\mathbf{r}}_{ik})$, $\beta_i = \sphericalangle(\tilde{\mathbf{r}}_{ij}, \tilde{\mathbf{r}}_{il})$, $\gamma_i = \sphericalangle(\tilde{\mathbf{r}}_{ik}, \tilde{\mathbf{r}}_{il})$ definiert ($\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$). Aus dem 4D-Normalenvektor $\tilde{\mathbf{n}}_i$ (Gl. 3.60) kann nun der Gradient von f am Punkt i mit den Koordinaten \mathbf{x}_i berechnet werden. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_i) &= -\frac{\tilde{n}_{x,i}}{\tilde{n}_{f,i}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_i) &= -\frac{\tilde{n}_{y,i}}{\tilde{n}_{f,i}} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_i) &= -\frac{\tilde{n}_{z,i}}{\tilde{n}_{f,i}}.\end{aligned}\quad (3.61)$$

Allgemein kann somit für eine Funktion mit den Werten f_i an den Gitterpunkten i geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f} = \mathbf{G}_x^n \cdot \mathbf{f}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{f} = \mathbf{G}_y^n \cdot \mathbf{f}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{f} = \mathbf{G}_z^n \cdot \mathbf{f}. \quad (3.62)$$

Es müssen also bei der Initialisierung des Modells nur einmal die Matrizen \mathbf{G}_x^n , \mathbf{G}_y^n und \mathbf{G}_z^n aufgestellt werden, die die gleiche Struktur wie die Steifigkeitsmatrix haben und somit genauso spärlich besetzt sind.

Das Massenmatrix-Verfahren

Beim Massenmatrix-Verfahren werden die partiellen Ableitungen über die Massenmatrix \mathbf{M} bzw. die Basisfunktionen φ_i bestimmt. Für eine beliebige Funktion f mit den Werten f_i an den Gitterpunkten i wird beispielsweise für die partielle Ableitung nach x die Beziehung

$$\alpha_i \underbrace{(\varphi_i, \varphi_j)}_{M_{ij}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f_i, \varphi_j \right) = \left(f_i \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i, \varphi_j \right) = f_i (a_i, \varphi_j) \quad (3.63)$$

benutzt. Dabei wird die Gleichung (3.14) für die Basisfunktionen berücksichtigt. Der Koeffizient α_i entspricht gerade dem Wert der Ableitung $\partial f_i / \partial x$ an der Stelle i . Die Beziehungen für die partiellen Ableitungen nach x und y sehen analog aus. Der Gradient ∇f kann demnach mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f} &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}_x^m \cdot \mathbf{f} = \mathbf{G}_x^m \cdot \mathbf{f}, & \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{f} &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}_y^m \cdot \mathbf{f} = \mathbf{G}_y^m \cdot \mathbf{f}, \\ \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{f} &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}_z^m \cdot \mathbf{f} = \mathbf{G}_z^m \cdot \mathbf{f}\end{aligned}\quad (3.64)$$

bestimmt werden, wobei \mathbf{M}^{-1} die Inverse der Massenmatrix \mathbf{M} (Gl. 3.53) ist. Die Matrizen $\tilde{\mathbf{G}}_x^m$, $\tilde{\mathbf{G}}_y^m$ und $\tilde{\mathbf{G}}_z^m$ werden wiederum aus Elementmatrizen $\mathbf{E}\mathbf{G}_{x,y,z}^m$ gebildet:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{x,ij}^m &= \sum_{\tau_m} \mathbf{E}G_{x,ij}^m = \sum_{\tau_m} \int_{\tau_m} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i \cdot \varphi_j \, d\Omega = \sum_{\tau_m} \frac{1}{4} a_i V_{Tetra}^\tau \\ \tilde{G}_{y,ij}^m &= \sum_{\tau_m} \mathbf{E}G_{y,ij}^m = \sum_{\tau_m} \int_{\tau_m} \frac{\partial}{\partial y} \varphi_i \cdot \varphi_j \, d\Omega = \sum_{\tau_m} \frac{1}{4} b_i V_{Tetra}^\tau \\ \tilde{G}_{z,ij}^m &= \sum_{\tau_m} \mathbf{E}G_{z,ij}^m = \sum_{\tau_m} \int_{\tau_m} \frac{\partial}{\partial z} \varphi_i \cdot \varphi_j \, d\Omega = \sum_{\tau_m} \frac{1}{4} c_i V_{Tetra}^\tau.\end{aligned}\quad (3.65)$$

Wie bei dem Normalen-Verfahren müssen also zu Beginn drei Matrizen initialisiert werden. Zusätzlich muß noch die Massenmatrix aufgestellt und invertiert werden. Die invertierte Massenmatrix \mathbf{M}^{-1} ist im allgemeinen nicht mehr spärlich besetzt, was dann auch für die Matrizen \mathbf{G}_x^m , \mathbf{G}_y^m und \mathbf{G}_z^m gilt. Die Operatoren $\mathbf{G}_{x,y,z}^m$ haben also einen deutlich größeren Speicherbedarf als die entsprechenden Operatoren $\mathbf{G}_{x,y,z}^n$ aus dem Normalen-Verfahren.

Im weiteren Verlauf werden dort, wo die Operatoren beider Verfahren alternativ zueinander anwendbar sind, die oberen Indizes m und n an den Matrizen $\mathbf{G}_{x,y,z}^{m,n}$ weggelassen.

3.10 Die adjungierten Gleichungen

Zu Beginn dieses Kapitels wurde gesagt, daß bei Verwendung der FEM relativ einfach adjungiert (invertiert) werden kann. Die soll an der Advektions-Diffusions-Gleichung (2.6) und der Kontinuitätsgleichung (2.4) vorgeführt werden. Dazu müssen die beiden Gleichungen nach den unabhängigen und abhängigen Parametern (Gl. 2.7 und 2.8) partiell differenziert werden. Adjungiert werden im Folgendem die diskreten Formen der Modellgleichungen.

Beginnen wir mit der Advektions-Diffusions-Gleichung (2.6) für Temperatur T und Salzgehalt S . Ihre diskrete Form führt auf das Gleichungssystem (siehe Gl. 3.18):

$$\mathbf{E}^{T,S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{f} = 0, \quad (3.66)$$

wobei die Einträge des Vektors \mathbf{c} die Temperaturen oder Salzgehalte sind ($c_i = T_i$ bzw. $c_i = S_i$) und in \mathbf{f} die zugehörigen Quellen und Senken stehen ($f_i = F_i^T$ bzw. $f_i = F_i^S$). Die partielle Ableitung der j -ten Gleichung $E_j^{T,S}$ dieses Systems nach c_i ergibt:

$$\frac{\partial E_j^{T,S}}{\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i} (\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{c} - f_j) = S_{ji} = S_{ij}^T, \quad (3.67)$$

wobei \mathbf{s}_j der j -te Zeilenvektor der Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} ist. Es ergibt sich also gerade die Transponierte der Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} .

Die partiellen Ableitungen von Gleichung (3.66) nach den Geschwindigkeiten u_i ergeben:

$$\frac{\partial E_j^{T,S}}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} (\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{c} - f_j). \quad (3.68)$$

Dabei muß berücksichtigt werden, daß die Geschwindigkeiten auf den Elementen konstant und Mittelungen der Geschwindigkeitswerte auf den vier Eckpunkten (i, k, m, n) der Elemente (den Gitterpunkten) sind (siehe Abschnitt 3.6.1). Daraus folgt

$$\frac{\partial E_j^{T,S}}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} S_{ji} c_i + \frac{\partial}{\partial u_i} S_{jk} c_k + \frac{\partial}{\partial u_i} S_{jm} c_m + \frac{\partial}{\partial u_i} S_{jn} c_n. \quad (3.69)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.46, 3.48 und 3.65) ergibt sich dann gerade

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_j^{T,S}}{\partial u_i} &= \frac{1}{4} \left(\tilde{G}_{x,ji}^m c_i + \tilde{G}_{x,jk}^m c_k + \tilde{G}_{x,jm}^m c_m + \tilde{G}_{x,jn}^m c_n \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\tilde{G}_{x,ij}^{m,T} c_i + \tilde{G}_{x,kj}^{m,T} c_k + \tilde{G}_{x,mj}^{m,T} c_m + \tilde{G}_{x,nj}^{m,T} c_n \right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Dabei kennen wir die hier transponierten Matrizen $\tilde{\mathbf{G}}_x^{mT}$ bereits aus Abschnitt 3.9. Die Berechnung der partiellen Ableitungen von Gleichung (3.66) nach den Geschwindigkeiten v_i und w_i erfolgt analog.

Die Kontinuitätsgleichung wird in der Form (2.5) adjungiert. In Operatorform geschrieben, lautet sie:

$$\mathbf{E}^w = \mathbf{w} + \int_H^z (\mathbf{G}_x \cdot \mathbf{u} + \mathbf{G}_y \cdot \mathbf{v}) dz' = 0. \quad (3.71)$$

Daraus ergibt sich für die partielle Ableitung der j -ten Gleichung E_j^w nach den Geschwindigkeiten u_i , v_i und w_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_j^w}{\partial w_i} &= \begin{cases} \neq 0 & \text{für } i = j \\ = 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \\ \frac{\partial E_j^w}{\partial u_i} &= \int_H^z G_{x,ji} dz' = \int_H^z G_{x,ij}^T dz', \\ \frac{\partial E_j^w}{\partial v_i} &= \int_H^z G_{y,ji} dz' = \int_H^z G_{y,ij}^T dz'. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Insgesamt zeigen die Ausführungen in diesem Abschnitt, daß aus den mit der FEM diskretisierten Modellgleichungen die adjungierten Gleichungen recht einfach aufgestellt werden können. In ihnen treten im wesentlichen nur Transponierte der Steifigkeitsmatrix bzw. Derivate der Steifigkeitsmatrix auf. Das Invertieren ist also mit einem recht gut vertretbaren Zeit- und Arbeitsaufwand 'von Hand' möglich. Damit fällt es leichter, auf automatische Programme zum Adjungieren (sog. Model Adjoiner) wie beispielsweise dem TAMC (Giering, 1997 [28]) oder IMAS (Rhodin et al., 1996 [63]) zu verzichten. Zumal solche automatisch erzeugten adjungierten Codes oft nur schwer lesbar sind. Außerdem steht der TAMC (bisher) nur für Fortran-77-Programmierung zur Verfügung, und der IMAS eignet sich nur für Modelle mit wenigen Parametern, weil er sonst zu langsam ist. Automatische Adjungierer haben allerdings den Vorteil, daß nur neu kompiliert werden muß, wenn sich der Satz an Modellparametern ändert. Da dann aber in solch einem Fall bei Verwendung von finiten Elementen, die Steifigkeitsmatrix (und deren Transponierte) bereits vorhanden sind, sollte auch dann der Aufwand für manuelles Adjungieren im Rahmen bleiben.

Kapitel 4

Anwendung des Modells

Das bisher entwickelte Modell wird nun auf den Südatlantik angewendet. In diesem Kapitel wird das zu diesem Zweck generierte Modellgitter und die Initialisierung des Modells präsentiert.

4.1 Das Modellgitter

Das Modellgebiet umfaßt den Südatlantik und erstreckt sich von 70°W bis 20°E und von 30°S bis 74°S . Das Modellgitter ist aus 65623 Tetraedern aufgebaut und beinhaltet 13431 Gitterpunkte. Die horizontale Auflösung beträgt $\leq 2^\circ$, was bei der Gittergenerierung durch eine isotrope Verfeinerung erreicht wird. Die vertikale Auflösung beträgt $\leq 750\text{m}$. Es werden aber Tiefenniveaus in 50m, 100m, 200m und 400m vorgegeben. Die Auflösung in Richtung der Normalen zum Boden wird mittels anisotroper Verfeinerung auf $\leq 500\text{m}$ eingestellt. Die Meeresoberfläche besteht aus 1543 Punkten (Bild 4.1). Zu den offenen Rändern gehören insgesamt 977 Punkte. Die Bilder (4.2) und (4.3) zeigen die offenen Ränder auf den Längengraden 20°E und 70°W . Der Meeresboden wird aus 3215 Punkten bzw. 6187 Dreiecken gebildet. Die Triangulierung des Bodens wird in den Abbildungen (4.4) und (4.5) dargestellt. Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} (Abs. 3.6.1) hat 182103 nicht-verschwindene Einträge. Die Gesamtzahl der Kontrollvariablen (unabhängige Modellparameter \mathbf{p} , Gl. 2.7) beträgt 29948.

4.2 Parametrisierung einer Bodenrandschicht

Will man in das Modellgitter eine Bodenrandschicht einbauen, so stößt man auf das Problem, daß dann die Anzahl der Gitterpunkte stark zunimmt. So vergrößert sich beispielsweise die Zahl der Punkte auf über 26000, wenn man die Auflösung in Richtung der Normalen zum Boden von $\leq 500\text{m}$ auf $\leq 250\text{m}$ halbiert. Die Anzahl der Tetraeder steigt in den Bereich von 130000 Elementen und der Boden wird aus circa 16000 Dreiecken trianguliert. Der Grund

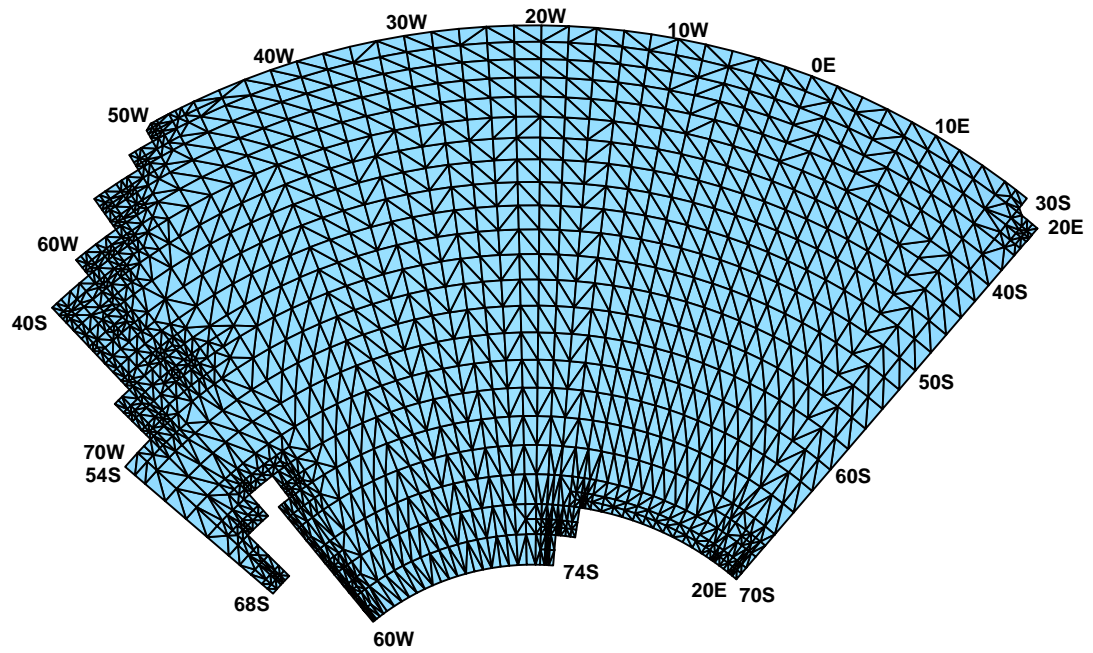


Abbildung 4.1: *Triangulierung der Meeresoberfläche.*

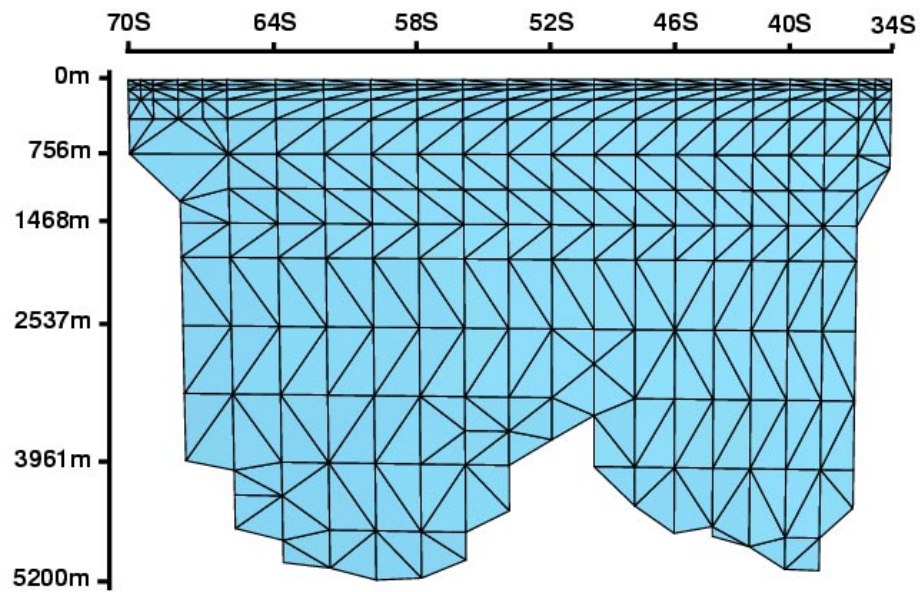


Abbildung 4.2: Offener Rand bei $20^{\circ}E$ zwischen dem Südatlantik und dem Indischen Ozean.

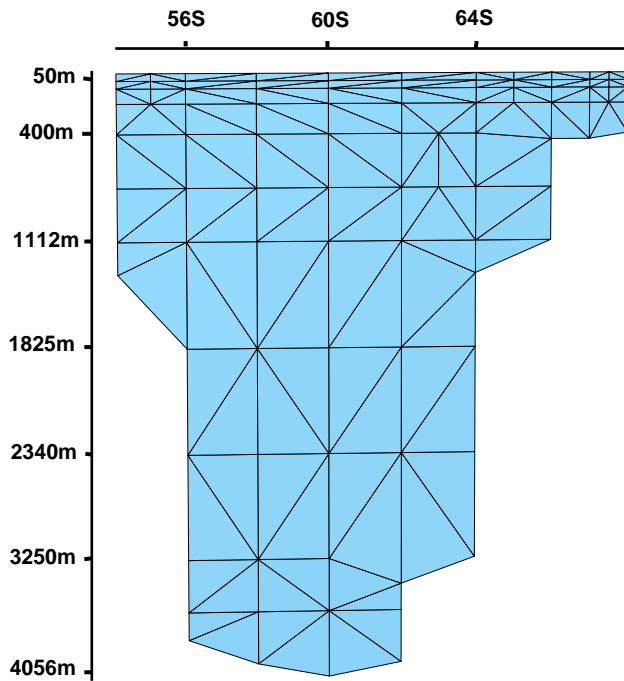
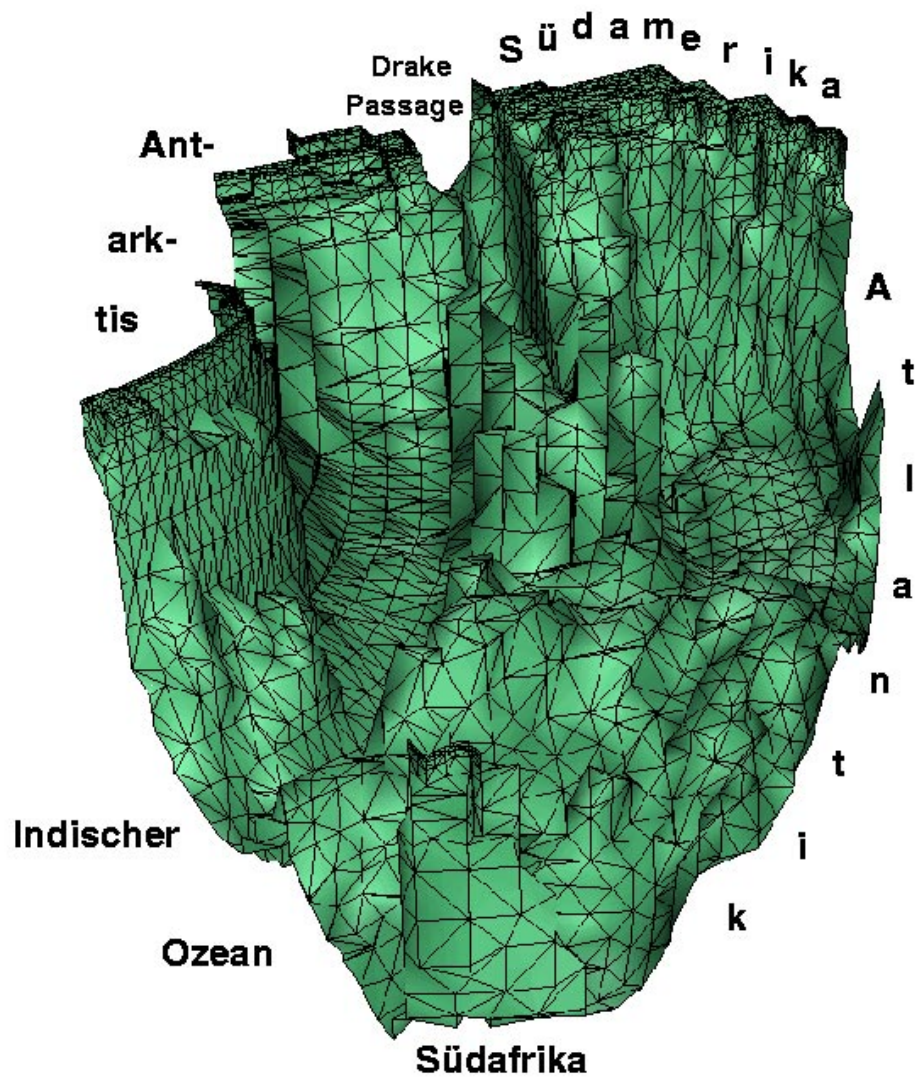
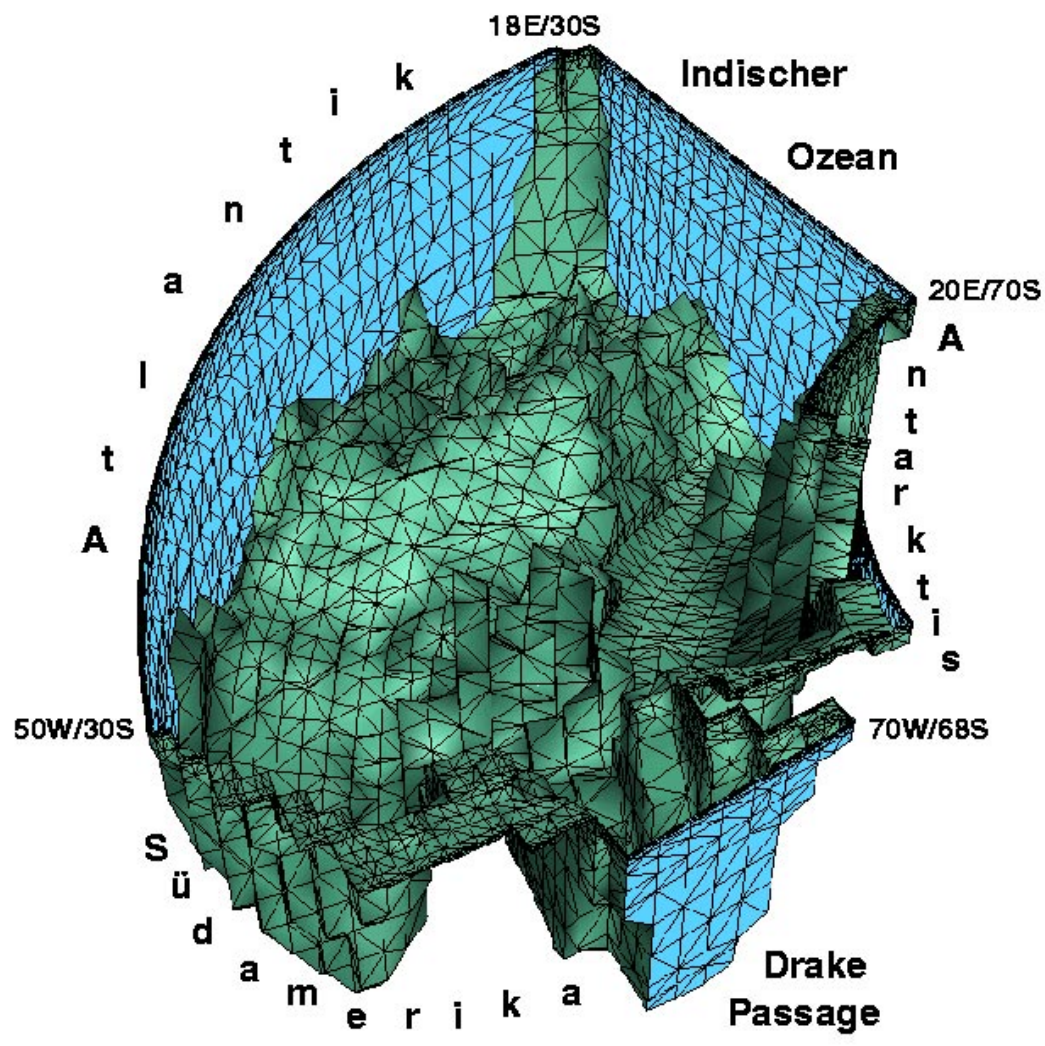


Abbildung 4.3: *Offener Rand bei 70° W durch die Drake-Passage.*

Abbildung 4.4: *Nächste Seite: Blick auf die Bodentopographie von Osten nach Westen.*

Abbildung 4.5: *Übernächste Seite: Bodentopographie (grün) und offene Ränder (blau).*





liegt darin, daß der Gittergenerator bei der Generierung des unstrukturierten Gitters keine hängenden Knoten zulassen darf. Das führt dazu, daß das Gitter über der eingefügten Randschicht – gegenüber einem Gitter ohne Randschicht – deutlich verfeinert werden muß. Diese Verfeinerung nimmt natürlich mit der Entfernung zum Boden ab. Die Zahl der Punkte wird in dem Gitter mit Randschicht dann aber wesentlich größer.

Eine erhöhte Anzahl n an Gitterpunkten kann vor allem deswegen problematisch werden, weil die Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} die Dimension $(n \times n)$ hat und daher relativ viel Speicherplatz benötigt, obwohl sie nur spärlich besetzt ist. Außerdem steigt natürlich auch die CPU-Zeit, die zum Lösen der linearen Gleichungssysteme gebraucht wird, deutlich an.

Daher wird nun eine Bodenrandschicht in folgender Weise parametrisiert: In Gleichung (3.17) wurde der Zusammenhang zwischen stückweise konstanten und stückweise linearen Geschwindigkeiten auf den Elementen dargestellt. Betrachten wir zunächst die linearen Geschwindigkeiten auf einen Tetraeder, dessen Eckpunkte 1, 2 und 3 auf den Boden liegen (siehe Abb. 3.1). Der Tetraeder steht also mit der Seitenfläche, die von diesen drei Punkten gebildet wird, auf dem Boden. Für die horizontalen Geschwindigkeiten $u_{1,2,3}$ und $v_{1,2,3}$ soll dann

$$\begin{aligned} u_{1,2,3}(\mathbf{x}) &= u_4 \varphi_{1,2,3}(\mathbf{x}) \left[1 - \exp\left(-\pi \frac{z+H}{D}\right) \cos\left(-\pi \frac{z+H}{D}\right) \right] \\ &\quad - v_4 \varphi_{1,2,3}(\mathbf{x}) \exp\left(-\pi \frac{z+H}{D}\right) \sin\left(-\pi \frac{z+H}{D}\right) \\ v_{1,2,3}(\mathbf{x}) &= v_4 \varphi_{1,2,3}(\mathbf{x}) \left[1 - \exp\left(-\pi \frac{z+H}{D}\right) \cos\left(-\pi \frac{z+H}{D}\right) \right] \\ &\quad + u_4 \varphi_{1,2,3}(\mathbf{x}) \exp\left(-\pi \frac{z+H}{D}\right) \sin\left(-\pi \frac{z+H}{D}\right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

gelten, wobei H die Tiefe des Meeresbodens und D die Dicke der Bodenrandschicht sein sollen. Die Geschwindigkeiten $u_{1,2,3}$ und $v_{1,2,3}$ werden also nahe am Boden gedreht und fallen exponentiell ab (siehe dazu Pedlosky, 1987 [59]). u_4 und v_4 sind die Geschwindigkeiten, die zum vierten Eckpunkt des Tetraeders gehören. Daraus folgt, daß u , v und auch w am Boden gleich null sind. Wenn die Dicke D der Bodenrandschicht hinreichend klein ist gegen die Höhe des Tetraeders in Richtung der Normalen zum Boden, gilt für die auf dem Element konstanten Geschwindigkeiten u_m und v_m (siehe Gleichung 3.17)

$$u_m = \frac{1}{4}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \simeq \frac{1}{4}u_4 \quad \text{und} \quad v_m = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \simeq \frac{1}{4}v_4. \quad (4.2)$$

In den Fällen, wo nur ein oder zwei Eckpunkte des Tetraeders auf dem Boden liegen, erfolgt die Berechnung der entsprechenden Geschwindigkeiten u und v analog zu Gleichung (4.1). Wenn alle vier Eckpunkte zum Boden gehören, sind $u_{1,2,3,4}$ und $v_{1,2,3,4}$ gleich null. Die Dicke der Bodenrandschicht wird hier auf $D = 20\text{m}$ gesetzt.

4.3 Das initialisierte Modell

Zunächst muß das Modell initialisiert werden. Wie im Abschnitt 2.4.2 beschrieben wurde, wird dazu als erstes ein Dichtefeld ρ aus den Daten für Temperatur und Salzgehalt (siehe Abs. 2.4.1) berechnet, mit dem das horizontale Geschwindigkeitsfeld (u, v) initialisiert wird. Die Abbildungen (4.6) und (4.7) zeigen die initialisierten Geschwindigkeiten für das Modellgebiet in einer Tiefe von 100m. Die Hauptströmungen des Südatlantiks werden dabei von den thermischen Windgleichungen (2.24) reproduziert. Man erkennt den Antarktischen Zirkumpolarstrom (ACC), der im Westen durch die Drake-Passage in das Modellgebiet einfließt und im Osten zwischen 40°S und 60°S wieder austritt. Entlang der Küste Südafrikas fließt der südliche Teil des Benguelastroms Richtung Norden. In dem Teilausschnitt (4.7) findet man im Weddellmeer eine relativ schmale nördliche Strömung östlich der antarktischen Halbinsel. Das Auftreten des schwächeren Wirbels weiter nordöstlich liegt wohl in der darunter liegenden Bodentopographie und den hydrographischen Daten selbst begründet. Die Bilder (4.8 - 4.11) zeigen die Profile der beiden Geschwindigkeitskomponenten u und v an vier verschiedenen Positionen des Modellgebiets. Die beiden ersten liegen im nordwestlichen Teil, das dritte Profil im Südosten und das vierte im Nordosten.

Aus dem initialisierten Geschwindigkeitsfeld (u, v) werden mit der Kontinuitätsgleichung (2.5) vertikale Geschwindigkeiten w berechnet. Abbildung (4.12) zeigt w in 100m Tiefe. Im Wesentlichen liegen die Werte im Bereich von 10^{-5}ms^{-1} und darunter. Größere Geschwindigkeitsbeträge treten nur lokal auf. So etwa östlich von Südamerika, in der Gegend von $45^\circ\text{W}/62^\circ\text{S}$ und am offenen Rand bei Südafrika. Das Gebiet mit dem stärksten Aufquellen findet man zwischen der Südspitze Südamerikas und den Falkland Inseln.

In der stationären Advektions-Diffusions-Gleichung (2.6)

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T - K \Delta T - F^T = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla S - K \Delta S - F^S = 0$$

ist der Diffusionskoeffizient K bezüglich der vertikalen Diffusion wesentlich kleiner als für die horizontale. Die Advektions-Diffusions-Gleichung lautet dann

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T - K_h \Delta_h T - K_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} T = F^T, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla S - K_h \Delta_h S - K_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} S = F^S. \quad (4.3)$$

Die beiden Koeffizienten werden auf $K_h = 5 \cdot 10^4 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ und $K_v = 5 \cdot 10^{-2} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ gesetzt. Die Quellen und Senken F^T und F^S – die zugelassen werden, um subskalige Prozesse zu parametrisieren, die vom Modell aufgrund der lokalen Gitterweite und der Verwendung konstanter Diffusionskoeffizienten nicht aufgelöst werden – werden folgendermaßen initialisiert. In Gleichung (4.3) werden das initialisierte Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u}_{int} und die hydrographischen Daten eingesetzt. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} F_{int}^T &= \mathbf{u}_{int} \cdot \nabla T_{dat} - K_h \Delta_h T_{dat} - K_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} T_{dat}, & \text{und} \\ F_{int}^S &= \mathbf{u}_{int} \cdot \nabla S_{dat} - K_h \Delta_h S_{dat} - K_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} S_{dat}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

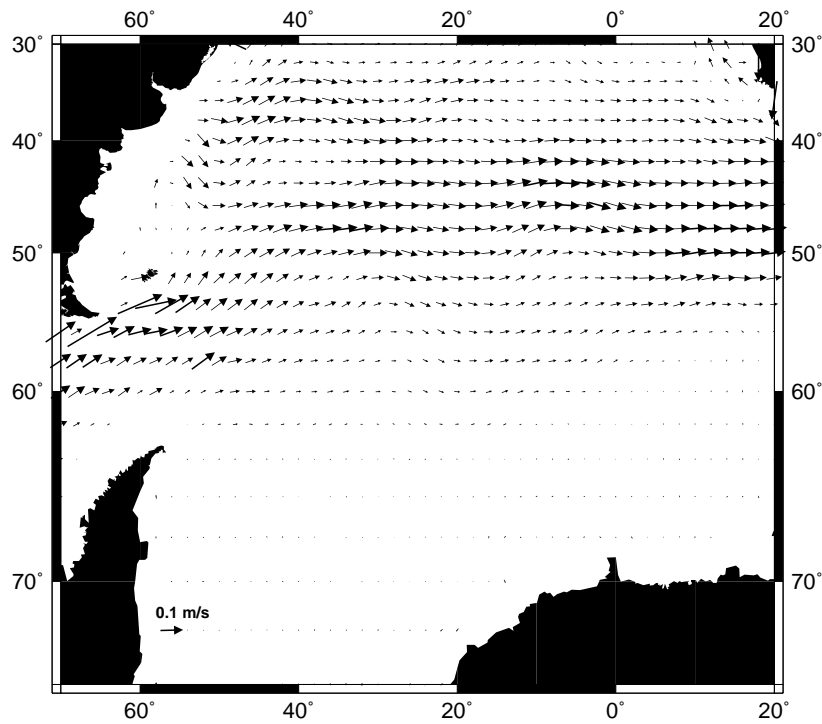


Abbildung 4.6: *Initialisiertes horizontales Geschwindigkeitsfeld (u, v) in 100m Tiefe. (Bei dieser Art von Vektorplots werden die Geschwindigkeitsvektoren auf einen $2^\circ \times 2^\circ$ Gitter dargestellt.)*

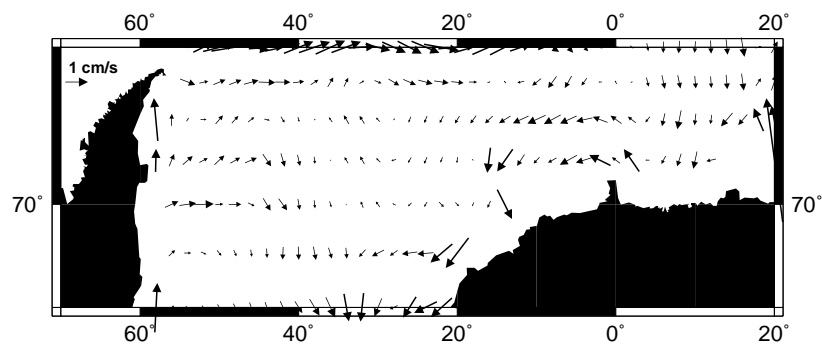


Abbildung 4.7: *Ausschnitt der Abbildung (4.6) südlich von 60°S.*

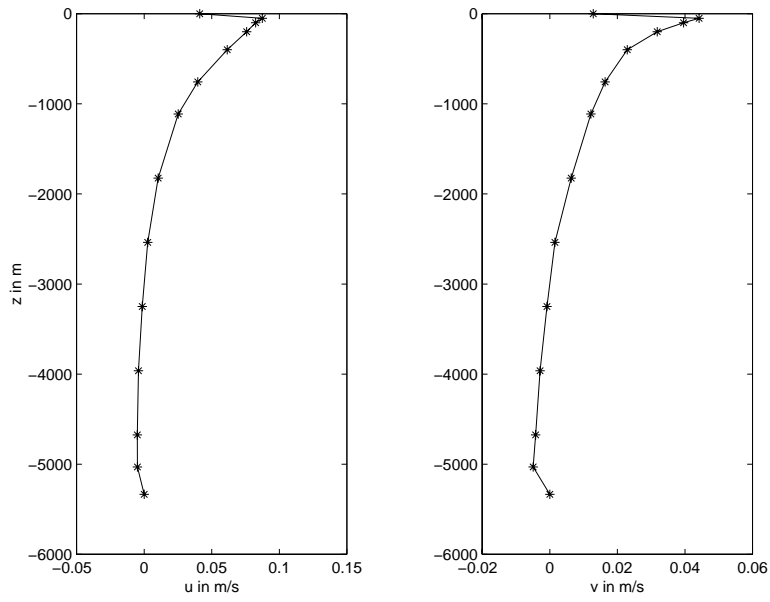


Abbildung 4.8: Profil der horizontalen Geschwindigkeit bei $46^\circ W$ und $38^\circ S$.

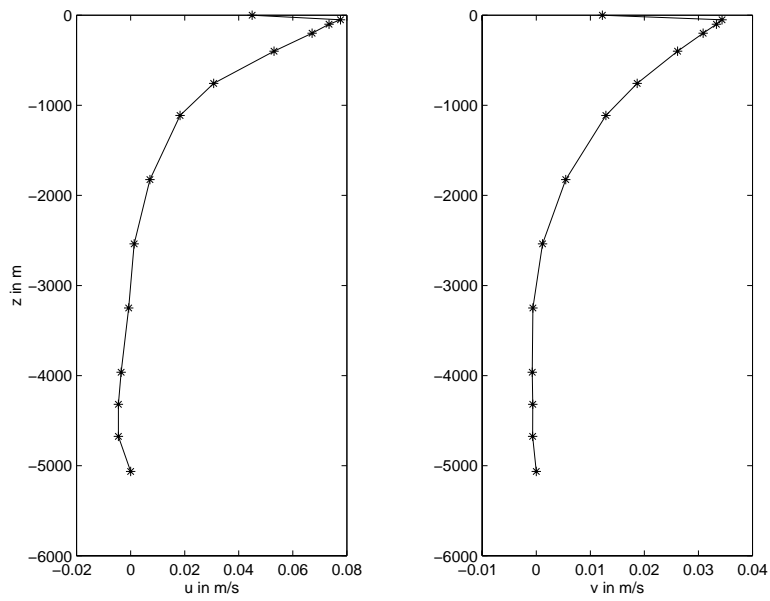


Abbildung 4.9: Profil der horizontalen Geschwindigkeit bei $42^\circ W$ und $36^\circ S$.

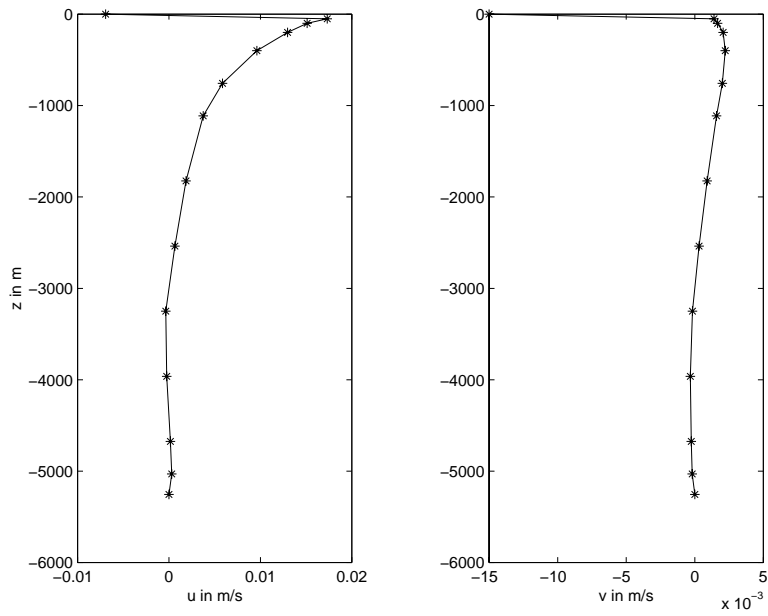


Abbildung 4.10: Profil der horizontalen Geschwindigkeit bei $4^\circ W$ und $60^\circ S$.

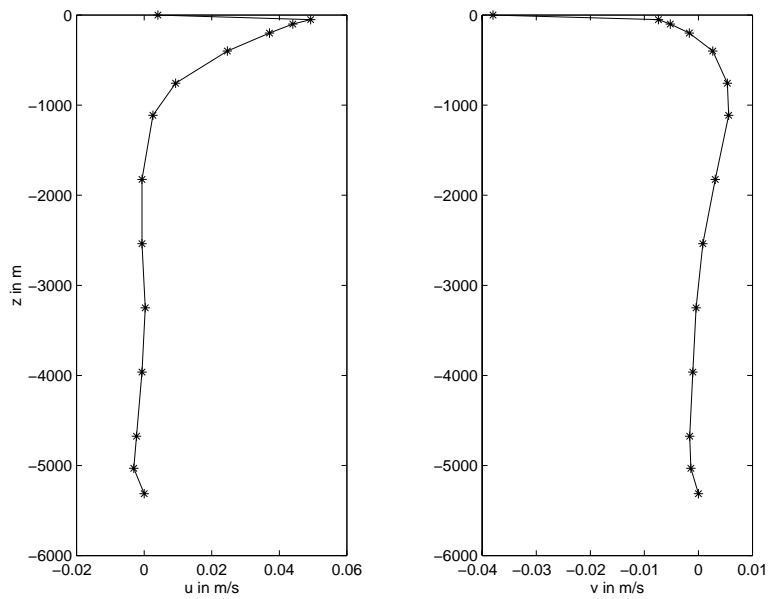


Abbildung 4.11: Profil der horizontalen Geschwindigkeit bei $8^\circ E$ und $36^\circ S$.

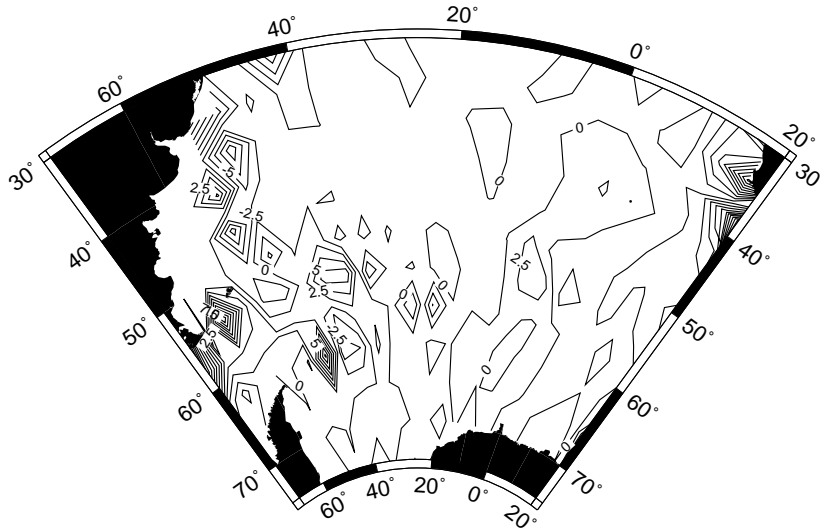


Abbildung 4.12: Vertikalgeschwindigkeiten w in 10^{-5}ms^{-1} in 100m Tiefe.

Randbedingungen

Im Abschnitt 1.2 wurde bereits auf das Problem der offenen Ränder hingewiesen, wenn das Modellgebiet nicht global ist, sondern auf das zu untersuchende Teilgebiet beschränkt bleibt. Auf den offenen Ränder müssen Vorinformationen über Hydrographie und Transporte vorgegeben werden.

Die Randbedingungen für Temperatur und Salzgehalt am Boden lauten in diesem Modell $\partial T/\partial n = \partial S/\partial n = 0$. An den offenen Rändern und der Meeresoberfläche werden Dirichlet-Bedingungen $T = T_{dat}$ und $S = S_{dat}$ gesetzt. In den Bereichen zwischen 0°E und Südafrika entlang des nördlichen Randes bei 30°S und zwischen 40°S und 60°S entlang des östlichen Randes bei 20°E werden allerdings Neumann-Bedingungen $\partial T/\partial n = \partial S/\partial n = q$ gewählt (hier mit $q = 0$), weil dies Gebiete mit starken Ausstrom sind (siehe Abb. 1.1). Im Osten verläßt der antarktische Zirkumpolarstrom das Modellgebiet und westlich der Spitze Südafrikas strömt der Agulhas Richtung Norden und geht in den Benguela-Strom über.

Der Volumentransport über die offenen Ränder wird ebenfalls vorgegeben. In den Modellen von Matano und Philander (1993) [50] und Barnier et al. (1996) [4] wurden die Ränder im Norden und Süden als geschlossen betrachtet. Durch die Drake Passage gaben Matano und Philander einen Transport von 120 Sv und Barnier et al. von 150 Sv vor. In diesem Modell wird durch die Drake Passage bei 70°W ein Volumentransport von 130 Sv vorgegeben. Dies entspricht dem Wert von Reid (1989) [62] und liegt im angegebenen Bereich von Whitworth (1983) [88] (siehe Abs. 1.1). Bei 20°E wird ein Nettotransport von ebenfalls 130 Sv aus den Südatlantik in den Indischen Ozean vorgegeben. An den beiden Ränder im Norden bei 30°S

und im Süden bei 74°S wird der Nettotransport auf 0 Sv gesetzt.

Massenerhaltung

Um zu überprüfen, ob das Modell tatsächlich massenerhaltend ist, wurde die Advektions-Diffusions-Gleichung (4.3) für einen Tracer C_1 mit den Randbedingungen $C_1 = 1.0$ – überall dort, wo Dirichlet-Bedingungen gelten – gelöst. Die Quellen auf der rechten Seite der Gleichung wurden gleich null gesetzt ($F^{C_1} = 0$). Das Abbruchkriterium des GMRES-Verfahren (Abs. 3.7) wurde dabei auf 10^{-11} für die Genauigkeit der Lösung gesetzt. Für die Lösung im gesamten Modellgebiet muß dann $C_1(x, y, z) = 1.0 \pm \varepsilon(x, y, z)$ mit einem sehr kleinen ε gelten. Hier liegt ε in der Größenordnung von $10^{-10} - 10^{-9}$ (Abb. 4.13 und 4.14). Nur in einem sehr kleinen Bereich bei 40°W und 60°S in einer Tiefe von circa -1100m liegt es bei 10^{-8} . Dieser Test bestätigt somit die Massenerhaltung des Modells. Weitere Betrachtungen haben ergeben, daß ε in der gleichen Größenordnung während aller Iterationsschritte der Optimierungsläufe bleibt.

Setzt man nun in die linke Seite der Gleichung (4.3) $C_1(x, y, z) = 1.0$ ein, so sollte die rechte Seite wegen der Massenerhaltung gleich null sein. Die Abweichungen ε_u von Null stellen somit den Fehler des Modells in der Divergenz der Geschwindigkeit dar:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla C_1 - K_h \Delta_h C_1 - K_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} C_1 = \varepsilon_u = -C_1 \nabla \cdot \mathbf{u} = -\nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (4.5)$$

In Abbildung (4.15) ist der Betrag von ε_u für jeden Gitterpunkt dargestellt. Wie sich zeigt, ist bei 99.72% aller Gitterpunkte $|\varepsilon_u| < 10^{-10}$ und bei fast 95% $|\varepsilon_u| < 10^{-11}$. Nur bei vier Punkten ist $|\varepsilon_u| \geq 10^{-9}$. Dies gilt auch, wenn die Diffusionskonstanten K_h und K_v um ein bis zwei Größenordnungen verringert werden. Die Massenerhaltung des Modells ist also gewährleistet.

Separation der Modellgleichungen

Im Abschnitt 2.3 wurden die adjungierten Gleichungen (2.19,2.20) und der iterative Algorithmus des Inversmodells vorgestellt. Dabei wurde gezeigt, daß zur Bestimmung der Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j ein n_{eq} -dimensionales lineares Gleichungssystem (2.21) gelöst werden muß, wobei n_{eq} die Gesamtzahl der Modellgleichungen ist. Weil nun aber die Dichte ρ^i bei der i -ten Iteration aus den Werten der Temperatur T^{i-1} und des Salzgehalts S^{i-1} der vorherigen Iteration $i - 1$ berechnet wird, separieren die sechs Modellgleichungen (2.1-2.6) und das Gleichungssystem (2.21) zerfällt entsprechend in sechs Systeme, die nacheinander mit dem GMRES-Verfahren (Abschnitt 3.7) gelöst werden können. Da von den Modellgleichungen nur die Advektions-Diffusions-Gleichung (2.6) und die Kontinuitätsgleichung (2.4) von den unabhängigen Parametern (den Kontrollvariablen) \mathbf{p} (2.7) abhängen, genügt es, wenn nur die dazugehörigen Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j berechnet werden. Das spart Speicherbedarf und CPU-Zeit.

Weil nun aber außerdem die partiellen Ableitungen der Zustandsgleichung E^ρ (2.1) nach den unabhängigen Parametern verschwinden ($\partial E_j^\rho / \partial p_i = 0$), hängt der Gradient der Kostenfunktion ∇J nicht von dieser Modellgleichung ab. Denn auch die Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j sind aufgrund der angesprochenen Separation der Modellgleichungen von

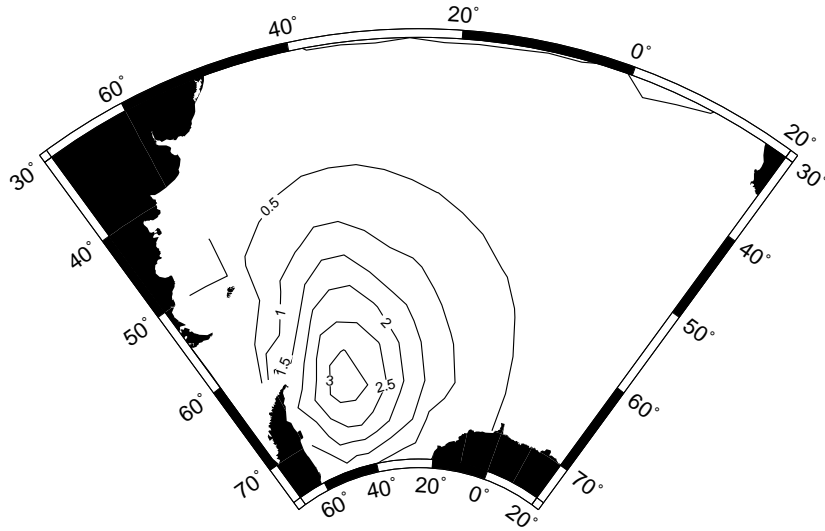


Abbildung 4.13: $\varepsilon \cdot 10^{-10}$ der Modelllösung des Tracers C_1 in 100m Tiefe.

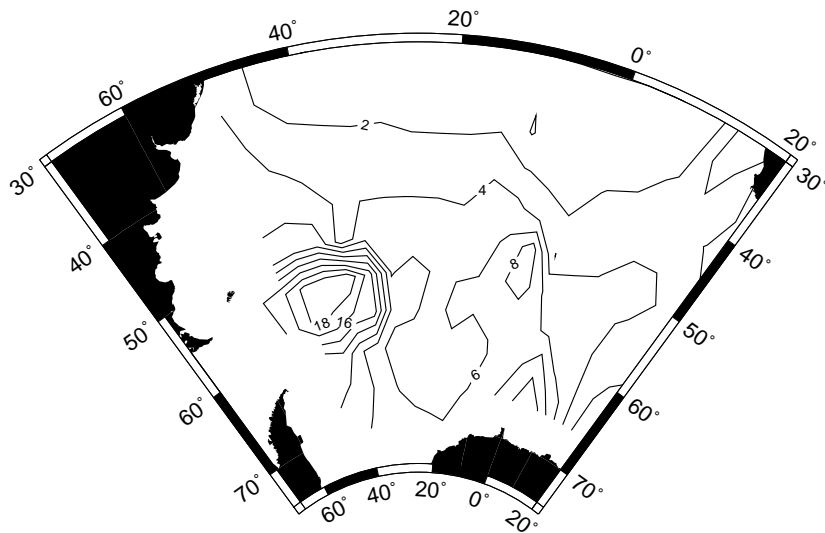


Abbildung 4.14: $\varepsilon \cdot 10^{-10}$ der Modelllösung des Tracers C_1 in 3250m Tiefe.

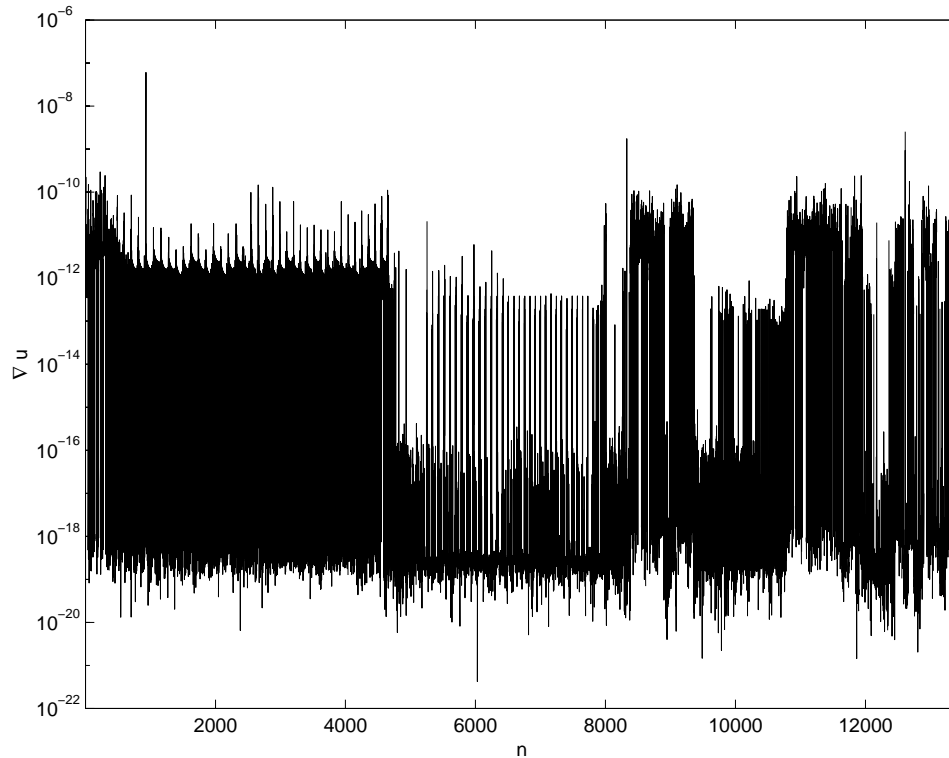


Abbildung 4.15: Betrag $|\varepsilon_u| = |\nabla \mathbf{u}|$ in s^{-1} für jeden Gitterpunkt.

der Zustandsgleichung unabhängig. Das bedeutet, daß beim Minimierungsalgorithmus die Zustandsgleichung (2.1) gar nicht als Zwangsbedingung auftritt. Nun wird aber die Advektions-Diffusions-Gleichung (2.6) während der i -ten Iteration als letzte Modellgleichung gelöst. Temperatur und Salzgehalt aus dieser Lösung gehen dann bei der nächsten Iteration in die Zustandsgleichung (2.1) ein, die als erste Modellgleichung in der $i + 1$ -ten Iteration gelöst wird. Dies kann dazu führen, daß in die Zustandsgleichung Temperaturen und Salzgehalte aus der vorhergehenden Iteration eingehen, die zu unrealistischen Werten für die Dichte ρ im Ozean führen.

Kapitel 5

Ergebnisse des Modells

In diesem Abschnitt werden nun die Ergebnisse des adjungierten Modells präsentiert. Als erstes wird die Entwicklung der Kostenfunktion J betrachtet. Dabei wird auch angegeben, wie stark die einzelnen Terme der Kostenfunktion minimiert worden sind. In den beiden folgenden Abschnitten werden die groß-skalige Zirkulation der Modellösung und die Transporte über die offenen Ränder diskutiert. Im Abschnitt 5.4 werden die vertikalen Geschwindigkeiten betrachtet. Danach werden die Verteilung von Temperatur und Salzgehalt und schließlich die Quellen und Senken der Advektions-Diffusions-Gleichung behandelt.

5.1 Minimierung der Kostenfunktion

Aus dem vorangegangenen Kapitel wissen wir, daß die Modellgleichungen (2.1 - 2.6) separieren und der Gradient der Kostenfunktion ∇J nicht von der Zustandsgleichung (2.1) – also nicht von der Dichte ρ – abhängt. Die möglichen Folgen dieser Modelleigenschaft wurden im Abschnitt 4.3 beschrieben. Sie können aber durch die Wichtung der einzelnen Terme in der Kostenfunktion J (Gl. 2.9 - 2.15) beeinflußt werden. Es hat sich gezeigt, daß es in diesem Zusammenhang von Vorteil ist, den Term J_{uv} stark gegenüber den übrigen Termen zu wichten.

Das Beispiel in den Abbildungen (5.1) und (5.2) und der mittleren Spalte der Tabelle 5.1 zeigt, daß dann alle Terme der Kostenfunktion bis auf eine Ausnahme während der Optimierung deutlich kleiner werden. Der Term J_{uv} (Gl. 2.9,2.10) wird um drei Größenordnungen reduziert, J_w (Gl. 2.13) und J_T (Gl. 2.14) um zwei und J_S (Gl. 2.15) wird um über 70% kleiner. Die Ausnahme bildet der Term J_F (Gl. 2.11,2.12), der ungefähr verdreifacht wird. Das bedeutet aber, daß die Quellen und Senken F^T und F^S der Advektions-Diffusions-Gleichung (4.3) größer werden, obwohl sie möglichst klein sein sollen. Dies ist eine Eigenschaft, zu dem das Modell neigt und das vermieden werden sollte.

Nun soll aber ein Modellexperiment betrachtet werden, bei dem letzteres nicht zutrifft. Die Bilder (5.3) und (5.4) und die rechte Spalte der Tabelle 5.1 zeigen die Entwicklung der zugehörigen Kostenfunktion. Der Term J_{uv} wurde wesentlich größer als die anderen Terme und J_F um zwei Ordnungen größer als J_w , J_T und J_S gewichtet. Ab $i = 65$ wurde der Term J_F mit null gewichtet und die Minimierung fortgesetzt. Dies ist die Ursache für den Sprung in der Kostenfunktion an dieser Stelle. Wie man sieht werden alle Terme von J

Terme von J	Bilder (5.1) und (5.2) $r = \frac{\text{Wert vor der Minimierung}}{\text{Wert nach der Minimierung}}$	Bilder (5.3) und (5.4) $r = \frac{\text{Wert vor der Minimierung}}{\text{Wert nach der Minimierung}}$
J	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
J_{uv}	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
J_F	306	0.012
J_w	0.011	0.012
J_T	0.062	0.071
J_S	0.274	0.184
∇J	0.014	0.022

Tabelle 5.1: *Minimierung der Kostenfunktion J , ihrer einzelnen Terme und ihres Gradienten ∇J . r ist der Quotient aus dem Wert des entsprechenden Terms von J vor der Minimierung und dem Wert nach der Minimierung. Die mittlere Spalte bezieht sich auf die Kostenfunktion aus den Abbildungen (5.1) und (5.2) und die rechte Spalte auf die Kostenfunktion aus den Abbildungen (5.3) und (5.4).*

deutlich reduziert. Dies geschieht in den ersten Iterationen sehr schnell. Die Veränderungen im weiteren Verlauf der Minimierung sind vergleichsweise nur noch gering. Mit dem Neustart der Minimierung bei $i = 65$ sollte verhindert werden, daß der Term J_F wieder ansteigt, um so eine weitere Verringerung der übrigen Terme zu erreichen. Die Werte der Quellen F^T und F^S wurden festgehalten und die Minimierung der anderen Terme fortgesetzt. Es ergaben sich aber nur noch kleine Veränderungen in den Nachkommastellen der bis dahin erreichten Größenordnungen der verschiedenen Terme von J . Die Kostenfunktion J wurde insgesamt auf 0.03% ihres Startwertes minimiert. Dies gilt ebenso für den Term J_{uv} , was nicht überrascht, da er ja aufgrund der Wichtung der führende Term in der Kostenfunktion ist. Das weist aber schon darauf hin, daß die Referenzgeschwindigkeiten \mathbf{u}_{ref} und \mathbf{v}_{ref} sehr gut dem Gradienten der SSH angepaßt werden. Die Anpassung erfolgt genauer als $\pm 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$. Mit dieser Wichtung in den ersten Modellanwendungen erhält das Modellergebnis eine oberflächennahe Zirkulation, die im wesentlichen von den SSH-Daten (aus den Satelliten-Altimetermessungen) geprägt wird. Das darunter liegende Geschwindigkeitsfeld und die Modelltemperaturen und -salzgehalte zeigen dann unter anderem, wie gut die klimatologischen hydrographischen Daten damit zusammenpassen. Der Term J_F ist auf 1.20% seines Ausgangswertes gefallen (siehe Abs. 5.6). Auch die vertikalen Geschwindigkeiten w konnten besser der Rotation des Windfeldes angepaßt werden (siehe Abschnitt 5.4), denn der Wert des entsprechenden Terms J_w ist auf 1.23% seines Wertes vor der Minimierung gefallen. Die Terme J_T und J_S bezüglich der Anpassung von Temperatur und Salzgehalt an die hydrographischen Daten sind auf 7.05% bzw. 18.42% ihrer ursprünglichen Werte verringert worden (siehe Abs. 5.5). Der Gradient der Kostenfunktion ∇J hat auf 0.22% seines Ausgangswertes abgenommen (siehe Bild 5.3).

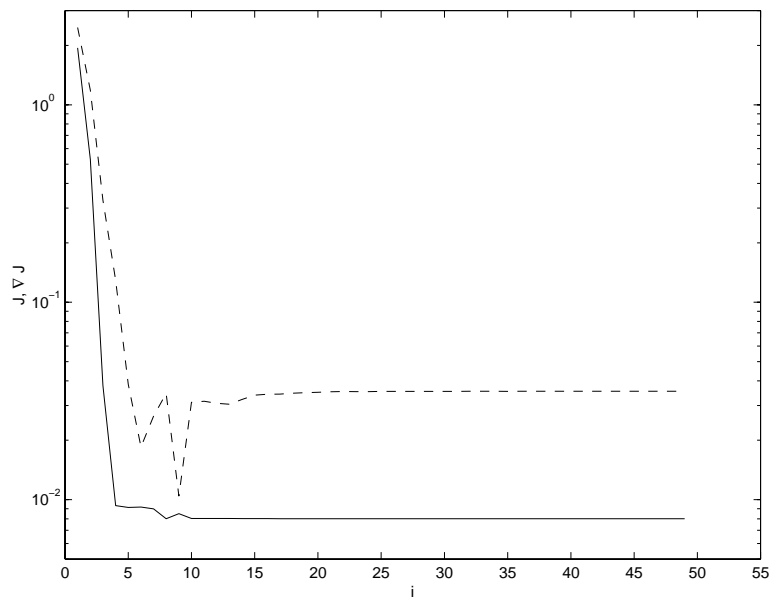


Abbildung 5.1: Entwicklung der Kostenfunktion J (—) und des Gradienten ∇J (- - -).

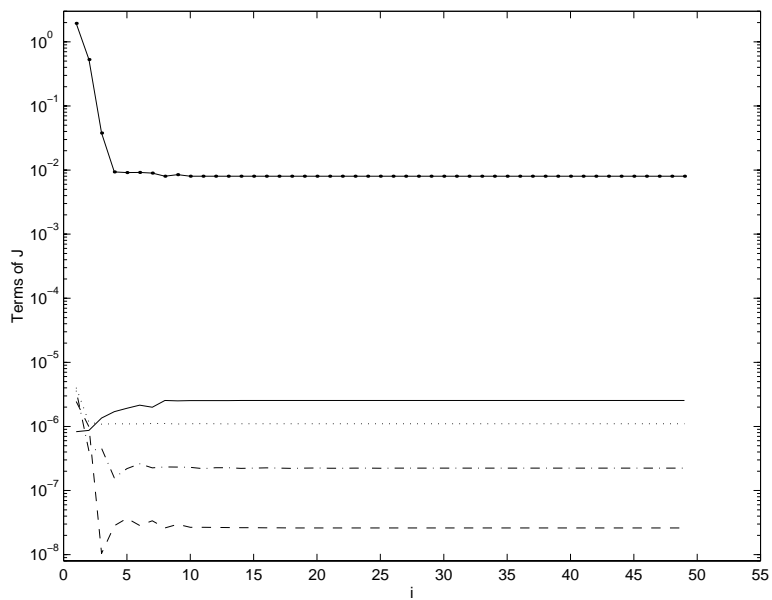


Abbildung 5.2: Entwicklung der einzelnen Terme der Kostenfunktion J : J_{uv} (-•-), J_F (—), J_w (- - -), J_T (-·-) und J_S (···).

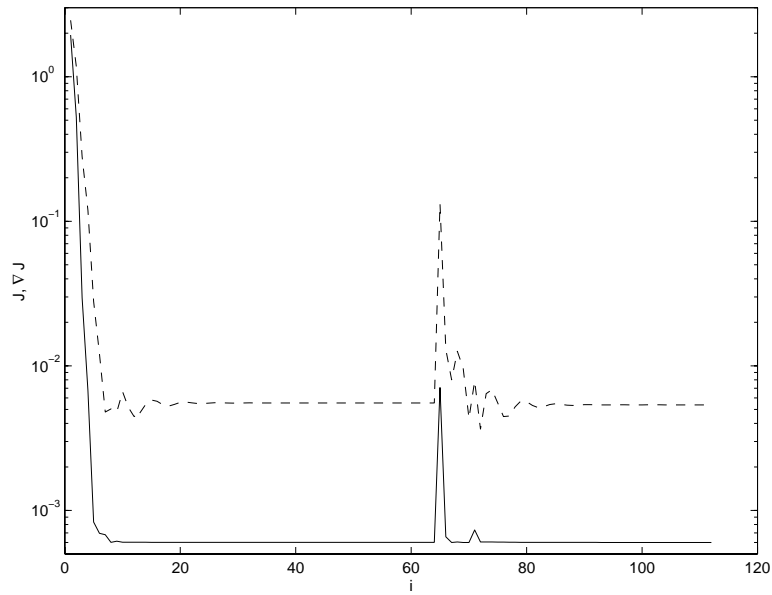


Abbildung 5.3: Entwicklung der Kostenfunktion J (—) und des Gradienten ∇J (- - -).

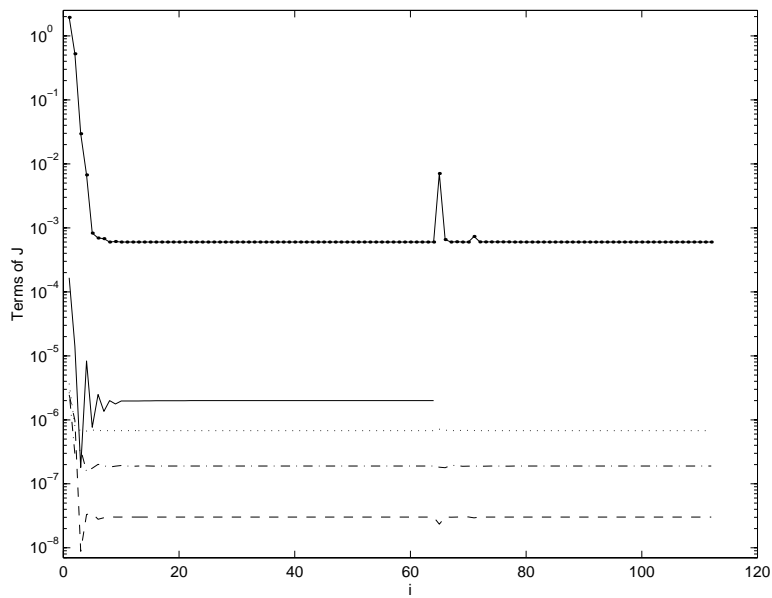


Abbildung 5.4: Entwicklung der einzelnen Terme der Kostenfunktion J : J_w (—•—), J_F (—), J_w (- - -), J_T (- · -) und J_S (···).

5.2 Die inversmodellierete Zirkulation

Betrachten wir nun die Zirkulation, die dieses Modellexperiment liefert. Die Bilder (5.5) bis (5.14) zeigen das horizontale Geschwindigkeitsfeld (u, v) in verschiedenen Tiefen. Dabei werden in Abbildung (5.5) die horizontalen Referenzgeschwindigkeiten dargestellt. Bereits im vorherigen Abschnitt wurde darauf hingewiesen, daß sie sehr nah an den Gradienten der Auslenkung der Meeresoberfläche (SSH) angepaßt wurden. Der Vergleich mit den SSH-Daten (siehe Abs. 2.4.1) aus Bild (2.4) zeigt, daß die Referenzgeschwindigkeiten senkrecht zum SSH-Gradienten stehen und parallel zu den Höhenlinien der SSH liegen.

Die oberflächennahen Geschwindigkeiten (Abb. 5.5, 5.6, 5.7) können nun mit den Zirkulationsmustern von Reid (1989 [62], Abb. 1.2) und Peterson und Stramma (1991 [60], Abb. 1.1) verglichen werden. Die großen Stromsysteme des Südatlantiks, die die beiden Arbeiten zeigen, findet man auch in der Modellösung wieder. Der Antarktische Zirkumpolarstrom (ACC) strömt mit dem Volumentransport von 130 Sv, der auf dem offenen Rand bei 70°W vorgegeben wurde (Abs. 4.3), durch die Drake Passage in den Südatlantik ein. Im Südantillenmeer (Scotia Sea) bildet er den Falkland- bzw. Malwinen-Strom. Dieser westliche Randstrom fließt entlang der südamerikanischen Küste und westlich der Falklandinseln nach Norden. Im Gebiet bei 48°S trifft er auf den aus Norden kommenden Brasilstrom. Er reicht damit nicht so weit nach Norden, wie bei Reid (1989) [62] und Peterson und Stramma (1991) [60], wo er sich bis 40°S ausbreitet. Der Brasilstrom ist auch nicht so deutlich ausgeprägt. Zwischen 44°W und Südamerika strömt er in das Modellgebiet ein. Im Gebiet südlich von 34°S und nördlich von 40°S, wo auch der Rio de la Plata in den Südatlantik fließt, ist aber nur eine östliche Strömung den Kontinentalschelf hinunter zu erkennen. Der Vergleich mit den SSH-Daten (Bild 2.4) zeigt den möglichen Grund dafür, daß der Brasilstrom trotz der relativ guten Gitterauflösung in diesem Bereich (siehe Abb. 4.1) nur schlecht wiedergegeben wird. Die Strömung den Kontinentalschelf hinunter folgt den Höhenlinien des SSH-Feldes und dies spiegelt den Brasilstrom nicht wieder.

Aus dem Südantillenmeer heraus strömt der ACC zunächst nach Nordosten und schwenkt dann in Richtung Osten ein. Im Osten verläßt er den Südatlantik im Bereich zwischen 55°S und 40°S. Dieses Verhalten stimmt gut mit den Beschreibungen von Reid (1989) [62] und Peterson und Stramma (1991) [60] überein. Der subtropische Wirbel tritt am nördlichen Rand zwischen 38°W und 44°W in das Modellgebiet ein, läuft dann als Südatlantik-Strom nach Osten und verläßt es dann wieder östlich von 4°E über 30°S. Der ACC und der Südatlantik-Strom bilden auf ihrem Weg eine breite nach Osten gerichtete Strömung. Die höchsten Geschwindigkeiten erreicht der ACC in der Drake Passage mit 11-13 cms^{-1} . Sonst liegt sie bei 10 cms^{-1} und mehr. Geschwindigkeitsmaxima findet man noch östlich des Greenwich-Meridians und östlich der Falklandinseln bei 50°S, wo 12 cms^{-1} erreicht werden. Das Auftreten dieses Maximums wurde zum Beispiel von Peterson und Whitworth (1989) [61] beschrieben. Die Geschwindigkeiten in der Drake Passage sind im Vergleich zur Literatur zu klein. Allerdings sind die verwendeten klimatologischen Daten auch geglättet. So geben unter anderem Whitworth et al. (1982) [89] Werte von 40-50 cms^{-1} und Whitworth (1983) [88] über 20 cms^{-1} an. Bei Peterson und Stramma (1991) [60] werden für die vertikal gemittelten geostrophischen Geschwindigkeiten oberhalb von 2500m Tiefe relativ dazu bis über 15 cms^{-1} angeführt.

Aus den Bildern (1.1) und (1.2) ist ein Ein- und Rückstrom des Agulhas südlich von Afrika

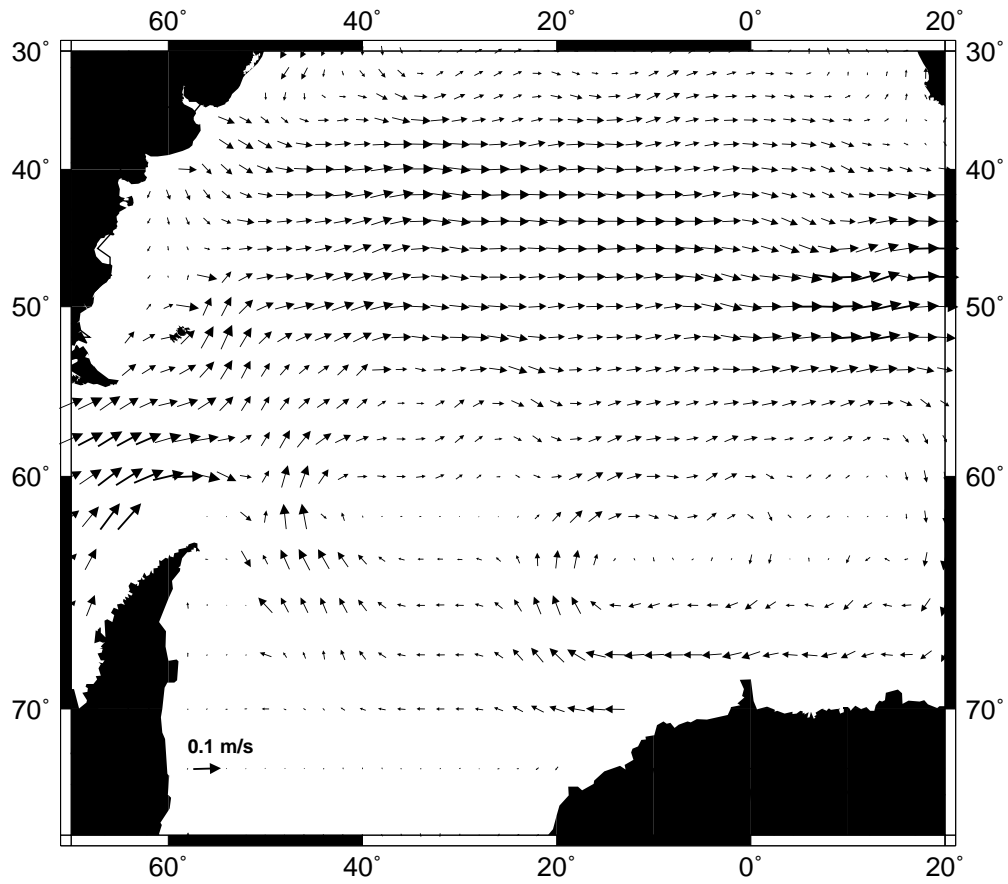


Abbildung 5.5: Referenzgeschwindigkeiten (u_{ref}, v_{ref}) an der Meeresoberfläche.

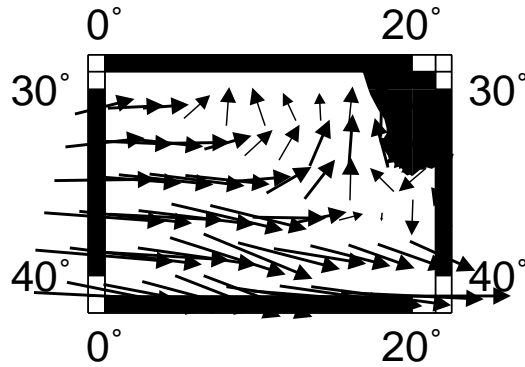


Abbildung 5.6: Nordöstlicher Ausschnitt der Abbildung (5.5). Am östlichen Rand ist der Ein- und Ausstrom des Agulhas.

zu erwarten, der auch noch westlich von 20°E zu erkennen sein sollte. Der Teilausschnitt von Bild (5.5) in Abbildung (5.6) zeigt diesen Bereich der Modellzirkulation. Auf dem Längengrad 20°E ist nur ein schwacher Ein- und Ausstrom zu sehen. Weiter ist auch der Benguelastrom an der Westküste Südafrikas nur schwach ausgebildet. Es werden Geschwindigkeiten von nur $3\text{-}4\text{ cm s}^{-1}$ erreicht. Dieser Effekt kann damit zusammen hängen, daß das Modellgebiet im Osten bei 20°E begrenzt ist. Beispielsweise tritt in dem regionalen Südatlantikmodell von Barnier et al. (1996) [4], das auch nur bis 20°E reicht, aber immerhin eine horizontale Auflösung von 1.375° hat, gar kein Einstrom des Agulhas auf.

Im Weddellmeer ist südlich des ACC's der Weddellwirbel zu erkennen. Zwischen dem Greenwich-Meridian und dem östlichen Rand des Modellgebiets strömt er nach Süden. Dies stimmt mit dem Weddellwirbel aus Bild (1.2) von Reid (1989) [62] überein. Er fließt dann zunächst an der antarktischen Küste entlang. Der Rückstrom des Weddellwirbels nach Norden ist dann aber zweigeteilt. Die erste nordwärts gerichtete Strömung findet man schon bei 20°W . Der restliche Teil des Weddellwirbels fließt weiter nach Westen bevor auch er nach Norden eindreht. Allerdings lehnt er sich dabei nicht so dicht an die Antarktische Halbinsel an, wie man das nach Reid (1989) [62] erwarten würde. Ein zweigeteilter Weddellwirbel tritt zum Beispiel auch im BRIOS-Modell von Beckmann et al. (1999) [5] auf. Dort findet man einen Wirbelkern östlich des Greenwich-Meridian und einen zweiten westlich davon. Auf der Grundlage von hydrographischen Beobachtungen wurde ein Weddellwirbel mit zwei Zellen von Bagriantsev et al. (1989) [2] vorgeschlagen. Der Weddellwirbel aus dem hier präsentierten Modellexperiment besteht aber nicht wirklich aus zwei Wirbeln. Vielmehr hat man hier (den zu erwartenden) Einstrom ins Weddellmeer im Osten und zwei deutlich unterscheid-

bare Strombänder nach Norden. Verursacht wird dies durch zwei Aspekte. Zunächst sind da die SSH-Daten. Betrachtet man die Isobathen für -1.0m, -1.25m und -1.5m in Abbildung (2.4), so zeigt sich, daß die Struktur des Weddellwirbels des Modells hier begründet liegt. Die -1.25m-Kontourlinie verläuft bei 20°W in Richtung Norden. Genau dort, wo auch das erste Stromband aus dem Weddellmeer nach Norden strömt – also ungefähr 20° weiter westlich als bei Beckmann et al. (1999) [5]. Ganz ähnlich verhält es sich mit der zweiten nordwärts gerichteten Strömung und der -1m-Isobathe. Der zweite Punkt, der hier eine Rolle spielt ist die Bodentopographie. Der Südantillenrücken erstreckt sich bis ca. 25°W und 60°S. Nach Süden zum Becken des Weddellmeeres hin fällt die Topographie sehr steil ab. Das Modellgitter hat in diesem Bereich senkrechte Wände (Bilder 4.4,4.5). Südgeorgien, die Südsandwich Inseln und die Südorkney Inseln reichen allerdings nicht bis zur Oberfläche. Dreht die Strömung des Weddellwirbels nun im Westteil des Weddellmeeres nach Norden, so kann ein Teil östlich der Antarktischen Halbinsel über den Südantillenrücken fließen. Aufgrund der steilen Wände und den Informationen aus den SSH-Daten in diesem Bereich gibt es aber keine südwärtige Strömung mehr, die eine zweite Wirbelzelle schließen würde. Also wählt ein Teil des Wirbels den Weg nach Norden östlich der Antarktischen Halbinsel und der andere Teil den Weg bei 20°W, wo es keine topographischen Hindernisse gibt. Die Geschwindigkeiten im Weddellwirbel erreichen Beträge von 6-8 cms^{-1} . Am größten ist die Geschwindigkeit bei ungefähr 46°W, 62°S mit nahezu 10 cms^{-1} . Dies sind typische Werte verglichen mit Meßwerten, wie man sie auch bei Fahrbach et al. (1994a,b) [17, 18] findet. Direkt an der Küste der antarktischen Halbinsel werden nur bis zu 2 cms^{-1} erreicht.

Der Weddellwirbel behält mit zunehmender Tiefe die oben beschriebene Struktur (siehe Bilder 5.7 - 5.13). Er lehnt sich an den Kontinentalhang an und bildet den erwarteten westlichen Randstrom. Bis zu einer Tiefe von ungefähr 2500m kann er noch den Südantillenrücken bei ca. 60°S und 46°W überströmen. In größeren Tiefen existiert nur noch die zweite nordwärtige Strömung bei 20°W. Der Einstrom in das Weddellmeer bleibt auf das Gebiet östlich des Nullgrad-Meridians begrenzt. Im Bereich bis etwa 2500m Tiefe werden in beiden nach Norden gerichteten Strömungen 6-8 cms^{-1} und über den Südantillenrücken 10 cms^{-1} erreicht. Beim Einstrom in Osten treten bis zu 6 cms^{-1} auf. Direkt auf dem Rand des Modellgebiets bei 18-20°E gibt es höhere Werte, was aber durch Randeffekte versucht werden kann. Schließlich steht hier bei der Berechnung der Gradienten keine volle Umgebung zur Verfügung. Aufgrund der nordwärtigen Strömung bei 20°W stimmt die Zirkulation im Weddellmeer nur bedingt mit den entsprechenden Abbildungen bei Reid (1989) [62] überein. Den Einstrom ins Weddellmeer findet man dort ebenfalls im Bereich bei 20°E. Außerdem sieht das Strömungsbild entlang des antarktischen Kontinents recht ähnlich aus. Es gibt aber keine Strömung zwischen der Spitze der Antarktischen Halbinsel und den Südorkney-Insel über den Südantillenrücken hinweg. Das dies im Modell passiert, mag sicherlich daran liegen, daß die Inseln auf dem Südantillenrücken im Modellgitter nicht die Meeresoberfläche erreichen. Eine ähnliche Überströmung findet man übrigens auch in dem Modell von England und Garçon (1994) [16] in 2250m Tiefe. Der nach Osten fließende Teil des Wirbels im Bereich von 60°S ist dagegen wieder besser übereinstimmend mit Reid (1989) [62]. In größeren Tiefen als 2500m liegt die Zelle des Weddellwirbels dann weiter östlich als es bei Reid der Fall ist. Die Struktur des Weddellwirbels, die an der Oberfläche an die SSH-Daten angepaßt wurde, setzt sich also bis in die Tiefe fort.

Der ACC behält auf den ersten 2000 Metern (Abb. 5.8 - 5.10) weitestgehend seine zonale Drift von der Oberfläche. Er strömt mit bis zu 11 cms^{-1} durch die Drake Passage. Im Südpazifik dreht er dann scharf nach Norden. Dieses Eindrehen erscheint stärker als in den Abbildungen bei Reid (1989) [62]. Es wird aber auch von dem Ausstrom aus dem Weddellmeer in das Südpazifik Meer induziert. Der ACC schwenkt dann wieder nach Osten und strömt dann im Wesentlichen zonal zwischen 44°S und 55°S wie bei Reid weiter und verläßt schließlich den Südatlantik. Die Geschwindigkeit beträgt dabei $4\text{-}5 \text{ cms}^{-1}$ und steigert sich nach Überschreiten des mittelatlantischen Rückens nochmal auf ca. 7 cms^{-1} .

Ein Ein- und Rückstrom des Agulhas südlich von Afrika, wie er bei Reid (1989) [62] um 20°E zu sehen ist, wird hier nicht wiedergegeben. Dieses Signal war aber auch schon an der Oberfläche nur schwach ausgeprägt. Das kann aber an der Begrenzung des Modells bei 20°E liegen, denn bei Barnier et al. (1996) [4] ist diese Strömung des Agulhas auch nicht zu erkennen. Bei England und Garcon (1994) [16] tritt sie bei 20°E und östlich davon auf. In deren Arbeit ist westlich von Südafrika eine nordwestlich verlaufende Strömung zu sehen, die zumindest bis 900 m Tiefe im Geschwindigkeitsbereich um $3\text{-}4 \text{ cms}^{-1}$ liegt. Dieses Strömungsmuster findet man auch hier, wo es allerdings auch noch in 4000 m Tiefe zu finden ist. Die Geschwindigkeiten liegen ebenfalls bei $3\text{-}4 \text{ cms}^{-1}$ und nehmen in der Tiefe dann auf um die 2 cms^{-1} ab. Direkt an der südafrikanischen Küste treten zwei, drei südwärts gerichtete Geschwindigkeitspfeile auf, die aber durch Randeffekte versucht worden sein können und daher nicht weiter betrachtet werden.

Im Nordwesten wird vom Modell der westliche Randstrom (Brasilstrom) entlang der südamerikanischen Küste in Richtung Süden wiedergegeben (Bilder 5.8 - 5.13), der sowohl bei Reid (1989) [62] als auch in den Modellergebnissen von England und Garcon (1994) [16] und Barnier et al. (1996) [4] gezeigt wird. Dabei werden Geschwindigkeiten bis zu 10 cms^{-1} erreicht. Das liegt in der Größenordnung, die auch in den beiden eben genannten Modellen anzufinden ist. Südlich von 40°S dreht er dann nach Osten und driftet parallel zum ACC. Zwischen 40°S und 50°S trifft er auf die aus Süden kommenden nordwärts gerichteten Strömungen. Die feinen Strukturen, wie sie Reid (1989) [62] zeigt, werden vom Modell allerdings nicht wiedergegeben. Das war aber auch nicht unbedingt zu erwarten, weil dafür die Auflösung des Gitters noch zu grob ist und weil schon die oberflächennahe Zirkulation aus den SSH-Daten diese Feinheiten nicht wiedergegeben hat. Im Bereich zwischen 30°S und 40°S und 30°W und 44°W ist bis 2500m Tiefe eine Rezirkulationzelle zu erkennen. Diese findet man beispielsweise bei Reid (1989) [62] in 2000m Tiefe, bei Barnier et al. (1996) [4] noch in 2750m und bei England und Garcon (1994) [16] etwas kleiner in 280m und etwas ausgedehnter in 2250m Tiefe. Die Geschwindigkeiten im nordöstlichen Bogen dieses Wirbels liegen wie bei den beiden zitierten Modellen in der Größenordnung von wenigen Zentimetern pro Sekunde.

Einen Ausstrom nach Norden über 30°S hinaus, gibt es zwischen 10°W und dem Greenwich-Meridian. Die Geschwindigkeiten liegen in diesem Gebiet bei 4 cms^{-1} . Bei Reid (1989) [62] findet man eine ähnliche nach Norden laufende Strömung über den Breitengrad 30°S . Sie liegt aber weiter westlich bei circa 20°W und kehrt dann weiter im Osten wieder zurück. Letzteres ist im Modellergebnis nicht zu finden.

Die Abbildung (5.14) zeigt die Zirkulation in einer Tiefe von 4675m, wo das Argentinische Becken, das Kap Becken und das Weddellmeer voneinander getrennt sind. Im Weddellwirbel

liegen hier die Geschwindigkeiten im Bereich von $2\text{-}5\text{ cms}^{-1}$. Es gibt aber ein Maximum mit 7 cms^{-1} . Der nach Westen strömende Teil des Wirbels erreicht keine Geschwindigkeiten über 3 cms^{-1} und ist im Gegensatz zum Bild (5.13) in circa 4000m Tiefe nur noch ansatzweise zu erkennen. Im Rahmen der obigen Diskussion des Weddellwirbels in Oberflächennähe und im Innern des Ozeans ist er aber den Darstellungen bei Reid (1989) [62] ähnlich. Ein Vergleich mit dem Modellergebnis in 4375m Tiefe von Barnier et al. (1996) [4] zeigt, daß die Geschwindigkeitsbeträge dort geringer sind und daß dort die ostwärtige Strömung nur schwach und die südwärts gerichtete eigentlich gar nicht auftritt.

Reid (1989) [62] zeigt im Argentinischen Becken in 4500m Tiefe einen zyklonalen Wirbel. Nach Whitworth et al. (1991) [90] soll die Westströmung dieses Wirbels als westlicher Randstrom Bodenwasser nach Norden transportieren, das vor allem im Weddellmeer gebildet wird (Foster et al., 1987 [21], Fahrbach et al., 1994 [17]). Von Weddellmeer aus soll es um den Bogen des Südantillenrückens und zum Teil durch das Südantillenmeer strömen. Von dem Wirbel im Argentinischen Becken wird es dann nach Norden transportiert. Dieses Zirkulationsmuster wird in der Modellösung so nicht wiedergegeben. Die Strömung zwischen dem Weddellmeer und dem Argentinischen Becken ist nicht eindeutig (Bild 5.13). Die Geschwindigkeiten liegen bei ein bis maximal zwei Zentimetern pro Sekunde und es gibt Geschwindigkeitspfeile, die nach Süden zeigen. Bei diesem Bild ist eine Umströmung des Südantillenrückens nicht eindeutig zu entdecken. Im Argentinischen Becken lehnt sich zwar eine Westströmung an den südlichen Beckenrand an, aber das Strömungsmuster in diesem Becken wird von dem starken Einstrom im Norden dominiert. Dieser Einstrom setzt sich aus den oberen Schichten bis in die Tiefe durch. Das aber in das Argentinische Becken Information aus Süden hereinkommen, zeigt sich daran, daß der Strom aus Norden es nicht schafft, den südlichen Beckenrand zu erreichen. Er dreht stattdessen schon vorher nach Osten ein, wovon ein Teil dann weiter östlich in die Westströmung am Südrand des Beckens eintritt. Dieses Muster zeigt eine eingeschränkte Übereinstimmung mit den Modellergebnissen von Barnier et al. (1996) [4]. Dort sieht die Zirkulation im Argentinischen Becken in 4375m Tiefe so aus, daß es eine Westströmung im Norden des Beckens gibt. Diese sieht ähnlich, wie die in den Bildern (5.13) und (5.14) gezeigten, aus. Auch der westliche Randstrom am Südrand des Beckens ist in der Arbeit nur schwach ausgeprägt.

Auch im Kap Becken gibt es Ähnlichkeiten zwischen der Modellösung (Abb. 5.13, 5.14) und den Ergebnissen von Barnier et al. (1996) [4]. Die zyklonale Strömung, wie sie bei Reid (1989) [62] präsentiert wird, ist allerdings nicht zu sehen. Im Südteil des Beckens wird wie bei Reid ein Westströmung gebildet, die dann am Beckenrand im Westen nach Norden schwenkt. Eine südwärts gerichtete Strömung an der Küste Südafrikas entlang zeigen aber nur wenige Geschwindigkeitsvektoren. Andererseits erreichen sie aber Beträge bis zu 4 cms^{-1} . Im Übrigen wird das Becken von einer Nord- bzw. Nordwestströmung durchzogen, die es bei Reid (1989) [62] nicht gibt.

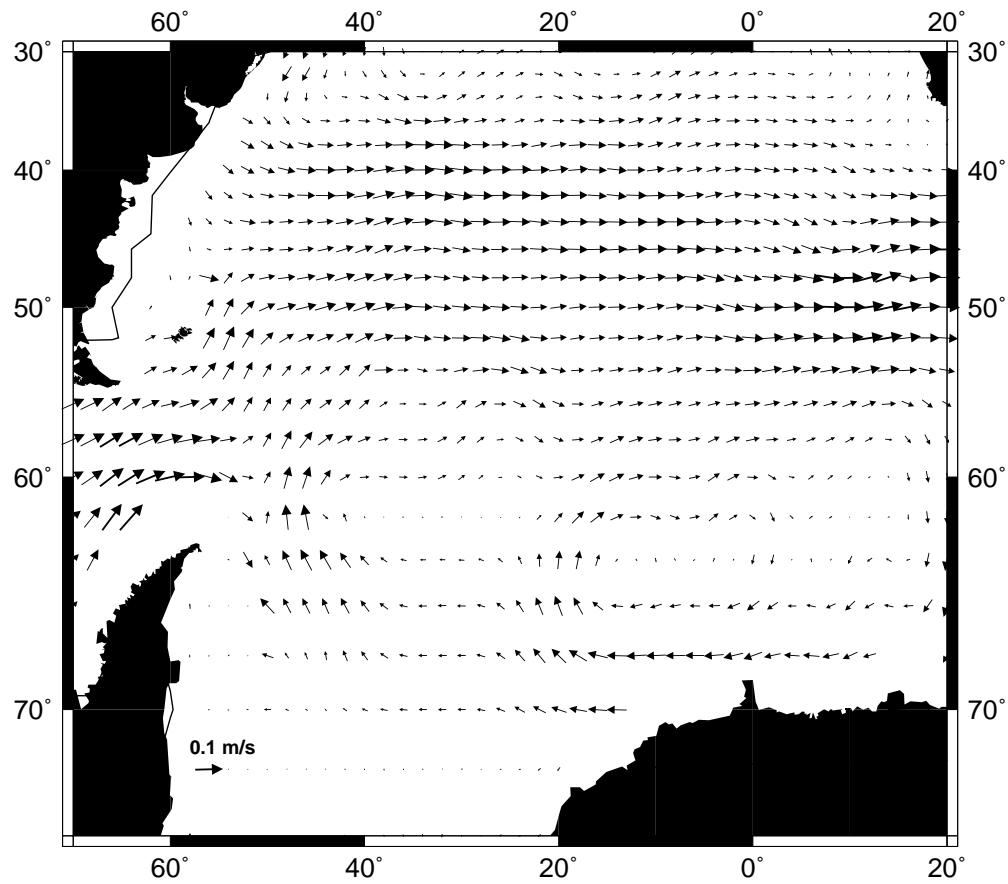


Abbildung 5.7: Horizontales Geschwindigkeitsfeld (u, v) in 100m Tiefe.

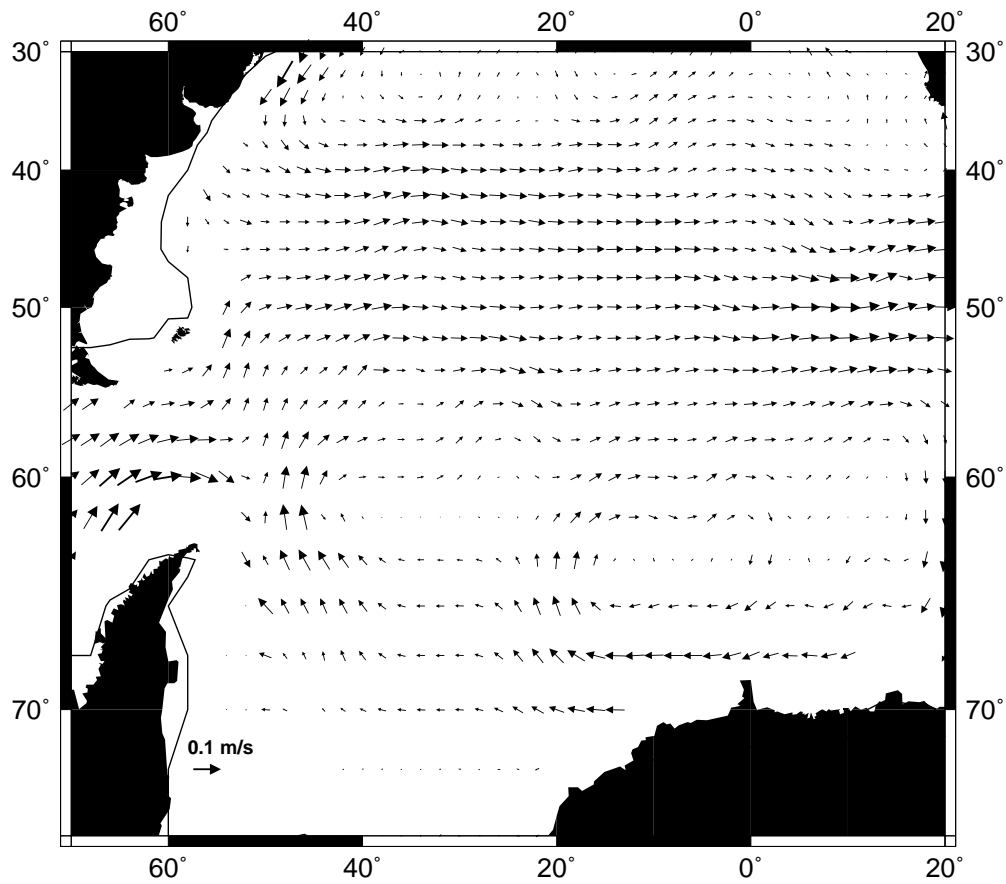


Abbildung 5.8: Horizontales Geschwindigkeitsfeld (u, v) in 400m Tiefe.

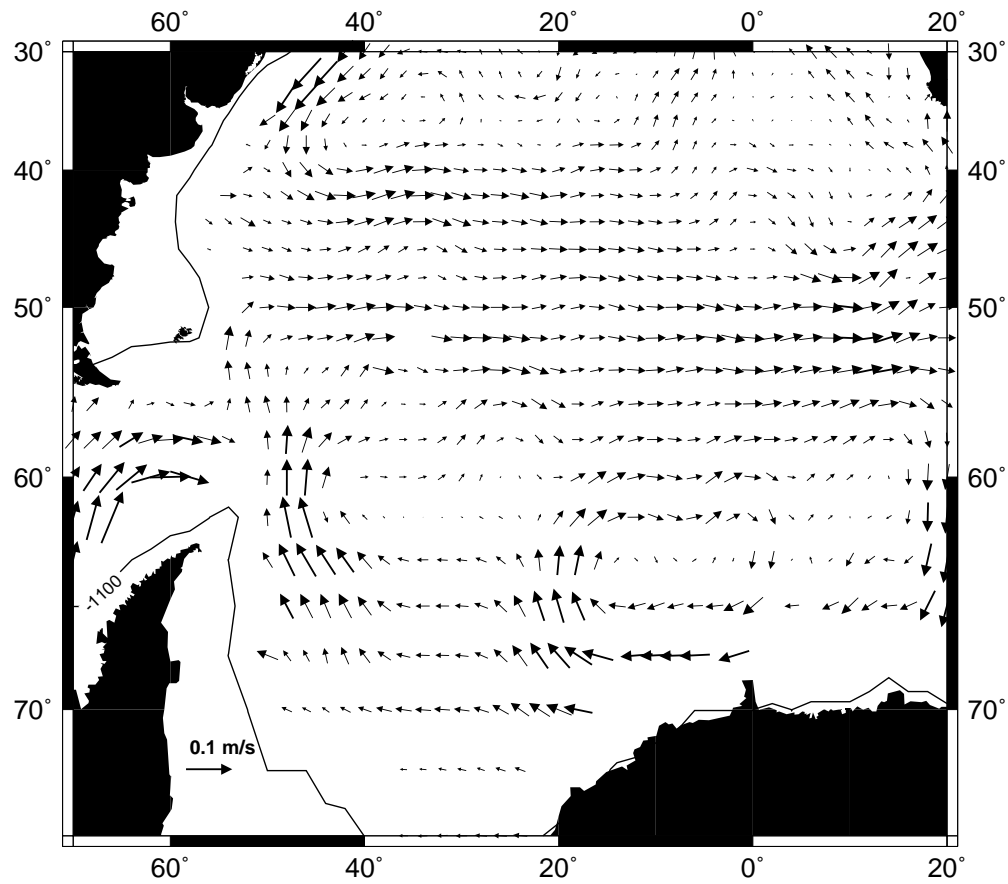


Abbildung 5.9: Horizontales Geschwindigkeitsfeld (u, v) in 1112m Tiefe.

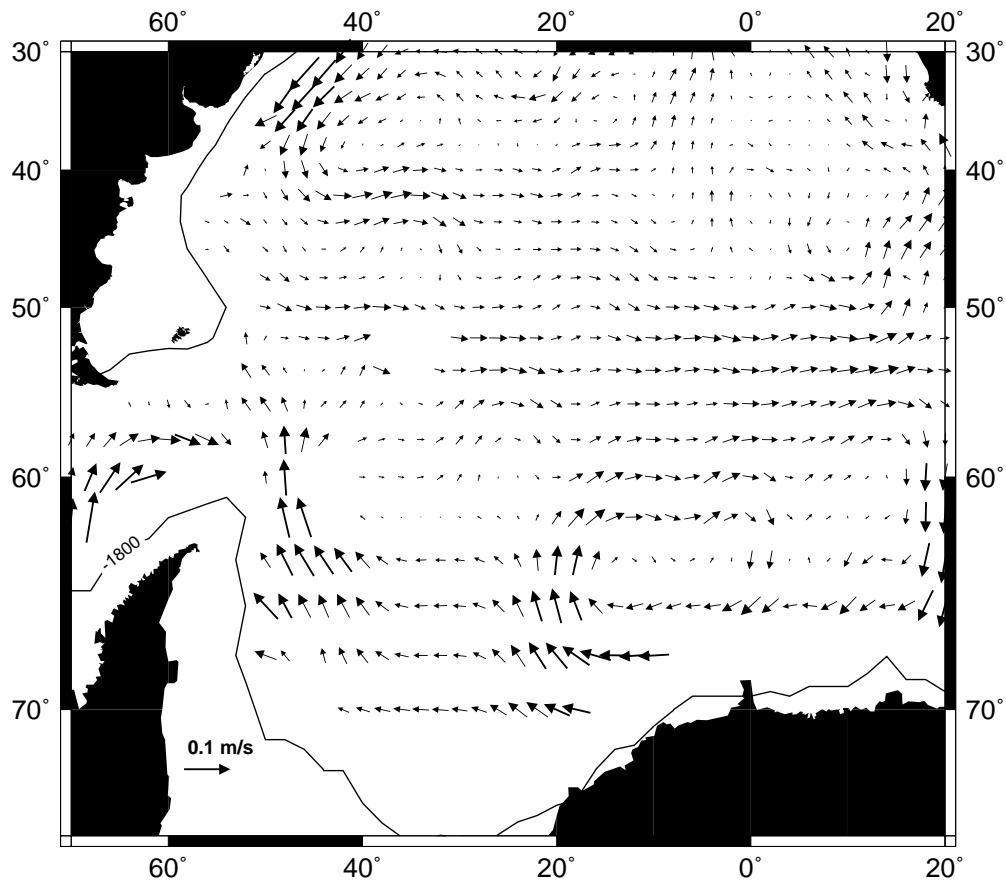


Abbildung 5.10: Horizontales Geschwindigkeitsfeld (u, v) in 1825m Tiefe.

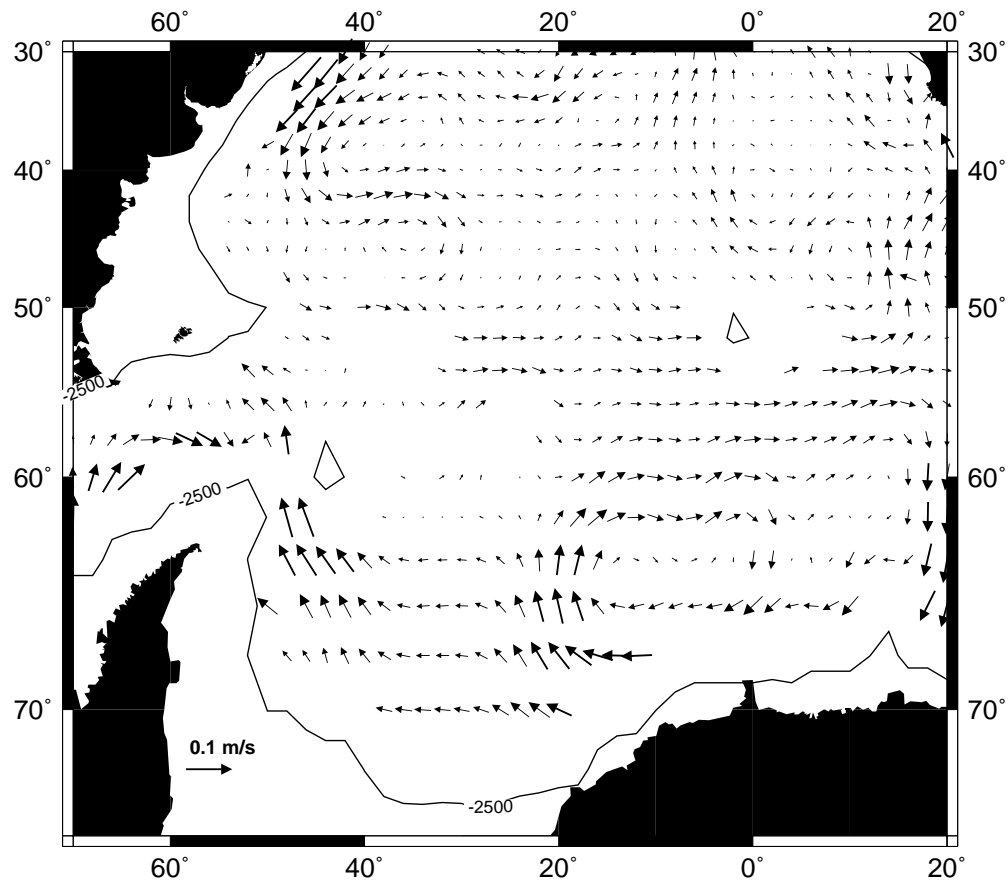


Abbildung 5.11: Horizontales Geschwindigkeitsfeld (u, v) in 2537m Tiefe.

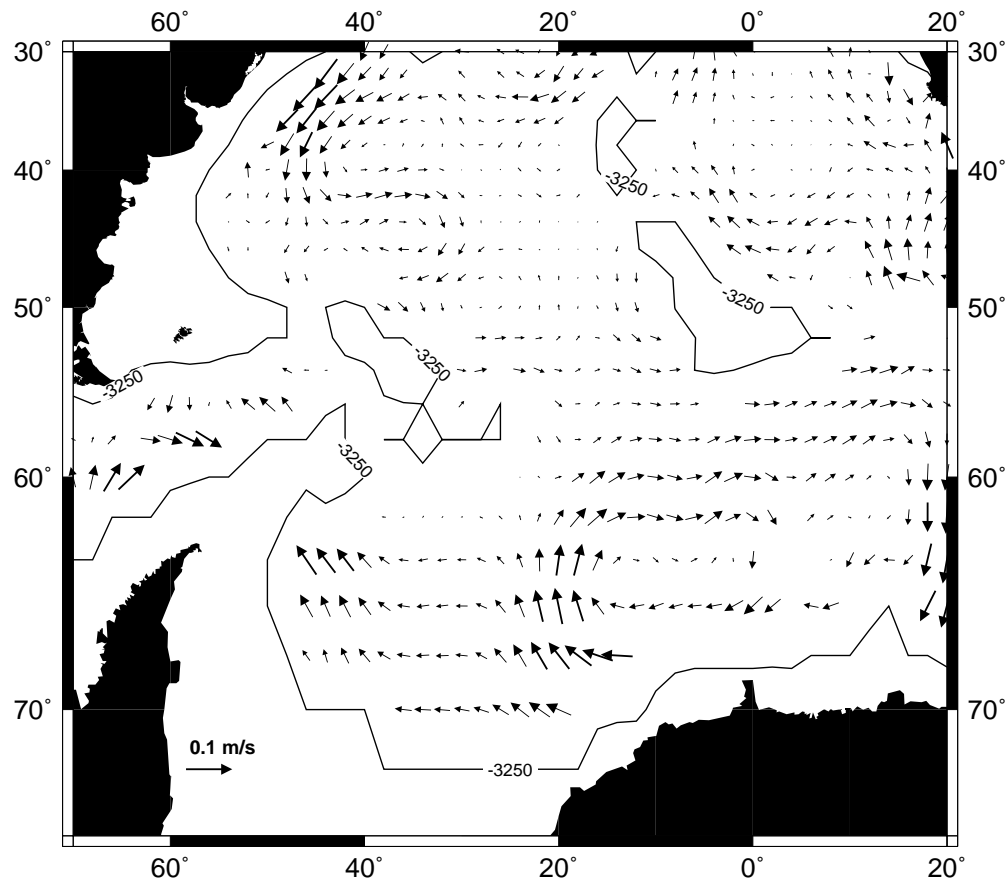


Abbildung 5.12: Horizontales Geschwindigkeitsfeld (u, v) in 3250m Tiefe.

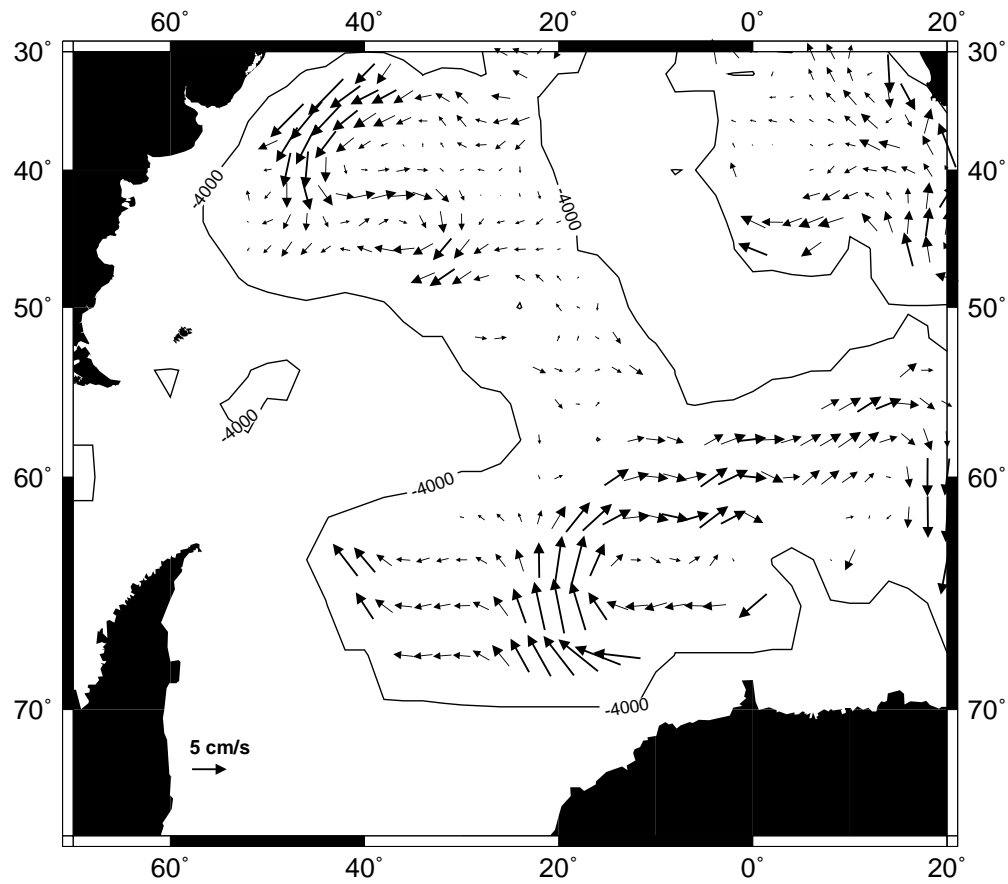


Abbildung 5.13: Horizontales Geschwindigkeitsfeld (u, v) in 3962m Tiefe.

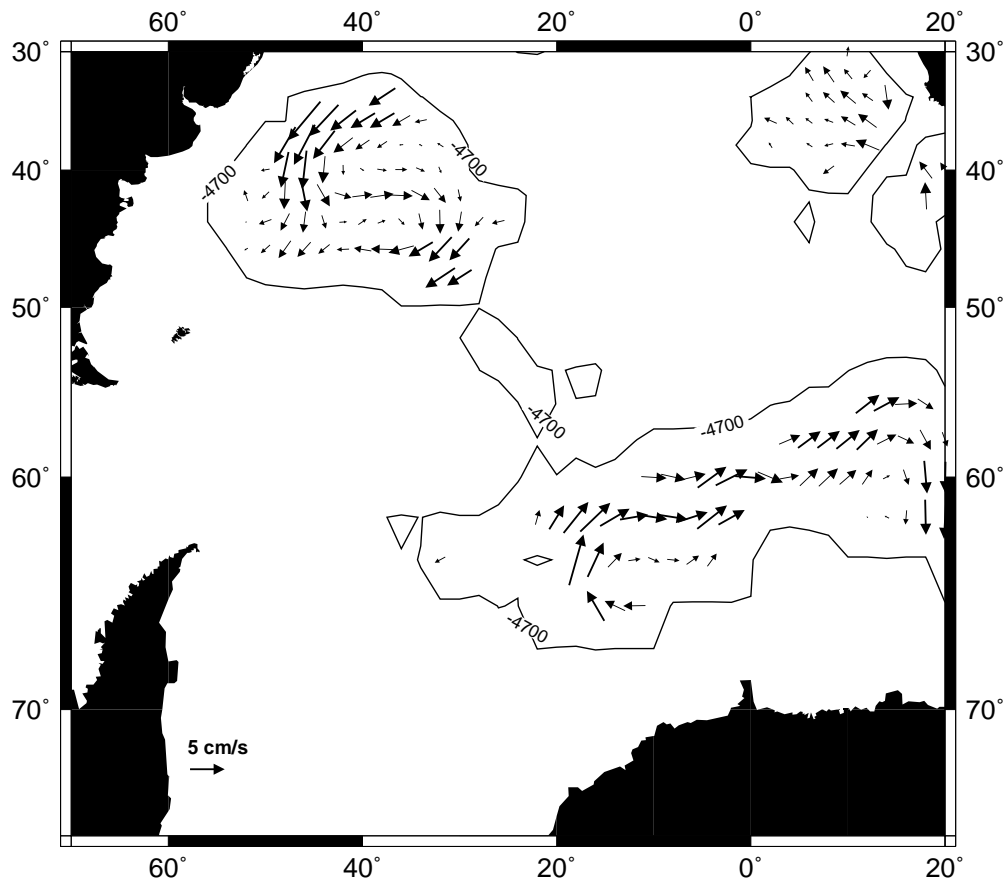


Abbildung 5.14: Horizontales Geschwindigkeitsfeld (u, v) in 4675m Tiefe.

5.3 Transporte

Die Transporte über die offenen Ränder des Modellgebiets stellen sich folgendermaßen ein: Der Volumentransport wurde so vorgegeben (siehe Abschnitt 4.3), daß im Westen durch die Drake Passage 130 Sv einströmen und im Osten den Südatlantik wieder verlassen. Der Netto-Volumentransport über 30°S und 74°S ist jeweils gleich null gesetzt worden. Die Aufteilung in die Transporte einzelner Wassermassen ist in Tabelle 5.2 aufgelistet. Die Klassifizierung der Wassermassen ist identisch mit der Einteilung von Rintoul (1991) [64]. Diese Klassifizierung in Oberflächenwasser, Antarktischen Zwischenwasser (AAIW), Tiefenwasser – bestehend aus Nordatlantischen Tiefenwasser (NADW) und Zirkumpolaren Tiefenwasser (CDW) – und Bodenwasser, wozu das Antarktische Bodenwasser (AABW), das Weddellmeer-Tiefenwasser (WSDW) und das Weddellmeer-Bodenwasser (WSBW) gehören, richtet sich nach der potentiellen Dichte σ : Wasser mit $\sigma_0 < 26.80$ ist Oberflächenwasser, Zwischenwasser liegt im Bereich von $\sigma_0 > 26.80$ und $\sigma_1 < 32.36$, Tiefenwasser im Bereich von $\sigma_1 > 32.36$ und $\sigma_3 < 41.66$ und zum Bodenwasser gehört Wasser mit $\sigma_3 > 41.66$. Die Abbildungen (5.15) und (5.16) zeigen die Verteilung der verschiedenen Wassermassen entlang der offenen Ränder bei 20°E und 30°S. Man sieht, daß die Verteilung im Modellergebnis gut mit der Verteilung aus den hydrographischen Daten (Abschnitt 2.4.1) übereinstimmt. Weitere Bilder, die die Wassermassen-Verteilung im Modell zeigen, werden später im Abschnitt 5.5 präsentiert.

Die Modelltransporte zeigen qualitative Übereinstimmungen zu den Transporten in Rintouls Arbeit (Tabellen 5.3 und 5.4). Dies gilt auch im Vergleich zu den Transporten aus den wirbelaflösenden Modellen von Semtner und Chervin (1988, 1992) [77, 76] (Tabelle 5.5) und dem FRAM-Modell von Webb et al. (1991) [86, 85] (Tabelle 5.6). In diesen beiden Modellen werden allerdings durch die Drake Passage bei 68°W und über den Schnitt bei 20°E jeweils rund 209 Sv beziehungsweise 185 Sv transportiert. Weiter ist anzumerken, daß Tabelle 5.3 die Transporte des Standardfalls bei Rintoul (1991) [64] und Tabelle 5.4 des “Warm Water Path”-Falls zeigt. Im letzten Fall gibt es einen signifikanten Einstrom von warmen Oberflächenwasser aus dem Indischen Ozean in den Südatlantik, womit Nordatlantisches Tiefenwasser kompensiert und somit Zwischenwasser gebildet werden soll. Dieser Effekt wird auch von Gordon et al. (1992) [33] vorgeschlagen.

Die Transporte aus den hier präsentierten Modellergebnissen zeigen (Tabelle 5.2), daß durch die Drake Passage bei 70°W weder Oberflächen- noch Bodenwasser aber 90 Sv Zwischenwasser und 40 Sv Tiefenwasser transportiert wird. Dies steht in ganz guter Übereinstimmung mit Rintouls Standardfall (Tabelle 5.3) und vom Verhältnis her auch mit den beiden wirbelaflösenden Modellen (Tabellen 5.5, 5.6). Über dem Modellrand im Osten werden im Wesentlichen kein Oberflächewasser, 94.7 Sv Zwischenwasser, 25.6 Sv Tiefenwasser und 9.6 Sv Bodenwasser in den Indischen Ozean hinein transportiert. Im Vergleich zu Rintouls Standardfall ist der Zwischenwasser-Transport um die Menge größer, um die der Tiefenwasser-Transport kleiner ist. Der Wert von 9.6 Sv bezüglich des Bodenwassers liegt zwischen Rintouls Werten des Standardfalls und des “Warm Water Path”-Falls. Über 30°S findet im Gegensatz zu Rintouls Werten nur ein signifikanter Transport von Zwischenwasser nach Norden und von Tiefenwasser nach Süden statt. Die berechneten Transporte über den südlichen Rand des Modellgebiets sind sehr klein. Zusammengefaßt kann man feststellen, daß das Modell 9.6 Sv Bodenwasser produziert. Dies stimmt sehr gut mit Rintouls Standardfall überein, wo 9 Sv über 68°S nach Norden strömen und dann später den Südatlantik

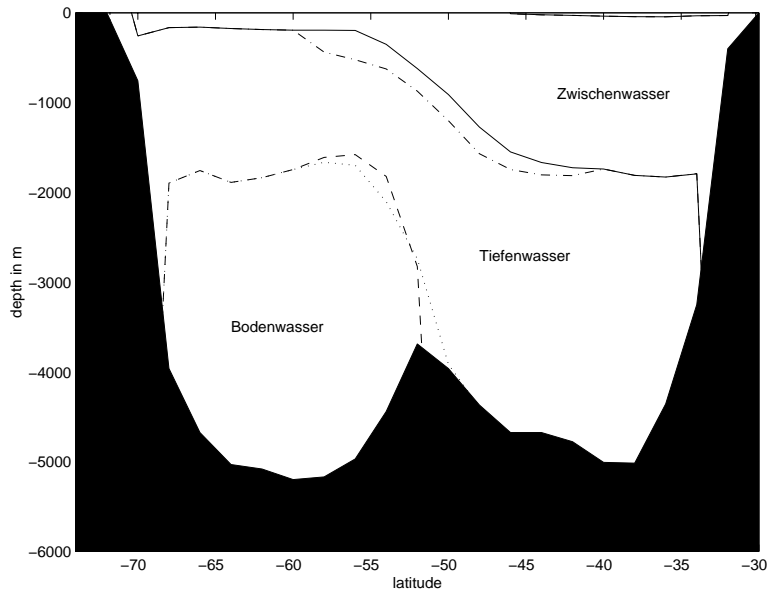


Abbildung 5.15: Wassermassen im Südatlantik entlang $20^\circ E$. Dargestellt sind $\sigma_1 = 32.36$ (— Daten; - - - Modell), $\sigma_3 = 41.66$ (- - - Daten; \cdots Modell) und $\sigma_0 = 26.80$ (durchgezogene Linie oberhalb von -50 m am rechten oberen Bildrand).

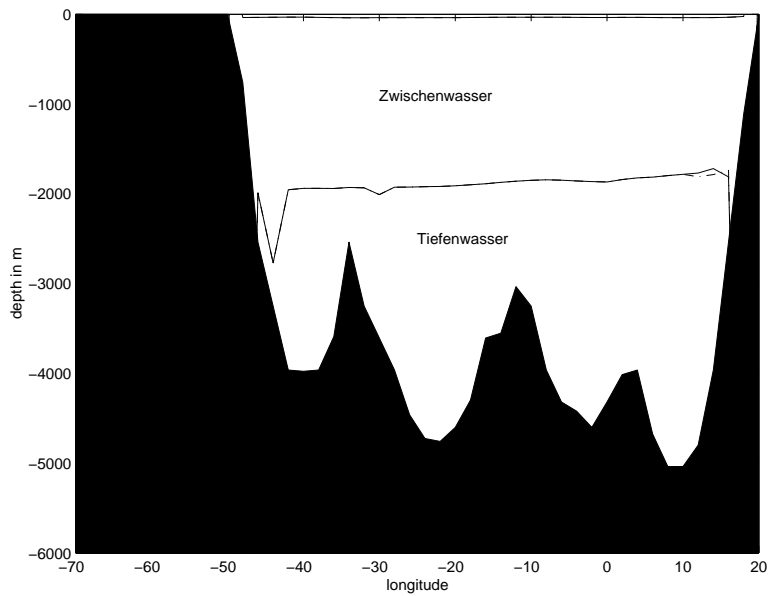


Abbildung 5.16: Wassermassen im Südatlantik entlang $30^\circ S$. Dargestellt sind $\sigma_1 = 32.36$ (— Daten; - - - Modell) und $\sigma_0 = 26.80$ (durchgezogene Linie oberhalb von -50 m).

Wassermassen	pot. Dichte σ	30°S	74°S	70°W	20°E
Oberflächenwasser	$\sigma_0 < 26.80$	-1.0	0.0	0.0	0.1
Zwischenwasser	$\sigma_0 > 26.80$ und $\sigma_1 < 32.36$	27.0	-0.26	90.0	94.7
Tiefenwasser	$\sigma_1 > 32.36$ und $\sigma_3 < 41.66$	-26.0	0.50	40.0	25.6
Bodenwasser	$\sigma_3 > 41.66$	0.0	-0.24	0.0	9.6
Gesamt		0.0	0.0	130.0	130.0

Tabelle 5.2: *Volumentransporte in Sv der Hauptwassermassen über die offenen Ränder des Modellgebiets. Negative Vorzeichen stehen für Transporte nach Süden bzw. nach Westen. Die Klassifizierung der Wassermassen folgt analog zu Rintoul (1991) [64] der potentiellen Dichte σ . Das Zwischenwasser besteht aus dem Antarktischen Zwischenwasser (AAIW). Zum Tiefenwasser gehören das Nordatlantische Tiefenwasser (NADW) und das Zirkumpolare Tiefenwasser (CDW) und zum Bodenwasser das Antarktische Bodenwasser (AABW), das Weddellmeer-Tiefenwasser (WSDW) und das Weddellmeer-Bodenwasser (WSBW).*

Wassermassen	pot. Dichte σ	32°S	68°W	20°E
Oberflächenwasser	$\sigma_0 < 26.80$	8	3	6
Zwischenwasser	$\sigma_0 > 26.80$ und $\sigma_1 < 32.36$	5	83	70
Tiefenwasser	$\sigma_1 > 32.36$ und $\sigma_3 < 41.66$	-17	43	49
Bodenwasser	$\sigma_3 > 41.66$	4	0	5
Gesamt		0	129	130

Tabelle 5.3: *Volumentransporte in Sv der Hauptwassermassen bei Rintoul (1991) [64] (Standardfall). Negative Vorzeichen stehen für Transporte nach Süden bzw. nach Westen.*

Wassermassen	pot. Dichte σ	32°S	68°W	20°E
Oberflächenwasser	$\sigma_0 < 26.80$	11	0	-13
Zwischenwasser	$\sigma_0 > 26.80$ und $\sigma_1 < 32.36$	8	50	54
Tiefenwasser	$\sigma_1 > 32.36$ und $\sigma_3 < 41.66$	-22	73	73
Bodenwasser	$\sigma_3 > 41.66$	3	6	16
Gesamt		0	129	130

Tabelle 5.4: *Volumentransporte in Sv der Hauptwassermassen bei Rintoul (1991) [64] ("Warm Water Path"). Negative Vorzeichen stehen für Transporte nach Süden bzw. nach Westen.*

Wassermassen	pot. Dichte σ	32°S	68°W	20°E
Oberflächenwasser	$\sigma_0 < 26.80$	12.0	1	-5
Zwischenwasser	$\sigma_0 > 26.80$ und $\sigma_1 < 32.36$	4.7	135	139
Tiefenwasser	$\sigma_1 > 32.36$ und $\sigma_3 < 41.66$	-18.0	73	75
Bodenwasser	$\sigma_3 > 41.66$	1.3	0	-1
Gesamt		0.0	209	208

Tabelle 5.5: *Volumentransporte in Sv der Hauptwassermassen bei Semtner und Chervin (1988, 1992) [77, 76]. Negative Vorzeichen stehen für Transporte nach Süden bzw. nach Westen.*

Wassermassen	pot. Dichte σ	32°S	68°W	20°E
Oberflächenwasser	$\sigma_0 < 26.80$	11.0	0	-11.6
Zwischenwasser	$\sigma_0 > 26.80$ und $\sigma_1 < 32.36$	8.0	124	129.0
Tiefenwasser	$\sigma_1 > 32.36$ und $\sigma_3 < 41.66$	-22.0	58	69.0
Bodenwasser	$\sigma_3 > 41.66$	3.2	2	-1.4
Gesamt		0.2	184	185

Tabelle 5.6: *Volumentransporte in Sv der Hauptwassermassen beim FRAM-Modell von Webb et al. (1991) [86, 85]. Negative Vorzeichen stehen für Transporte nach Süden bzw. nach Westen.*

Transporte	30°S	74°S	70°W	20°E
Volumentransport in Sv	0	0	130	130
Massentransport in Mts^{-1}	-0.35	0.004	134	134
Wärmetransport in PW	0.88	0.0033	1.3	1.6
Salztransport in kts^{-1}	-7.9	0.44	4600	4600

Tabelle 5.7: *Transporte über die offenen Ränder des Modellgebiets. Negative Vorzeichen stehen für Transporte nach Süden bzw. nach Westen.*

verlassen. Das gesamte Bodenwasser (AABW, WSDW und WSBW) des Modells, das vornehmlich im Weddellmeer auftritt und gebildet wird, wird nach Osten in den südlichen Teil des Indischen Ozeans transportiert. Das kein Transport nach Norden über 30°S stattfindet, überrascht nicht weiter. Denn die modellierte Zirkulation in der Tiefe und am Boden zeigt ja – wie im Abschnitt 5.2 dargestellt wurde – keine Strömung (Bild 5.14), die analog der Beschreibung von Reid (1989) [62] und Whitworth et al. (1991) [90] aus dem Weddellmeer nach Norden in das Argentinische Becken und dort weiter als westlicher Randstrom über 30°S strömt. Außerdem findet man auch in den (klimatologischen) hydrographischen Daten kein Bodenwasser mehr bei 30°S (siehe Bild 5.16). Ein Nettotransport von Oberflächenwasser über die offenen Ränder tritt nur sehr spärlich auf. Dies geschieht aber nicht unerwartet, da sich Oberflächenwasser nur in den oberen 50 Metern nördlich von ungefähr 46°S findet (Bilder 5.15, 5.16). Der Eintrag von 1 Sv in den Südatlantik über 30°S hängt mit der oberflächennahen Zirkulation und damit mit den Referenzgeschwindigkeiten (Abb. 5.5) zusammen. Er erfolgt mit dem Einstrom des Brasilstroms in das Modellgebiet. Der Transport von Nordatlantischen Tiefenwasser (NADW) in den Südatlantik hinein hat mit 26 Sv eine zufriedenstellende Größe. Der Transport an Antarktischen Zwischenwasser (AAIW) nach Norden ist aber recht groß. Ebenso ist auch der Zwischenwasser-Transport in den südlichen Indischen Ozean um circa 25 Sv größer als in Rintouls Arbeit. Andererseits ist dort aber der Transport an Tiefenwasser um ungefähr 25 Sv niedriger als bei Rintoul. Im Zusammenhang gesehen, deutet dies darauf hin, daß die modellierten Salzgehalte eher etwas zu niedrig sind. Diese Vermutung wird später im Abschnitt 5.5 im Prinzip bestätigt. Da das AAIW durch ein Minimum im Salzgehalt charakterisiert wird, scheint es so zu sein, daß ein Teil des eigentlichen Tiefenwassers nicht salzig genug ist, und somit dem AAIW zugeschlagen wird. Berücksichtigt man aber die Übereinstimmungen in der Wassermassen-Verteilung zwischen Modell und Daten entlang 20°E in Bild (5.15), so kann dieser Aspekt nicht die Hauptursache für den großen Transport an Zwischenwasser und dem niedrigen Transport an Tiefenwasser über diesen Rand sein. Der wesentliche Grund ist in der Modellzirkulation über diesen Schnitt zu suchen (siehe Abschnitt 5.2). Sie ergibt die dargestellten Transporte.

In Tabelle 5.7 werden die Massen-, Wärme- und Salztransporte über die offenen Ränder des Modellgebiets aufgelistet. Der Massentransport beträgt im Westen bei 70°W $1.34 \cdot 10^{11}$ kgs⁻¹ in den Südatlantik hinein. Die gleich Menge strömt bei 20°E aus den Südatlantik in den Indischen Ozean. Über dem offenen Rand im Süden gibt es einen Eintrag von $4 \cdot 10^6$ kgs⁻¹ und im Norden bei 30°S von $3.5 \cdot 10^8$ kgs⁻¹. Die Gesamtsumme der Massentransporte weicht also um $3.54 \cdot 10^8$ kgs⁻¹ von null ab. Das sind gerade 0.26% vom Transport durch die Drake Passage.

Der Wärmetransport nach Norden über 30°S beträgt $8.8 \cdot 10^{14}$ W = 0.88 PW. Dieser Wert liegt innerhalb des Wertebereichs, der in der Literatur für 32°S zu finden ist. Beispielsweise beträgt der Transport bei Rintoul (1991) [64] 0.24 PW, bei Schlitzer (1995) [67] 0.53 PW, im FRAM-Modell von Webb et al. (1991) [86, 85] 0.56 PW, bei Semtner und Chervin (1988, 1992) [77, 76] 0.60 PW, bei Hastenrath (1982) [39] 0.69 PW, bei Fu (1981) [24] 0.88 PW und bei Hastenrath (1980) [38] 1.15 PW. Zum Vergleich mit den 26 Sv Nordatlantischen Tiefenwasser (NADW), die in das Modell transportiert werden, sind die 0.69 PW von Hastenrath (1982) [39] mit einem Transport von 27 Sv NADW in den Südatlantik hinein verbunden. Dieser Wärmetransport steht in Zusammenhang damit, daß der südwärtige Strom von NADW durch einen nach Norden aus der Drake Passage kommenden Fluß von

Zwischenwasser (AAIW) kompensiert werden muß (Rintoul, 1991 [64]). Nach dem Vorschlag von Gordon et al. (1992) [33] wird das relativ salzige NADW außerdem durch einen Zustrom von warmen Oberflächenwasser ausgeglichen, daß mit dem Agulhas aus dem Indischen Ozean kommt (Rintoul's "Warm Water Path"-Fall). Dieser Weg ist in den Modellergebnissen aber nicht zu finden. Durch die Drake Passage bei 70°W beträgt der Wärmetransport 1.3 PW. Diesen Wert gibt auch Rintoul (1991) [64] bei 68°W an. Webb et al. (1991) [86, 85] und Semtner und Chervin (1988, 1992) [77, 76] liefern dagegen Werte von 1.95 PW und 2.45 PW. Im Osten bei 20°E kommt das Modell auf 1.6 PW, was höher ist als die 1.12 PW aus der eben zitierten Arbeit von Rintoul. Dies hängt mit dem größeren Transport von Zwischenwasser, das wärmer ist als das Tiefenwasser, über diesen Schnitt zusammen (siehe Tabelle 5.2). Für das FRAM-Modell (Webb et al., 1991 [86, 85]) werden dort 1.15 PW angegeben. Bei Semtner und Chervin (1988, 1992) [77, 76] liegt der Wert bei 1.72 PW. Über den Südrand des Modells werden $3.3 \cdot 10^{12}$ W transportiert.

Die Salztransporte belaufen sich auf $4.6 \cdot 10^9$ kgs^{-1} durch die Drake Passage in den Südatlantik hinein und $4.4 \cdot 10^5$ kgs^{-1} durch den Südrand bei 74°S . Der letzte Wert liegt in dem Bereich von $1.0 \cdot 10^5$ kgs^{-1} bis $7.3 \cdot 10^5$ kgs^{-1} , den Yaremchuk et al. (1998) [94] für den Transport über den Schnitt von der Antarktischen Halbinsel nach Kap Norwegia (WOCE-Schnitt SR4) angeben. Durch den Rand im Norden bei 30°S gelangen $7.9 \cdot 10^6$ kgs^{-1} in den Südatlantik hinein. Bennett (1978) [8] gibt einen Salztransport von $-3.4 \cdot 10^6$ kgs^{-1} bis $2.2 \cdot 10^6$ kgs^{-1} über 24°S und von $-7.0 \cdot 10^6$ kgs^{-1} bis $0.6 \cdot 10^6$ kgs^{-1} über 43°S an, wobei das negative Vorzeichen einen Transport nach Süden – also in den Südatlantik hinein – bedeutet. Über den Modellrand im Osten in den Indischen Ozean hinein ist der Transport genauso groß wie durch die Drake Passage.

5.4 Vertikalgeschwindigkeiten

Die Vertikalgeschwindigkeiten w werden – wie im Abschnitt 2.1 beschrieben – aus der Kontinuitätsgleichung (2.4) berechnet, in der die geostrophisch balancierten horizontalen Geschwindigkeiten u und v eingehen. Die vertikalen Geschwindigkeiten an der unteren Grenze der Ekman-Schicht $w(-h_e)$ wurden mittels des Terms (2.13) der Kostenfunktion J der Rotation des Windfeldes angepaßt. Die Abbildung (5.4) und die Tabelle 5.1 zeigen, daß der Term während der Optimierung um zwei Größenordnungen kleiner geworden ist. In Bild (5.17) ist die Verteilung von w in der Tiefe $h_e = 50\text{m}$ dargestellt. Die vertikalen Geschwindigkeiten liegen in weiten Gebieten des Südatlantiks in der Größenordnung von 10^{-5} ms^{-1} bzw. 10^{-6} ms^{-1} . Dies sind deutlich höhere Werte als die $1.4 \cdot 10^{-7}\text{ ms}^{-1}$, die Munk (1966) [51] als typischen Wert (für den Pazifik) angibt. Zu dem treten aber auch noch Werte von ungefähr $\pm 20 \cdot 10^{-5}\text{ ms}^{-1}$ auf. Dies ist im Weddellmeer, in der Drake Passage und vor Mündung des Rio de la Plata der Fall. Bis auf das Weddellmeer sind dies Gebiete, wo auch die Rotation des Windfeldes (siehe Abs. 2.4.1) ihre Extrema hat. Allerdings sind die Modellwerte zu groß. Im Innern und in der Tiefe liegen die Vertikalgeschwindigkeiten im wesentlichen im Bereich von 10^{-6} ms^{-1} bis $5 \cdot 10^{-5}\text{ ms}^{-1}$, wie beispielsweise die Abbildung (5.18) in -2537m zeigt. Sie liegen damit etwa eine halbe bis eine Größenordnung über den Werten aus anderen Modellen. So sind sie bei Olbers und Wenzel (1989) [56] um die $\pm 2 \cdot 10^{-6}\text{ ms}^{-1}$ groß. Bei Schlitzer (1995) [67] liegen sie zwischen 10^{-6} ms^{-1} und 10^{-5} ms^{-1} .

Wie man gesehen hat, treten die hohen Werte von 10^{-5} ms^{-1} für w schon in der Tiefe auf. Es mag sein, daß dabei eine fehlende Bodenrandschicht im Modell eine Rolle spielt. Die Auflösung des Gitters mit weniger als 500 Metern in Richtung der Normalen zum Boden (siehe Abschnitt 4.1) ist relativ groß. Bei einem horizontalen Gitterabstand in Bodennähe in der Größe von 100-200 km, einem vertikalen Abstand von beispielsweise 300 m und einer Variation in den horizontalen Geschwindigkeiten u und v von unter 1 cms^{-1} können schon Werte für w im Bereich von 10^{-5} ms^{-1} erreicht werden. Wenn man sich an die horizontalen Geschwindigkeiten aus Bild (5.14) in 4675m Tiefe erinnert, treten solche Variationen durchaus auf. Über die auftretenden Probleme, wenn man die vertikale Auflösung des Gitters am Boden verbessern beziehungsweise eine Bodenrandschicht einbauen möchte, wurde bereits im Absatz 4.2 kurz gesprochen. Weiterführende Aspekte in diesem Zusammenhang werden noch im nächsten Kapitel diskutiert.

Die Extrema (vor Südamerika, in der Drake Passage und im Weddellmeer) treten gerade dort auf, wo große Gradienten in der Topographie und somit steile Wände im Modellgitter zu finden sind. Dies trifft auf die Ränder des südamerikanischen Kontinentalschelfs und des Südantillenrückens nach Süden zum Weddellmeer hin zu. Eine Verbesserung bezüglich der steilen Wände könnte eventuell durch eine feinere Auflösung des Gitters im Bereich der großen Gradienten in der Topographie erreicht werden.

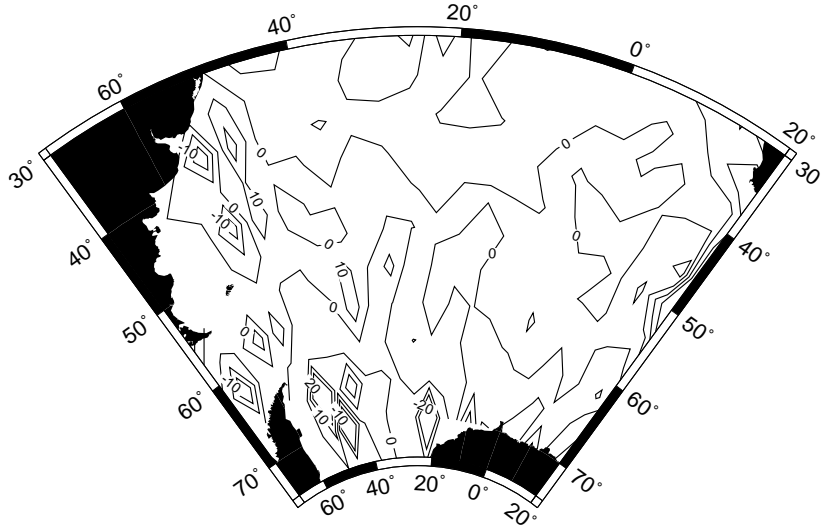
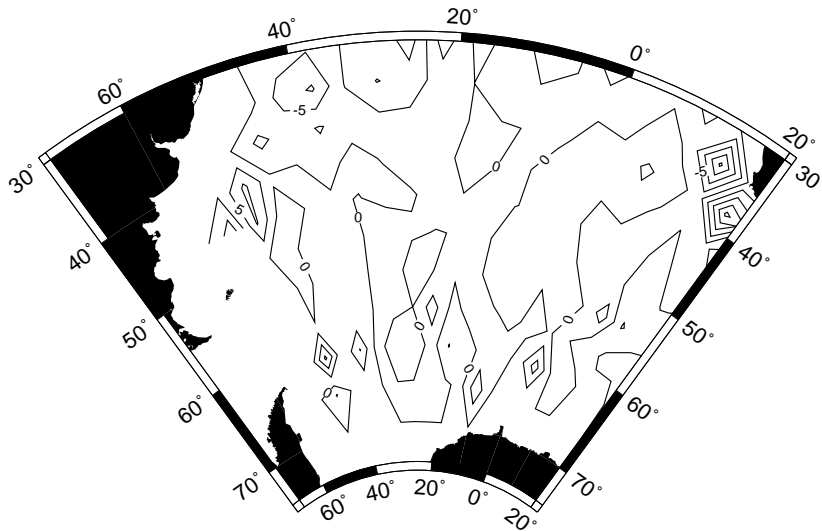


Abbildung 5.17: Vertikalgeschwindigkeit w in 10^{-5}ms^{-1} in 50m Tiefe.



5.5 Temperatur und Salzgehalt

Hydrographische Beobachtungen zeigen, daß im Südlichen Ozean beziehungsweise im Südatlantik zwei für die thermohaline Zirkulation des Weltozeans bedeutende Wassermassen gebildet werden. Die erste ist das antarktische Zwischenwasser (AAIW), das sich durch ein Minimum im Salzgehalt um 34.4 psu auszeichnet. Es sinkt zwischen 50°S und 60°S von der Meeresoberfläche in 900-1000m Tiefe und strömt dann äquatorwärts nach Norden (Dietrich et al., 1975; England, 1992) [14, 15]. Über dem AAIW befindet sich die Warmwassersphäre mit Temperaturen von über 10°C. Als zweites ist das Antarktische Bodenwasser (AABW) zu nennen. So wird im allgemeinen Wasser bezeichnet, das kälter als 2°C ist und einen Salzgehalt von etwa 34.7 psu vorweist (Fahrbach et al., 1994) [17]. Es tritt in der Tiefe auf und entsteht aus Zirkumpolaren Tiefenwasser (CDW), das im gesamten Bereich des Antarktischen Zirkumpolarstroms (ACC) vorkommt (Mantyla und Reid, 1983) [49]. Die Temperatur des CDW's liegt zwischen 0°C und 2.5°C und der Salzgehalt um 34.65 psu. Von Norden her trifft das CDW im Südatlantik auf das salzigere Nordatlantische Tiefenwasser (NADW). Das NADW wird im Nordatlantik gebildet und breitet sich nach Süden bis in den ACC hinein aus. Das AABW wird von Süden her aus Weddellmeer-Tiefenwasser (WSDW) gebildet. Mit dem Weddellwirbel gelangt CDW ins östliche Weddellmeer. Dort wird es durch Winterwasser (WW - Temperatur beim Gefrierpunkt, niedriger Salzgehalt) modifiziert. Im Weddellmeer wird beim Anfrieren von Meerwasser am Meer- oder Schelfeis Salz ausgeschieden. Dadurch nimmt der Salzgehalt des Schelfwassers (WSW) zu. Es vermischt sich mit dem sogenannten Warmen-Tiefenwasser (WDW) und dem modifizierten CDW. Wird ein Wert von circa 34.62 psu überschritten, sinkt es unterhalb des WDW's nach unten und bildet das sehr kalte Weddellmeer-Bodenwasser (WSBW). Das WSBW strömt mit dem Weddellwirbel nach Osten und wird durch CDW modifiziert (Gill, 1973; Foster und Middleton, 1980; Mantyla und Reid, 1983; Foster et al., 1987; Toggweiler und Samuels, 1995) [30, 22, 49, 21, 81]. Dieses ältere WSBW wird als Weddellmeer-Tiefenwasser (WSDW) bezeichnet. Weil es eine geringere Dichte hat als das WSBW, kann es aus dem Weddellmeer strömen und zur Bildung des AABWs beitragen. 70% des AABWs im Südlichen Ozean sollen mit der Wassermassenbildung im Weddellmeer zusammenhängen (Fahrbach et al., 1994) [17].

Kommen wir nun zur Verteilung von Temperatur und Salzgehalt in der Modelllösung. Aus der Abbildung (5.4) und der Tabelle 5.1 ist zu sehen, daß auch die beiden Terme J_T (Gl. 2.14) und J_S (Gl. 2.15) der Kostenfunktion J während der Minimierung deutlich kleiner geworden sind. Betrachten wir zunächst die Temperatur T (Bild 5.19), den Salzgehalt S (Bild 5.21) und die Dichte $\sigma = \rho - 1000$ (Bild 5.23) auf einer horizontalen Fläche in 1825m Tiefe. Die Bilder (5.20) und (5.22) zeigen die Differenzen ΔT beziehungsweise ΔS zwischen den Modellwerten T und S und den hydrographischen Daten T_{dat} und S_{dat} aus Abschnitt 2.4.1. In Abbildung (5.24) werden die Differenzen in der Dichte $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_{dat} = \rho - \rho_{dat}$ dargestellt. Die Temperatur hat ihre typische Verteilung. Nach Norden hin wird es wärmer. Das Temperaturmaximum liegt mit über 3°C im Nordwesten des Modellgebiets vor der südamerikanischen Küste. Die Abweichungen ΔT halten sich im nördlichen Bereich des Modellgebiets in Grenzen. Die größten Differenzen findet man mit -0.5°C im Bereich zwischen 20°W und dem Nullmeridian und 50°S und 60°S. In der nördlichen Hälfte ist ΔT am kleinsten. Offensichtlich ist ΔT überall negativ, was bedeutet, daß die Modelltemperaturen niedriger sind als die Temperaturdaten. Die Verteilung des Salzgehaltes zeigt dagegen mehr Struktur. Das

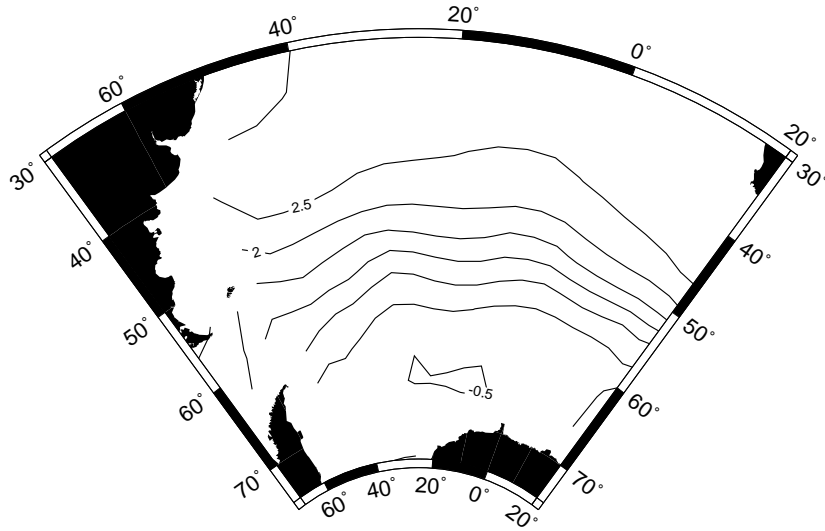


Abbildung 5.19: Temperatur T in $^{\circ}\text{C}$ in 1825m Tiefe.

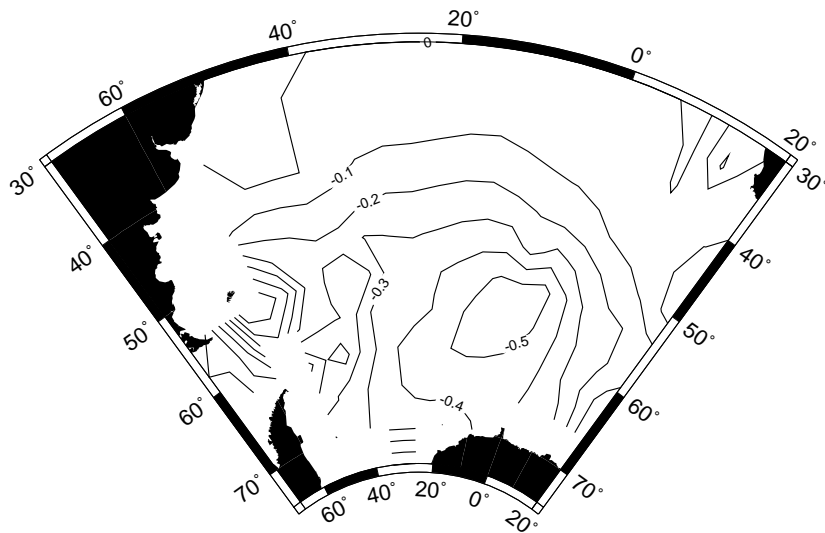


Abbildung 5.20: $\Delta T = T - T_{\text{dat}}$ in $^{\circ}\text{C}$ in 1825m Tiefe.

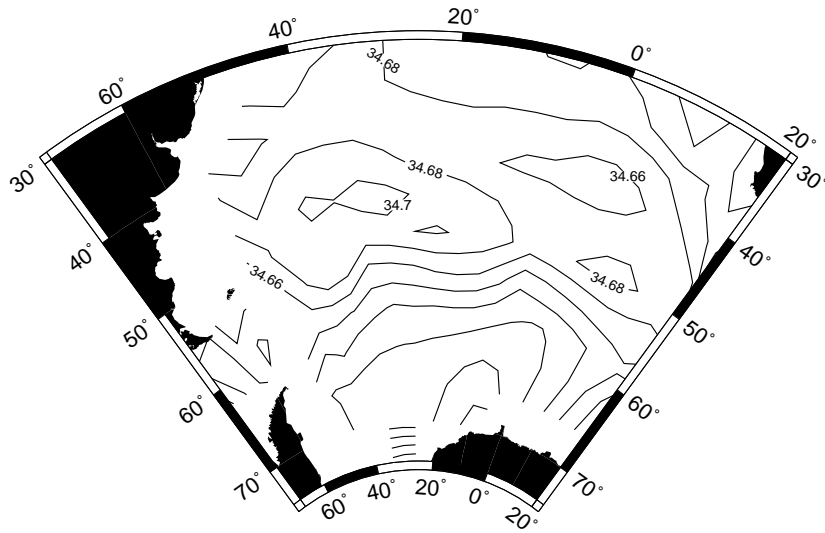


Abbildung 5.21: Salzgehalt S in psu in 1825m Tiefe.

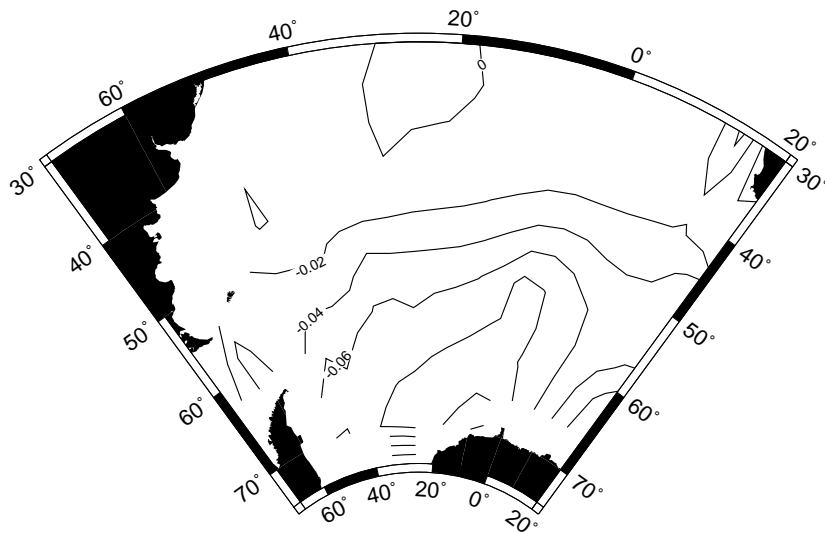


Abbildung 5.22: $\Delta S = S - S_{dat}$ in psu in 1825m Tiefe.

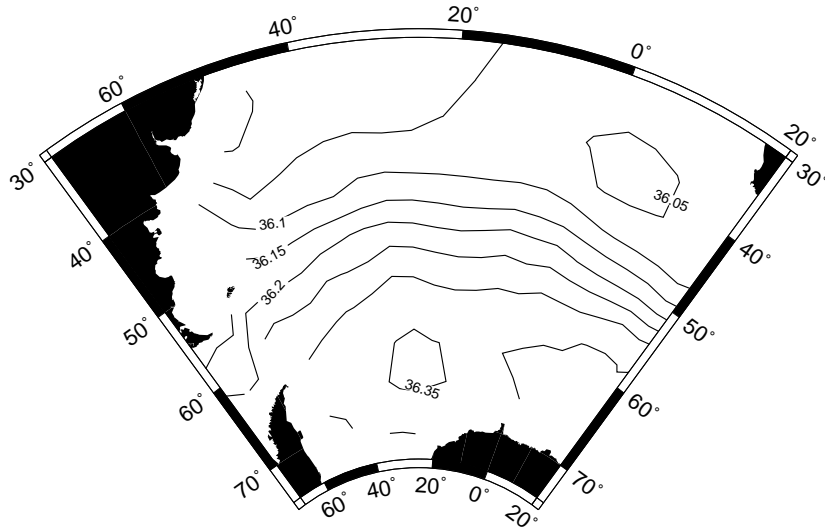


Abbildung 5.23: Dichte $\sigma = \rho - 1000$ in kgm^{-3} in 1825m Tiefe.

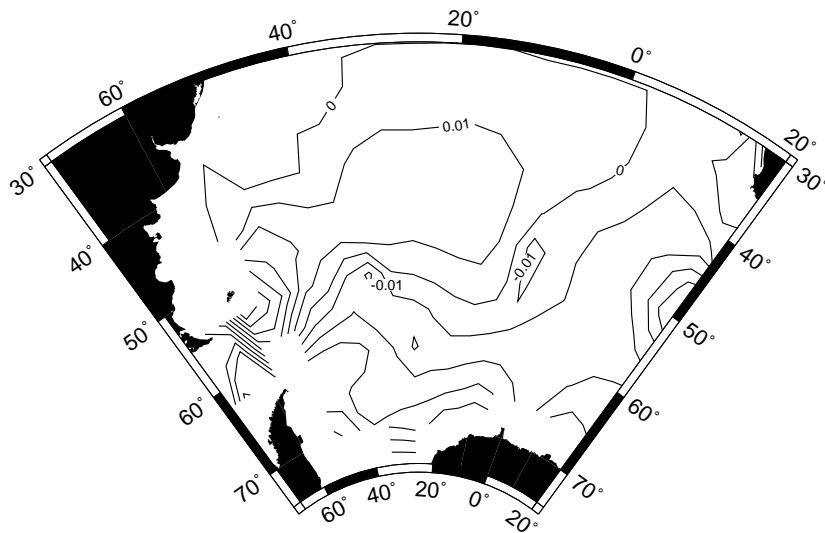


Abbildung 5.24: $\Delta\sigma = \sigma - \sigma_{\text{dat}}$ in kgm^{-3} in 1825m Tiefe.

Maximum befindet sich ungefähr auf 44°S . Die größten Abweichungen ΔS treten mit -0.08 psu an gleicher Stelle wie die stärksten Temperaturabweichungen und im Weddellmeer auf. Dagegen ist ΔS im Norden deutlich kleiner. Wie bei den Temperaturen sind auch hier die Modellsalzgehalte niedriger als die Daten. Die Verteilung der Dichte σ entspricht dem Zirkulationsmuster der geostrophisch balancierten horizontalen Geschwindigkeiten (Abb. 5.10). Kennzeichnend ist zunächst das zonale Band des Antarktischen Zirkumpolarstroms (ACC) um 50°S herum. Der Weddellwirbel zeigt in dieser Tiefe in der Dichte eine Doppelstruktur. Diese findet man aber nicht in den horizontalen Geschwindigkeiten (Bild 5.10), weil sie von den Referenzgeschwindigkeiten an der Meeresoberfläche abhängen (siehe Abschnitt 5.2). Die Differenzen $\Delta\sigma$ zwischen der Dichteverteilung im Modell und der Dichteverteilung aus den hydrographischen Daten sind überwiegend gering. Im Wesentlichen liegen sie im Bereich von $\pm 0.01 \text{ kgm}^{-3}$. Nur am östlichen Modellrand, im südlichen Weddellmeer und bei den Falklandinseln treten größere Werte auf.

Um einen Eindruck von der Tiefenverteilung der Modelltemperaturen und Modellsalzgehalte und damit von der Verteilung von Wassermassen zu bekommen, werden nun einige meridionale und zonale Schnitte für T und S und für die Differenzen ΔT und ΔS betrachtet. Die Abbildungen (5.27 - 5.30) zeigen Schnitte entlang des Nullmeridians und die Bilder (5.31 - 5.34) entlang 30°W . Die zonalen Schnitte (Abb. 5.37 - 5.40) gehen entlang 50°S und durch das Weddellmeer entlang 68°S (Abb. 5.27 - 5.30). Die Verteilung der Wassermassen entlang dieser Schnitte zeigen die Abbildungen (5.25, 5.26, 5.35 und 5.36). Die Verteilung entlang 30°S und 20°E wurde bereits in den Bilder (5.16) und (5.15) präsentiert. Die Klassifizierung in Oberflächen-, Zwischen- (AAIW), Tiefen- (CDW und NADW) und Bodenwasser (AABW, WSDW und WSBW) erfolgt genauso wie im Abschnitt 5.3 nach der potentiellen Dichte wie bei Rintoul (1991) [64].

Die Schnitte zeigen zunächst, daß das Oberflächenwasser in den oberen 50 Metern nördlich von circa 46°S vom Modell sehr gut wiedergegeben wird. Die 26.80-Isopykne – die die Grenze zwischen Oberflächen- und Zwischenwasser markiert – von Modell und Daten liegen in allen Abbildungen übereinander. Die Temperaturen sind hier im Bereich von 10°C und wärmer und der Salzgehalt ist weitestgehend größer als 34.6 psu.

Auch für die Verteilung des Antarktische Zwischenwassers (AAIW) zeigen die Bilder gute Übereinstimmungen in der potentiellen Dichte zwischen Modell und Daten. Das AAIW findet man im Norden des Modellgebiets bis zu einer Tiefe von 1500m - 1800m. Im Süden tritt es nirgends tiefer als 800m auf. Es wird charakterisiert durch ein Minimum im Salzgehalt. Dieses Minimum liegt bei 34.2 psu. Die Temperaturen erreichen 0°C bis 5°C – im Norden in den oberen Schichten auch höhere Werte. Die Abweichungen ΔT und ΔS von den hydrographischen Daten sind in diesen Tiefen nur gering. Dies mag sicherlich auch damit zusammenhängen, daß das Modellgitter in der Vertikalen bis 1100m Tiefe mit weniger als 400 Metern relativ fein aufgelöst ist.

Während die Abgrenzung von Modell und Daten zwischen Tiefen- und Zwischenwasser (32.36-Isopykne) recht gut übereinstimmt, gibt es beim Verlauf der 41.66-Isopykne – Grenze zwischen Tiefen- und Bodenwasser – größere Abweichungen. Nördlich von ungefähr 55°S liegt die Isopykne aus den Daten um über 500 Metern tiefer als die Isopykne aus den Modellergebnissen. Südlich davon im Weddellmeer ist es dagegen umgekehrt, wobei die Tiefendifferenzen im Wesentlichen kleiner als 500m sind. Das Nordatlantische Tiefenwasser (NADW) reicht nicht ganz so weit nach Süden, wie es in den Daten zu sehen ist. Verfolgt man die 34.7 psu-

Isohaline erkennt man, daß sich das NADW entlang von 30°W bis 46°S und bis 1800m Tiefe erstreckt. Entlang des Greenwich-Meridians ist es bis 50°S zu finden, bleibt dort aber unterhalb von 2000m. Das NADW reicht im Modell also nicht ganz so weit nach Süden und in obere Schichten, wie es die hydrographischen Daten zeigen. Die Temperaturen des NADW's liegen im Bereich um 1°C - 2°C . Die Modelltemperaturen des Zirkumpolaren Tiefenwassers (CDW), auf welches das NADW trifft, liegen mit 0°C bis 2°C im korrekten Bereich. Der Salzgehalt ist teilweise mit Werten von etwas mehr als 34.5 psu um bis zu 0.1 psu niedriger als die Daten. Zu kleine Salzgehalte treten besonders in den oberen 2000 Metern des Weddellmeers auf. Die Differenzen ΔS sind dort am größten.

Unterhalb des NADW's liegt das Antarktische Bodenwasser (AABW). Die Temperatur des AABW's ist niedriger als 1°C . Der Salzgehalt liegt etwas unter 34.7 psu. Er ist damit um weniger als 0.05 psu zu niedrig. Nördlich von 50°S ist Bodenwasser aber nur westlich des Nullmeridians zu finden. Bei 30°S tritt kein Bodenwasser mehr auf (siehe Bild 5.16). Es erstreckt sich im Modell nur bis 35°S . Im Weddellmeer liegen unterhalb von ungefähr 1500m das Weddellmeer-Tiefenwasser (WSDW), das zur Bildung des AABW's beiträgt, und das Weddellmeer-Bodenwasser (WSBW). Der Salzgehalt ist hier mit circa 34.6 psu ebenfalls um 0.05 psu niedriger als in den Daten. Die Temperaturen des WSDW's sind kleiner als 0°C und die des WSBW's kleiner als -1°C . Die Abweichungen ΔT von den Daten sind im tiefen Weddellmeer besonders groß. Die Modelltemperaturen des Weddellmeer-Bodenwassers (WSBW) sind sehr klein, wobei darauf hingewiesen sei, daß das WSBW als kältestes Bodenwasser gilt, das in größeren Mengen vorkommt (Worthington, 1981) [92].

Insgesamt können die wichtigen Wassermassen, die im Südatlantik vorkommen, in den Modellergebnissen identifiziert werden. Die Verteilung von Oberflächen- und Zwischenwasser stimmt gut mit der Verteilung aus den Daten überein. Die Abgrenzung zwischen Tiefen- und Bodenwasser zeigt nicht so gute Übereinstimmungen. Das AABW erreicht nicht 30°S . Dies ist aber auch nicht zu erwarten. Die Modellzirkulation am Boden ermöglicht zwar einen Transport von Bodenwasser aus dem Weddellmeer in das Argentinische Becken. Dort bildet sich aber kein westlicher Randstrom aus, der Bodenwasser nach Norden über 30°S hinaus transportieren könnte (siehe Abschnitt 5.2 und Abb. (5.13 und 5.14)). Die Abweichungen ΔT und ΔS sind grundsätzlich negativ. Einzige wesentliche Ausnahme ist eine Blase im Antarktischen Zwischenwasser (AAIW). Das heißt, daß die Modellwerte kleiner sind als die Datenwerte. Dies beeinflußt die Tiefenverteilung der verschiedenen Wassermassen. Die Grenze zwischen Tiefenwasser und Bodenwasser verläuft daher etwas anders als es die hydrographischen Daten implizieren. In den oberen 2000 Metern und im Bereich nördlich von ungefähr 50°S bleiben die Abweichungen der Modellwerte von den (geglätteten) hydrographischen Daten in Grenzen und sind teilweise relativ klein. Im Weddellmeer sind die Abweichungen – besonders bei den Temperaturen in der Tiefe – doch recht groß. Es fällt auch hier wieder auf, daß die betragsmäßig größten ΔT -Werte dort auftreten, wo das Modellgitter sehr steile Wände hat. Dies ist derselbe Bereich, in dem auch Probleme bei den Vertikalgeschwindigkeiten in Erscheinung traten (Abschnitt 5.4). Außerdem zeigt sich, daß im oberen Teil des Modells, wo das Gitter feiner in der Vertikalen aufgelöst ist, die Abweichungen klein sind. Im mittleren und tieferen Teil, wo die vertikale Auflösung nur halb so gut ist, treten auch die größeren Abweichungen auf. Um weitere Rückschlüsse bezüglich der Ursachen für die großen Abweichungen im Weddellmeer ziehen zu können, betrachten wir als nächstes die Quellen und Senken des Modells.

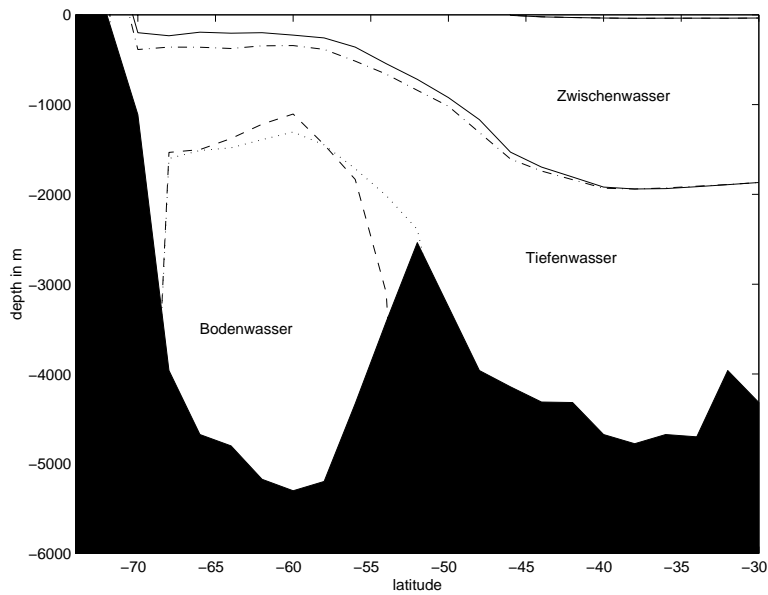


Abbildung 5.25: Wassermassen im Südatlantik entlang des Greenwich-Meridians. Dargestellt sind $\sigma_1 = 32.36$ (— Daten; - · - Modell), $\sigma_3 = 41.66$ (- - - Daten; ··· Modell) und $\sigma_0 = 26.80$ (durchgezogene Linie oberhalb von -50 m am rechten oberen Bildrand).

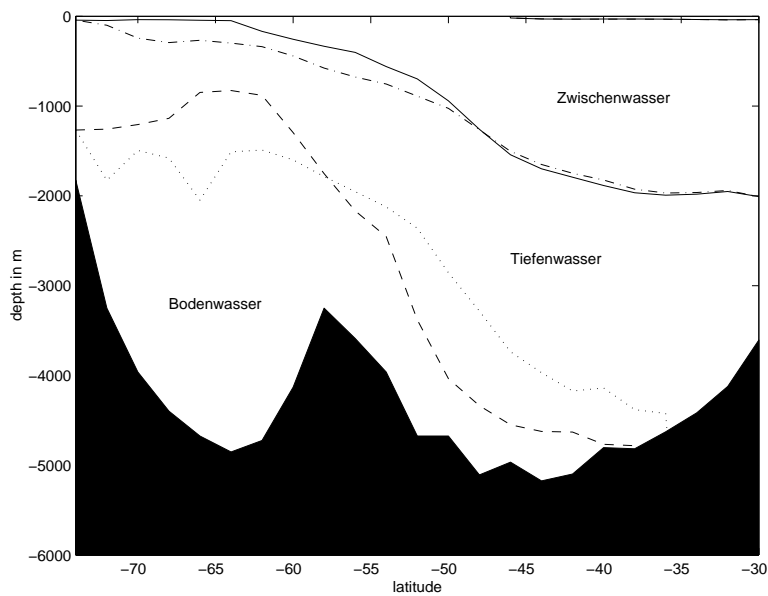


Abbildung 5.26: Wassermassen im Südatlantik entlang 30° W. Dargestellt sind $\sigma_1 = 32.36$ (— Daten; - · - Modell), $\sigma_3 = 41.66$ (- - - Daten; ··· Modell) und $\sigma_0 = 26.80$ (durchgezogene Linie oberhalb von -50 m am rechten oberen Bildrand).

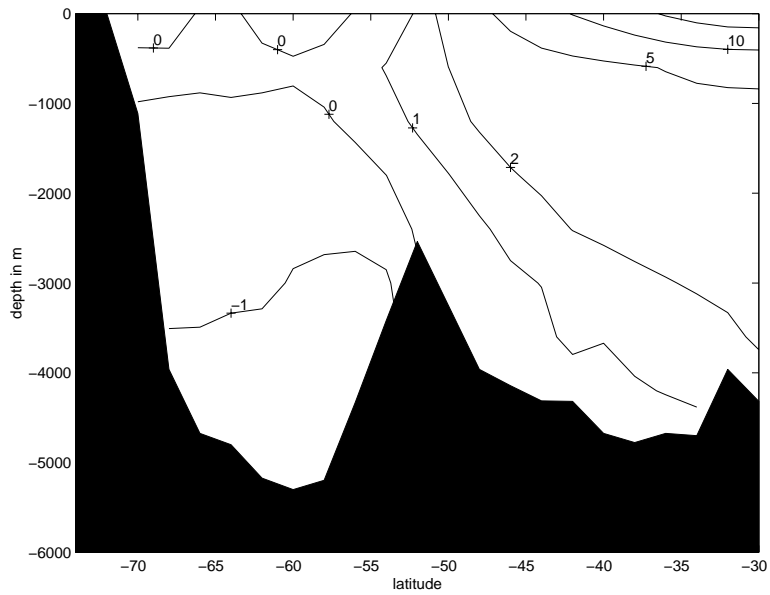


Abbildung 5.27: Temperatur T in $^{\circ}\text{C}$ entlang des Greenwich-Meridians.

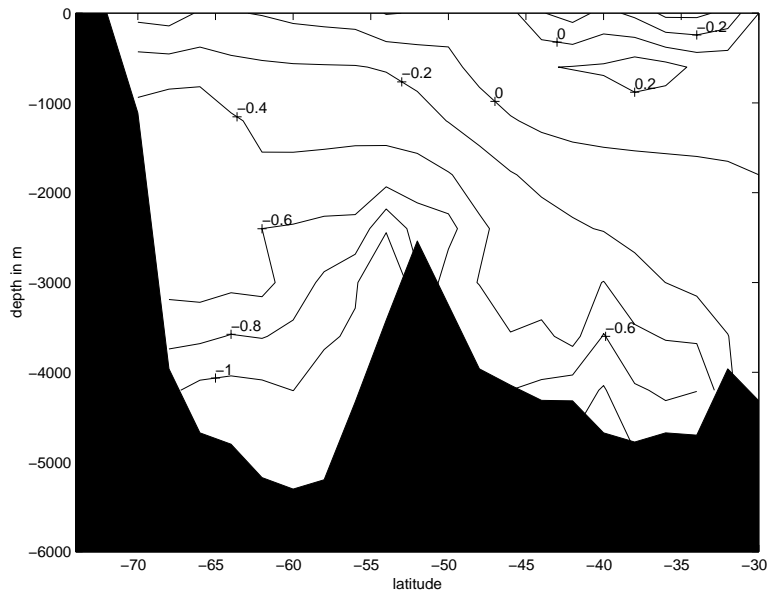


Abbildung 5.28: $\Delta T = T - T_{\text{dat}}$ in $^{\circ}\text{C}$ entlang des Greenwich-Meridians.

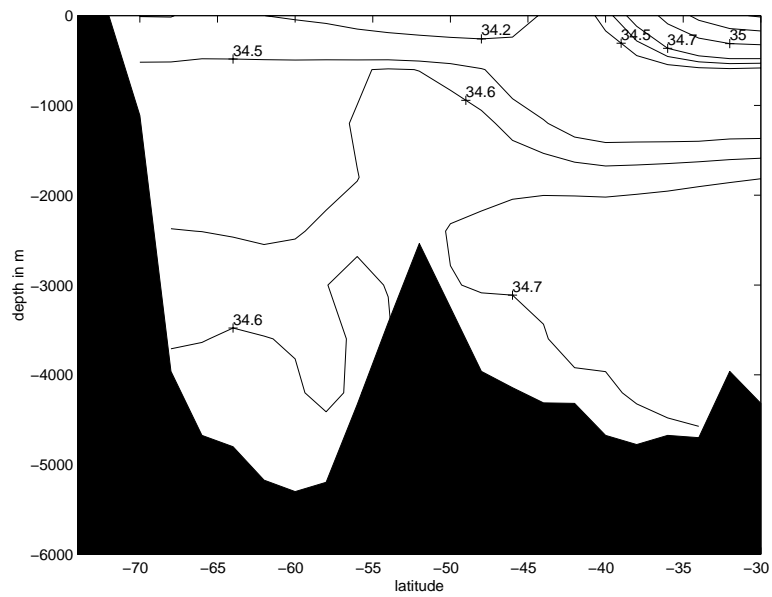


Abbildung 5.29: Salzgehalt S in psu entlang des Greenwich-Meridians.

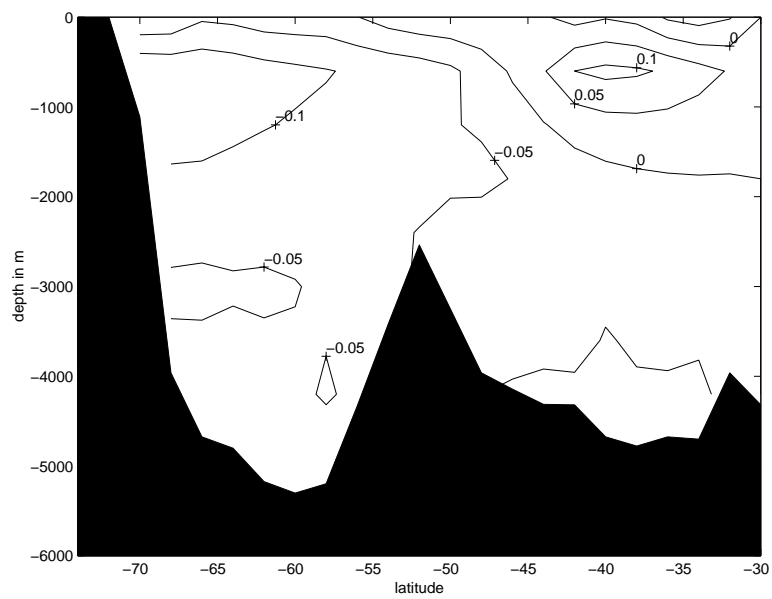


Abbildung 5.30: $\Delta S = S - S_{dat}$ in psu entlang des Greenwich-Meridians.

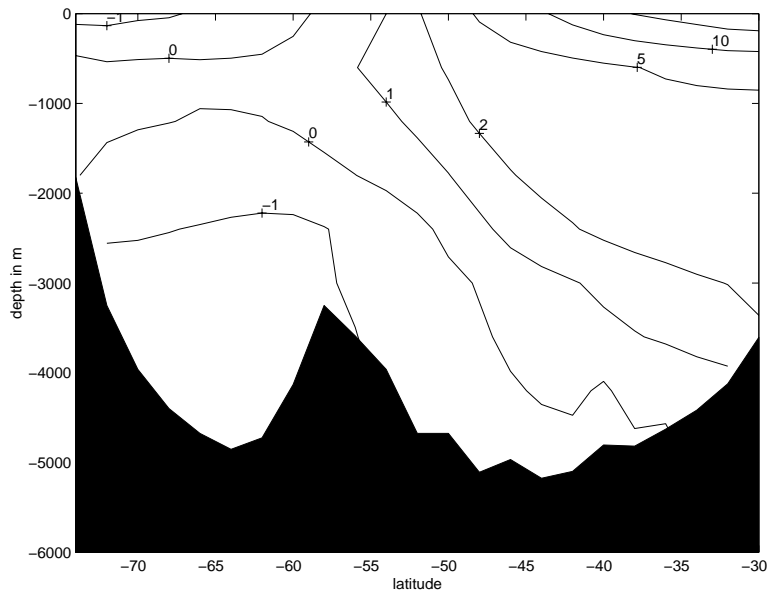


Abbildung 5.31: Temperatur T in $^{\circ}\text{C}$ entlang 30°W .

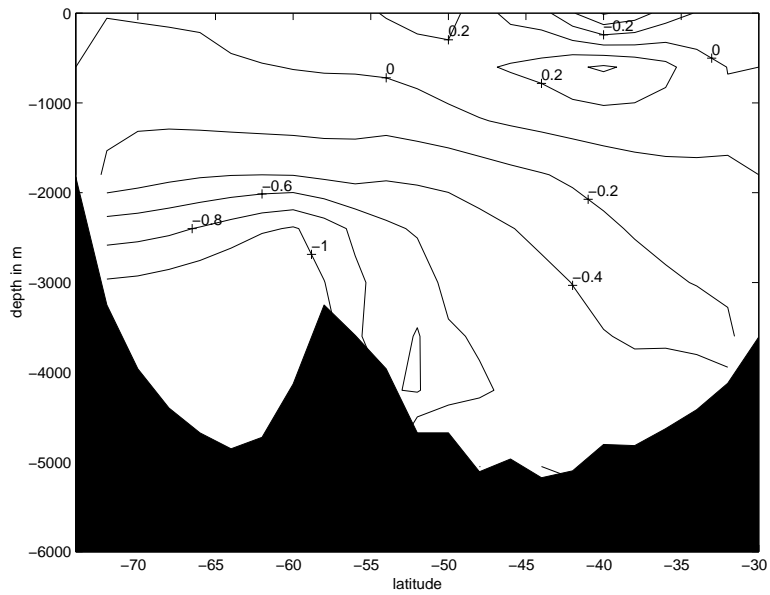
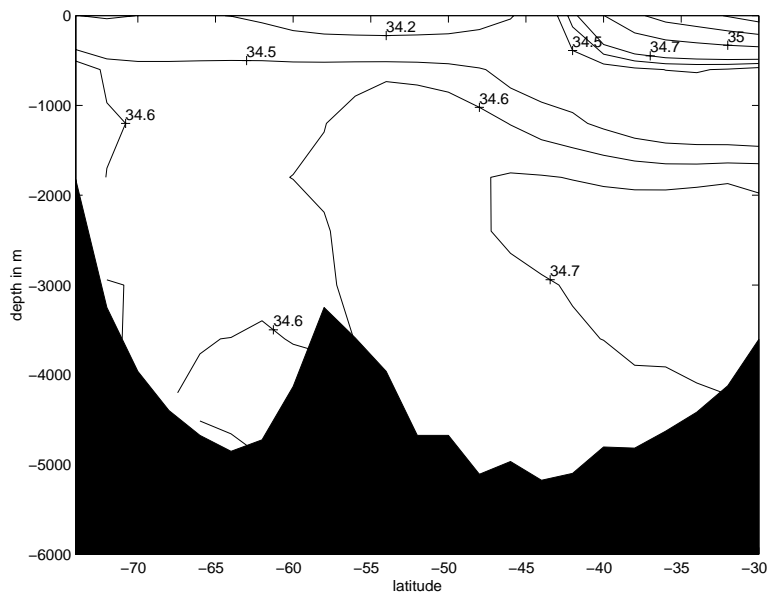
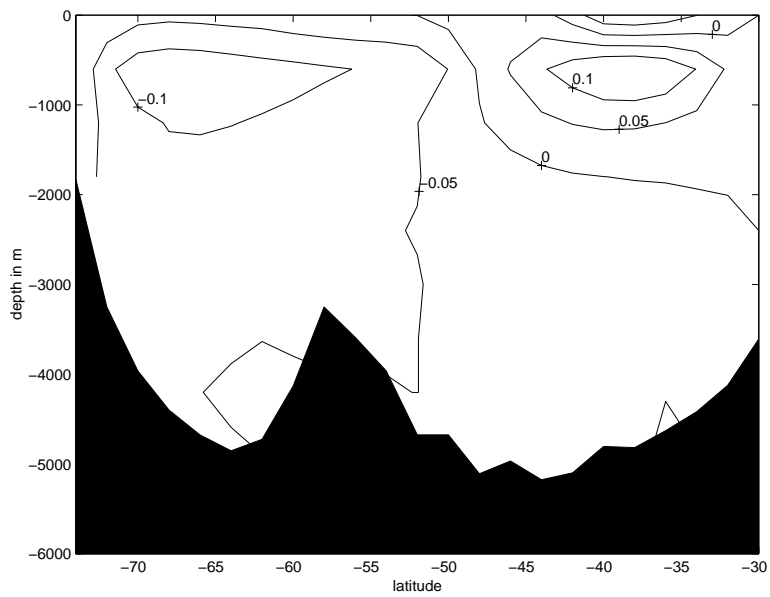


Abbildung 5.32: $\Delta T = T - T_{\text{dat}}$ in $^{\circ}\text{C}$ entlang 30°W .

Abbildung 5.33: Salzgehalt S in psu entlang 30° W.Abbildung 5.34: $\Delta S = S - S_{dat}$ in psu entlang 30° W.

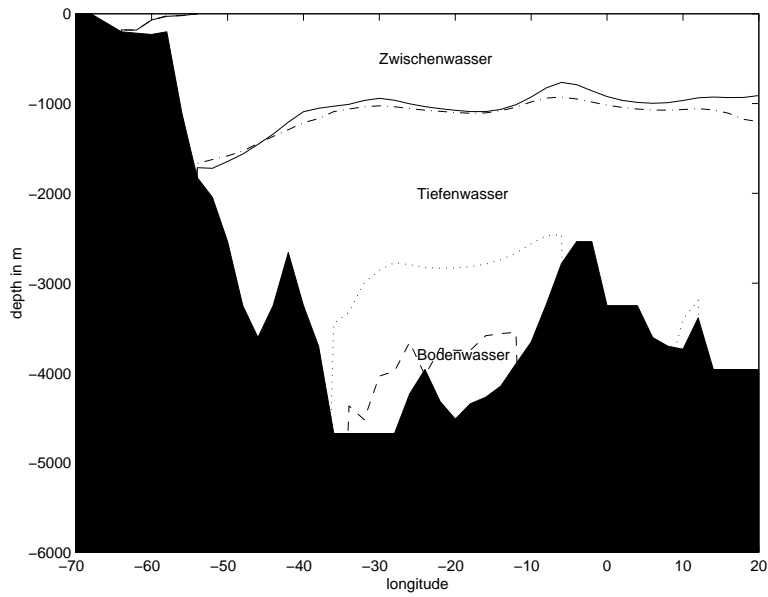


Abbildung 5.35: Wassermassen im Südatlantik entlang $50^\circ S$.
 Dargestellt sind $\sigma_1 = 32.36$ (— Daten; - · - Modell), $\sigma_3 = 41.66$ (- - - Daten; · · · Modell)
 und $\sigma_0 = 26.80$ (durchgezogene Linie oben links oberhalb von -50 m).

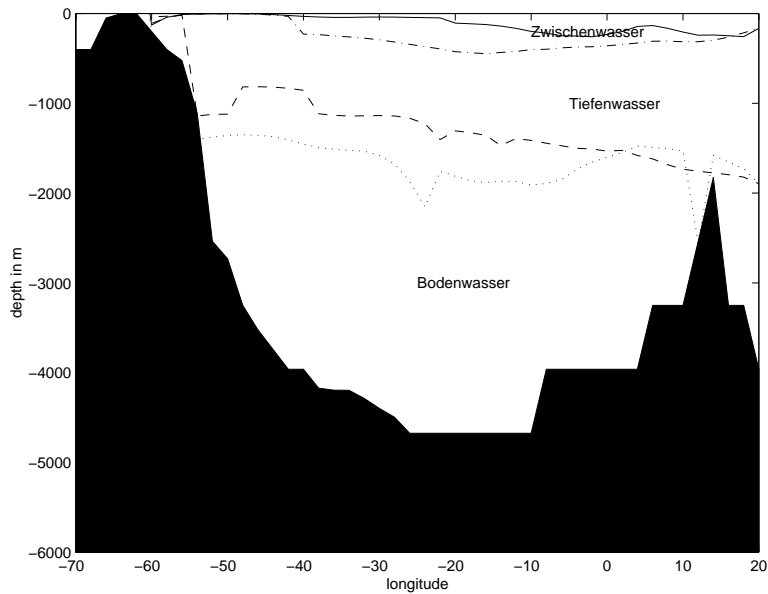
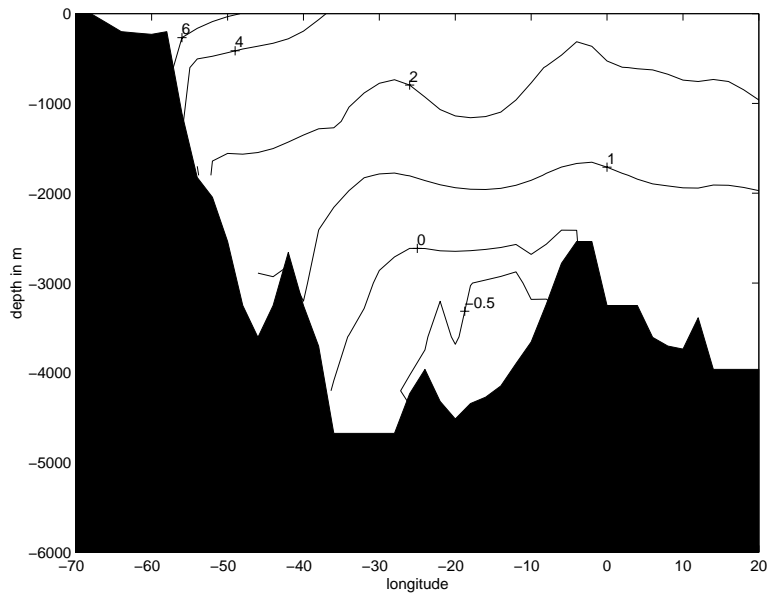
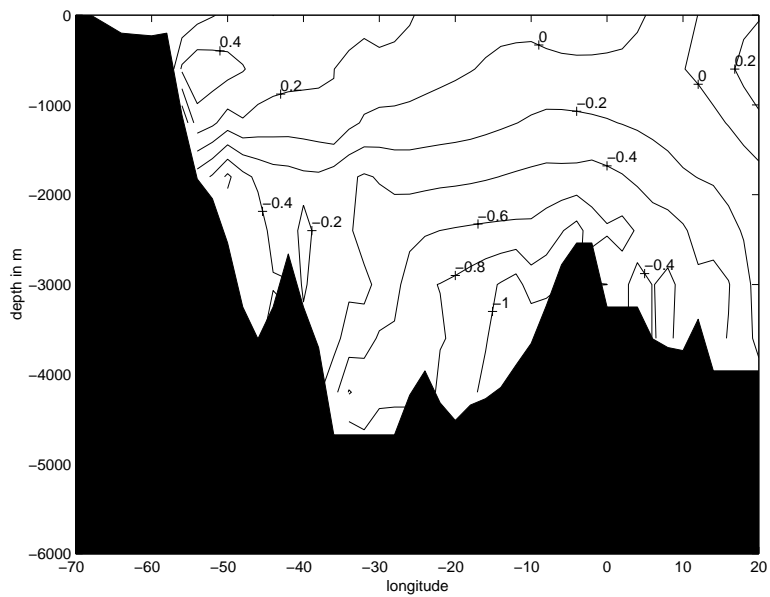


Abbildung 5.36: Wassermassen im Südatlantik entlang $68^\circ S$. Dargestellt sind
 $\sigma_1 = 32.36$ (— Daten; - · - Modell) und $\sigma_3 = 41.66$ (- - - Daten; · · · Modell).

Abbildung 5.37: Temperatur T in $^{\circ}\text{C}$ entlang 50°S .Abbildung 5.38: $\Delta T = T - T_{\text{dat}}$ in $^{\circ}\text{C}$ entlang 50°S .

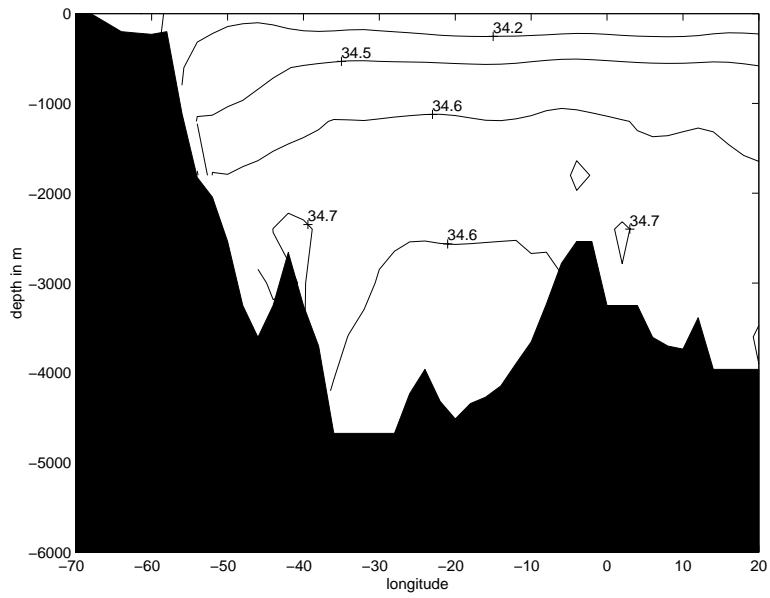


Abbildung 5.39: Salzgehalt S in psu entlang 50° S.

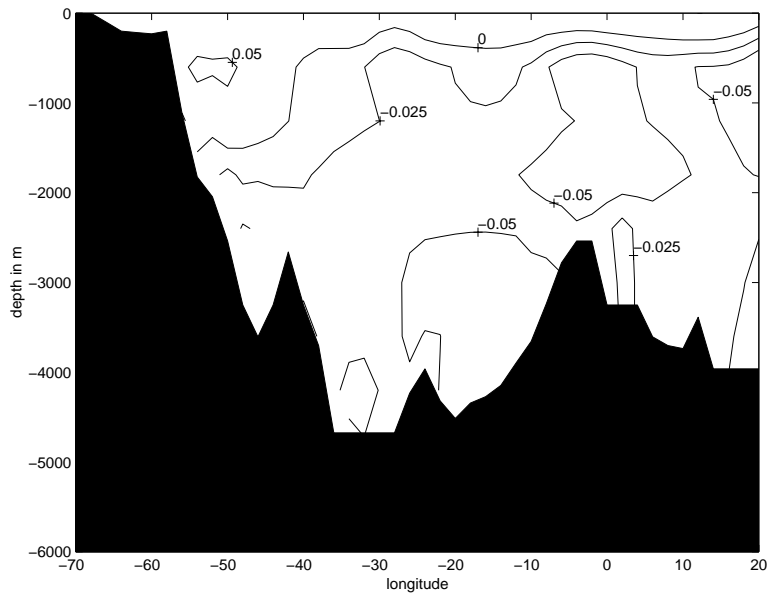
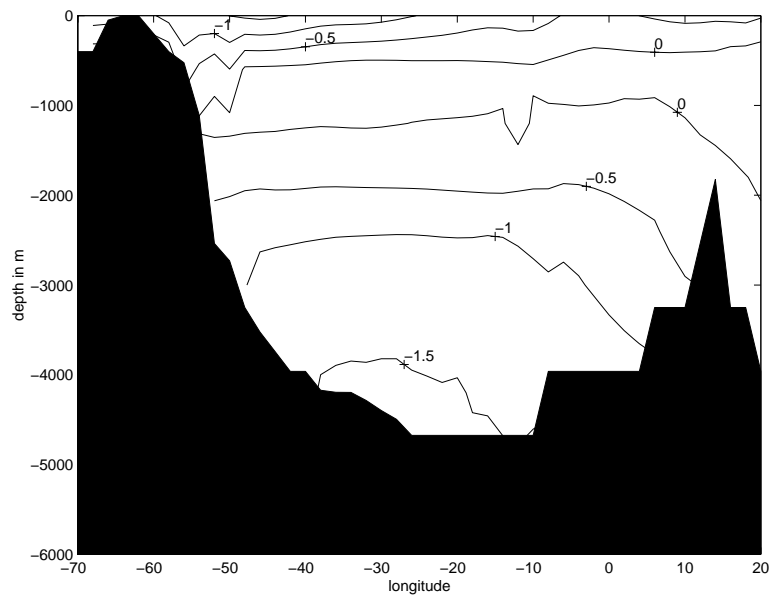
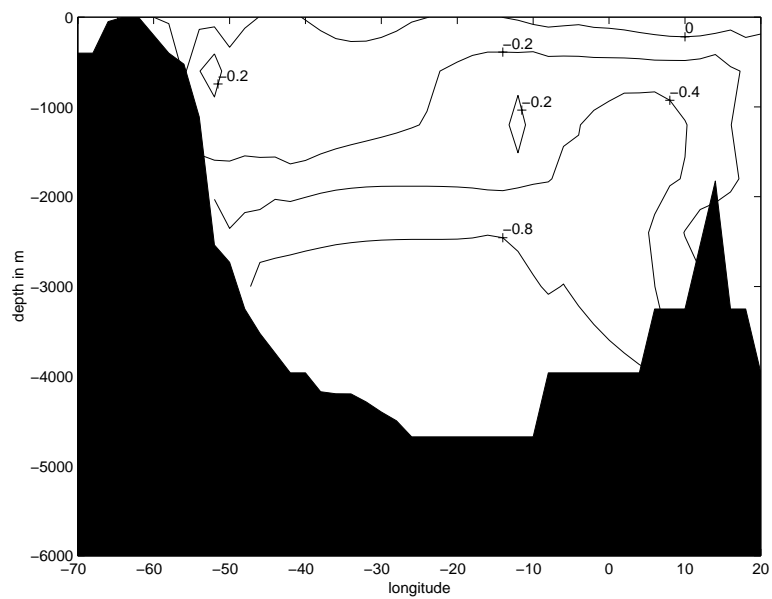


Abbildung 5.40: $\Delta S = S - S_{dat}$ in psu entlang 50° S.

Abbildung 5.41: Temperatur T in $^{\circ}\text{C}$ entlang 68°S .Abbildung 5.42: $\Delta T = T - T_{dat}$ in $^{\circ}\text{C}$ entlang 68°S .

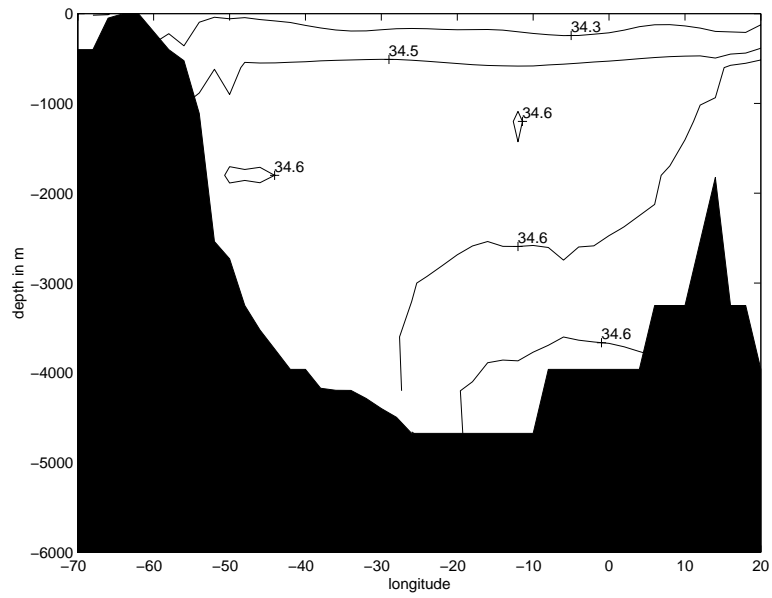


Abbildung 5.43: Salzgehalt S in psu entlang 68°S .

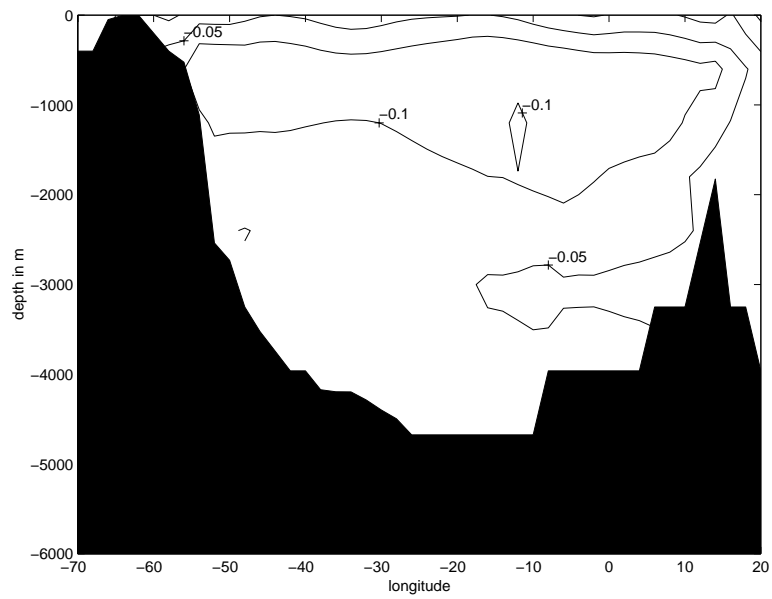


Abbildung 5.44: $\Delta S = S - S_{dat}$ in psu entlang 68°S .

5.6 Quellen und Senken

Betrachten wir nun die Quellen und Senken (Wärme- und Süßwasserflüsse) F^T und F^S die in der Advektions-Diffusions-Gleichung (4.3) zugelassen wurden. In der Kostenfunktion J werden sie durch den Term J_F (Gl. 2.11,2.12) repräsentiert. Die Entwicklung dieses Terms im Verlauf des Minimierungsprozesses in Abbildung (5.4) und Tabelle 5.1 zeigt, daß auch J_F um zwei Größenordnungen kleiner geworden ist. Die Bilder (5.45) und (5.47) zeigen die Wärmequellen F^T in 2537m Tiefe und am Boden. Für die gleiche Tiefe werden in den Bildern (5.46) und (5.48) die Süßwasserquellen F^S dargestellt. Als erstes kann man feststellen, daß die Muster der Isolinien der Wärmequellen und der Süßwasserquellen große Übereinstimmungen zeigen. Das heißt, daß die beiden Quellen ihre Extrema in den selben Gebieten haben. Es ist aber nicht so, daß sich die Quellen auf einen lokalen Bereich des Modellgebiets beschränken und sonst überall nahezu verschwinden. Vielmehr sieht die Verteilung besonders am Boden unregelmäßig aus. Dort treten häufige Vorzeichenwechsel auf, wobei die positiven Werte Quellen und die negativen Senken darstellen. Im Innern des Modellgebiets ist es offensichtlich aber so, daß F^T und F^S nördlich von ungefähr 50°S überwiegend positiv und südlich davon überwiegend negativ sind. Eine ganz ähnliche Aufteilung zeigen übrigens auch die E-P-Daten aus der Abbildung (2.8) in Abschnitt 2.4.1. Im Bild (5.49) werden die Quellen F^T und F^S gegeneinander aufgetragen. Diese Darstellung bestätigt, daß der überwiegende Anteil der beiden Quellen am jeweiligen Gitterpunkt gleiche Vorzeichen hat. Außerdem erkennt man, daß die Wärmequellen F^T im Wesentlichen dort groß (bzw. klein) sind, wo auch die Quellen F^S groß (bzw. klein) sind.

Die eben angesprochene Nord-Süd-Aufteilung steht aber im Zusammenhang mit der Temperatur- und Salzgehaltsverteilung in der Modelllösung (siehe vorheriger Abschnitt 5.5). Dort haben wir in den Bildern (5.28,5.30,5.32 und 5.34) gesehen, daß die Differenzen ΔT und ΔS zwischen den Modellwerten und den hydrographischen Daten betragsmäßig ebenfalls nördlich von etwa 50°S klein sind, während sie nach Süden hin deutlich größer sind. Im südlich Teil – vor allem im Weddellmeer – sind besonders die Temperaturen sichtlich kleiner als die Daten. Die Ursache dafür ist wohl in den negativen Werten von F^T und F^S in diesem Bereich begründet.

Von der Größenordnung her erreichen die Wärmequellen F^T (Bild 5.45) Werte von $\pm 5 \cdot 10^{-7} \text{ Ks}^{-1}$ – in Ausnahmefällen sogar das Doppelte – und die Süßwasserquellen F^S (Bild 5.46) Werte von $\pm 5 \cdot 10^{-8} \text{ psu s}^{-1}$. Worin können nun die Gründe dafür liegen, daß diese Größenordnungen erreicht werden? Aus Abschnitt 4.3 (Abb. 4.15) wissen wir, daß an über 99% der Gitterpunkte die Verletzung der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{u} kleiner als 10^{-10} s^{-1} ist. Bei Anomalien in Temperatur und Salzgehalt von $\pm 1 \text{ K}$ beziehungsweise $\pm 0.1 \text{ psu}$ wird dadurch eine Quellstärke von gerade $\pm 10^{-10} \text{ Ks}^{-1}$ beziehungsweise $\pm 10^{-11} \text{ psu s}^{-1}$ erzeugt. Zu den auftretenden großen Werten der Quellen können demnach die Fehler in der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes nur unwesentlich beitragen. Ein anderer Punkt scheint dabei eine wesentlich bedeutendere Rolle zu spielen. Die Quellen stellen ja im Prinzip nichts anderes dar wie eine zusätzliche künstliche Diffusion, mit deren Hilfe subskalige physikalische Prozesse parametrisiert werden sollen, die aufgrund der Gitterweite nicht aufgelöst werden. Eine gewisse Parametrisierung der subskaligen Prozesse erfolgt aber auch durch die Diffusionskoeffizienten K_h und K_v in der Advektions-Diffusions-Gleichung (4.3), die mit $K_h = 5 \cdot 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ und $K_v = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ in der Größenordnung der turbulenten Diffusions-

koefizienten liegen. K_h und K_v sind aber im gesamten Modellgebiet konstant. Konstante Diffusionskoeffizienten sind natürlich eine grobe Parametrisierung. Mit den oben angesprochenen Anomalien in Temperatur und Salzgehalt, einer horizontalen Gitterauflösung von 100-200 km beziehungsweise von ≈ 500 Metern in der Vertikalen und den gegebenen Koeffizienten K_h und K_v liegt der Diffusionsterm der Advektions-Diffusions-Gleichung (4.3) in der Größenordnung von 10^{-6} Ks^{-1} beziehungsweise $10^{-7} \text{ psu s}^{-1}$. Die Quellen F^T und F^S sind demnach etwas kleiner. Sie können also als eine Art Korrektur der groben Parametrisierung mittels konstanter Diffusionskoeffizienten aufgefaßt werden. Wenn man dabei in Betracht zieht, daß die Quellen im Norden des Modellgebiets überwiegend positiv und im Süden überwiegend negativ sind, deutet das darauf hin, daß der konstante Wert für K_h im Norden zu klein und im Süden zu groß für eine ausreichende Parametrisierung ist. Dabei ist es ja auch so, daß eine horizontale Gitterweite von 2° entlang 30°S noch 192 km entlang 70°S aber nur noch knappe 76 km sind. Speziell auf die Methode der finiten Elemente bezogen, kommt außerdem hinzu, daß die Tetraeder des unstrukturierten Gitters alle verschiedenen große Volumen aufgrund der lokal variablen Gitterauflösung haben. Die global konstanten Diffusionskoeffizienten K_h und K_v sind dann für kleinere Tetraeder sehr groß und können nur mit Einschränkungen ausreichende Parametrisierungen liefern. Die Quellen und Senken F^T und F^S wirken also den Mängeln entgegen, die durch die grobe Parametrisierung mit im gesamten Modellgebiet konstanten K_h und K_v hervorgerufen werden. Zum Abschluß wird in den Bildern (5.50) und (5.51) folgendes gegeneinander aufgetragen: auf der x-Achse

$$\left(\sum_{j=1}^n C_j \int_{\Omega} K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, d\Omega \right) \cdot \left(\int_{\Omega} 1 \, d\Omega \right)^{-1}$$

mit $C_j = T_j, S_j$ und auf der y-Achse

$$\int_{\Omega} \tilde{F}^{C_j} \varphi_i \, d\Omega \cdot \left(\int_{\Omega} 1 \, d\Omega \right)^{-1}.$$

Diese beiden Terme stellen den diffusiven Anteil und den Quellterm der Advektions-Diffusions-Gleichung in der Variationsformulierung der Standard-Galerkin-Methode dar (siehe Abschnitt 3.3). Dabei sind mit \tilde{F}^{C_j} die auf den Elementen gemittelten Quellen F^T bzw. F^S gemeint. Beide Terme werden mit dem Volumen $\int 1 \, d\Omega$ normiert. Die Korrelation ist aber sehr gering. Sie liegt im Bereich von 0.01, was an den vielen Punkten liegt, die um das Zentrum der Punktwolke streuen. Es zeigt sich auch hier wie schon in den Bildern (5.45) bis (5.49), daß ein Teil der Quellen im Laufe der Minimierung relativ klein wird, während der andere Teil (der offensichtlich besser korrelierte) bei größeren Werten stehen bleibt. Eine klare Wechselbeziehung zwischen den beiden dargestellten Termen gibt es demnach nicht.

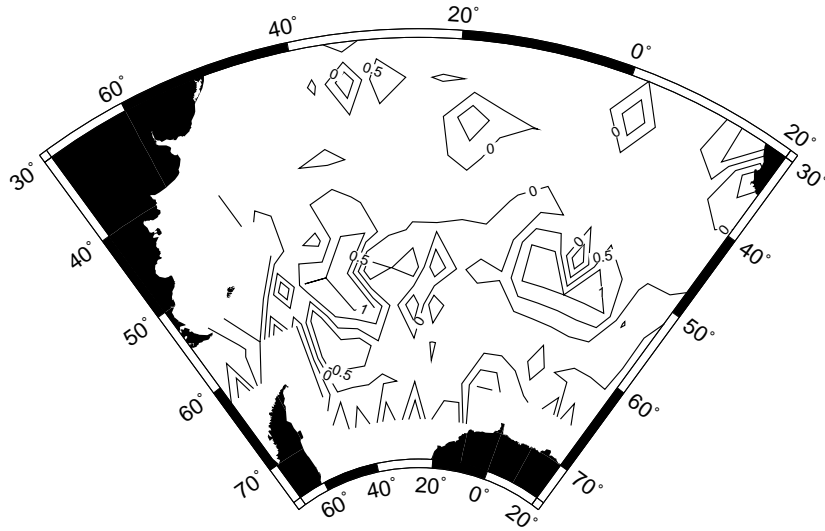


Abbildung 5.45: Quellen F^T in 10^{-6} Ks^{-1} in 2537m Tiefe.

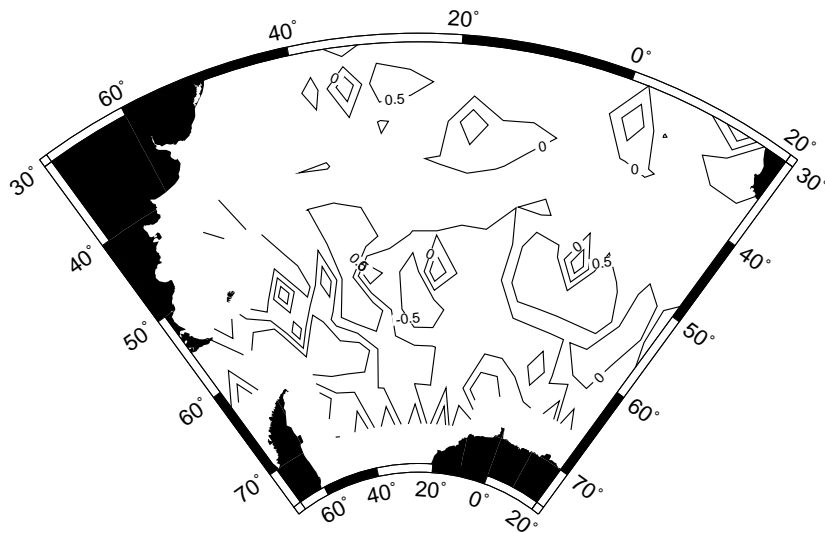


Abbildung 5.46: Quellen F^S in $10^{-7} \text{ psu s}^{-1}$ in 2537m Tiefe.



Abbildung 5.47: Quellen F^T in 10^{-6} Ks^{-1} am Boden.

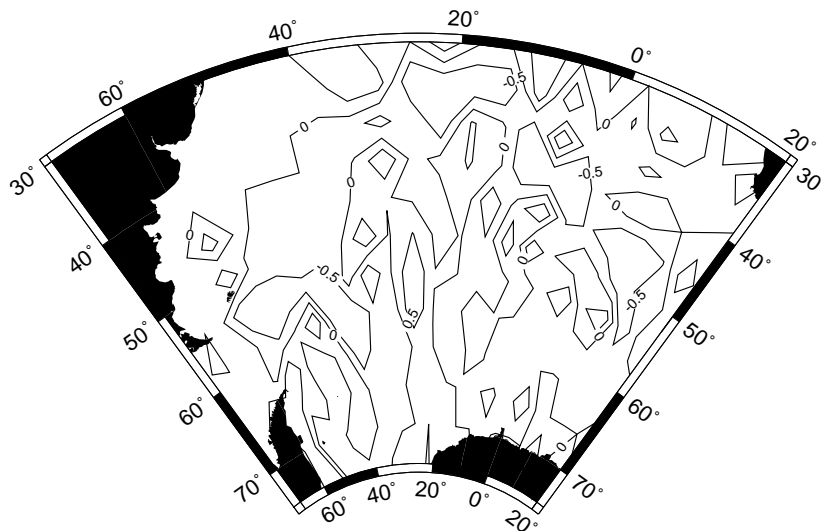


Abbildung 5.48: Quellen F^S in $10^{-7} \text{ psu s}^{-1}$ am Boden.

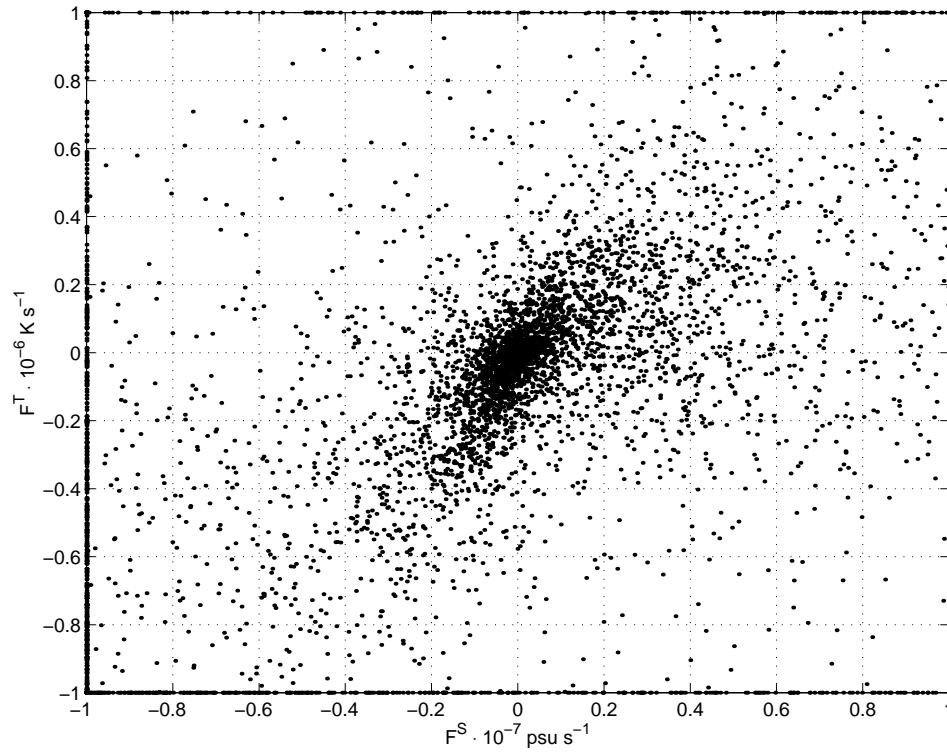


Abbildung 5.49: Korrelation zwischen den Quellen F^S in $10^{-7} \text{ psu s}^{-1}$ und F^T in 10^{-6} K s^{-1} .

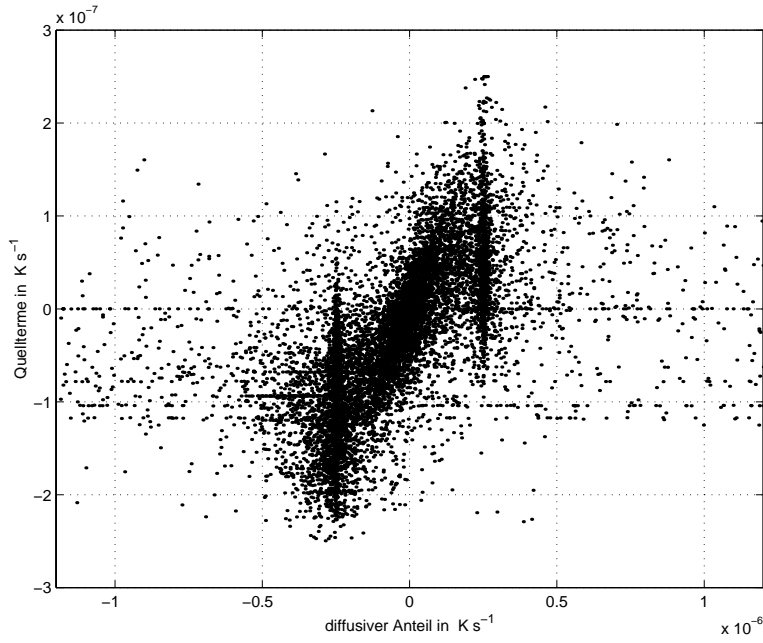


Abbildung 5.50: Korrelation zwischen den Quelltermen und dem diffusiven Anteil der Advektions-Diffusions-Gleichung bezüglich der Temperaturen T (siehe Text).

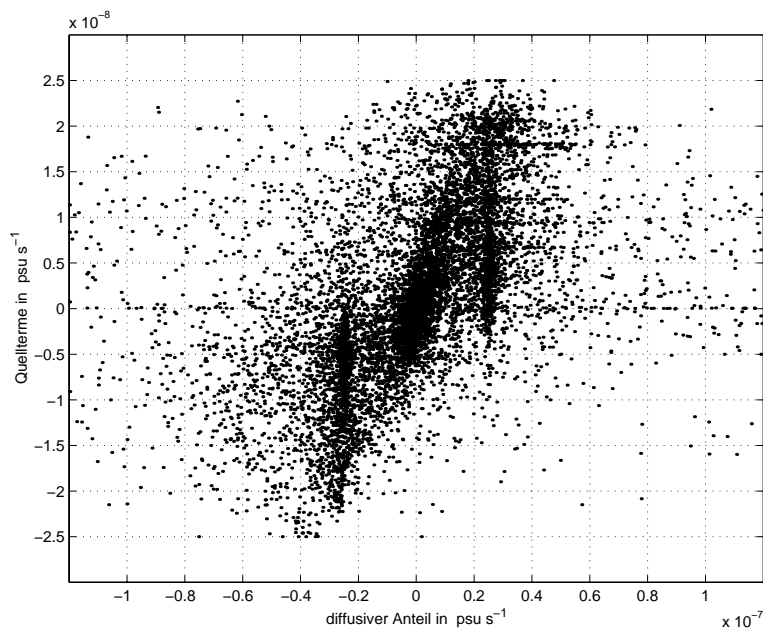


Abbildung 5.51: Korrelation zwischen den Quelltermen und dem diffusiven Anteil der Advektions-Diffusions-Gleichung bezüglich der Salzgehalt S (siehe Text).

Kapitel 6

Fazit und Ausblick

6.1 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Mit einem stationären Advektions-Diffusions-Modell wurden die groß-skalige Zirkulation und die Verteilung von Wassermassen im Südatlantik untersucht. Dafür wurde ein Inversmodell entwickelt, in dem die Methode der finiten Elemente angewendet wird. Die Modellergebnisse wurden mit den Ergebnissen anderer Modelle und mit Ergebnissen auf der Grundlage von Messungen verglichen, die aus der Literatur bekannt sind.

In Kapitel 2 wurden die Modellparameter, die Modellgleichungen – Zustandgleichung, thermische Windrelation, Kontinuitätsgleichung und Advektions-Diffusions-Gleichung – und die Modellstrategie präsentiert. Die Kontrollvariablen sind horizontale Referenzgeschwindigkeiten an der Meeresoberfläche und Quellen und Senken der Advektions-Diffusions-Gleichung. In das Modell werden (klimatologische) hydrographische Daten, Satelliten-Altimetermessungen (SSH-Daten), Winddaten und Wärme- und Süßwasserfluß-Daten assimiliert. Das Modell wurde stark zu den SSH-Daten hin gewichtet.

Im Kapitel 5 wurden die Modellergebnisse präsentiert und mit Aussagen aus der Literatur verglichen. Sie zeigen, daß die Referenzgeschwindigkeiten die Struktur der SSH-Daten widerspiegeln (Abschnitt 5.2). Die oberflächennahe Zirkulation wird durch die breite zonale Strömung des Antarktischen Zirkumpolarstroms ACC geprägt. Der Einstrom des Brasilstroms im Norden und der Falkland-Strom werden ebenfalls wiedergegeben. In dem Bereich, wo diesen beiden Strömungen aufeinander treffen, liefern die SSH-Daten nur eine Ostströmung vom südamerikanischen Kontinentalschelf weg. Der Weddellwirbel zeichnet sich durch eine Doppelstruktur aus. Es gibt zwei Nordströmungen, wobei die erste bei 20°W zu finden ist. Es existieren aber keine zwei klar voneinander getrennten Wirbelzellen. Bei Südafrika ist der Agulhas beziehungsweise Benguelastrom zu erkennen. Der Rückstrom des Agulhas wird nur schwach wiedergegeben. Das Zirkulationsmuster in den oberflächennahen Schichten setzt sich teilweise in der Tiefe fort. So behält der Weddellwirbel seine Doppelstruktur und der Einstrom im Norden östlich der südamerikanischen Küste bleibt bestehen. Letzterer verhindert, daß Bodenwasser bis nach 30°S transportiert werden kann. Die Strömung in Bodennähe aus dem Weddellmeer in das Argentinische Becken bildet zwar am Südrand des Beckens einen westlichen Randstrom, dieser erreicht aber nicht den nördlichen Modellrand bei 30°S . Das Bodenwasser aus dem Weddellmeer wird so nach Norden

nur bis in das Argentinische Becken bis 35°S transportiert. Damit tritt es im Modell aber weiter nördlich auf als in den hydrographischen Daten. Die Volumentransporte über die Modellränder wurden vorgegeben (130 Sv durch die Drake Passage). Sie sollen aber bei weiterer Modellanwendung durch einen entsprechenden Term in der Kostenfunktion reguliert werden. Die Massen-, Wärme- und Salztransporte (Abschnitt 5.3) über die offenen Ränder des Modells liegen im Bereich der Werte, die aus der Literatur bekannt sind. Der Wärmetransport über 30°S nach Norden beträgt 0.88 PW. Er kommt durch den Eintrag von 26 Sv Nordatlantischen Tiefenwasser (NADW) und dem Ausstrom von 27 Sv Antarktischen Zwischenwasser (AAIW) zustande. Im Weddellmeer und im Südatlantik werden 9.6 Sv Bodenwasser gebildet. Sie werden über 20°E in den südlichen Indischen Ozean transportiert. Die Verteilung der Wassermassen – klassifiziert wie bei Rintoul (1991) [64] nach der potentiellen Dichte – zeigen wesentliche Übereinstimmungen mit der Verteilung auf der Grundlage der hydrographischen Daten. Die Vertikalgeschwindigkeiten sind mit der Größenordnung von 10^{-5} ms^{-1} relativ groß (Abschnitt 5.4). Die Abweichungen der Modelltemperaturen und Modellsalzgehalte von den hydrographischen Daten (Abschnitt 5.5) halten sich im Norden des Modellgebiets in Grenzen. Im Weddellmeer sind die Abweichungen besonders in der Tiefe bei den Temperaturen recht groß. Damit zeigt sich, daß die verwendeten nicht synoptischen Datensätze aus Satelliten-Altimetrie und Hydrographie nicht gut zusammenpassen. Die Quellen bezüglich Wärme und Salzgehalt sind in etwa eine halbe Größenordnung niedriger als der Diffusionsterm der Advektions-Diffusions-Gleichung (Abschnitt 5.6). Außerdem sind sie im Norden überwiegend positiv und im Süden überwiegend negativ. Die Wahl konstanter horizontaler und vertikaler Diffusionskoeffizienten K_h und K_v stellt nur eine grobe Parametrisierung subskaliger Prozesse dar. Es würde sich anbieten, sie ortsabhängig zu machen (siehe z.B. Olbers und Wenzel, 1989 [56]) und über einen entsprechenden Term in der Kostenfunktion J zu steuern. Die Größe von K_h könnte beispielsweise vom Breitengrad, von der Gitterweite des lokalen Elements oder vom Tetraedervolumen abhängigen. K_h und K_v könnten dann konstant auf den Elementen sein. Den vertikalen Diffusionskoeffizienten K_v könnte man nach Gargett (1984) [26] umgekehrt proportional zur Brunt-Väisälä Frequenz N setzen ($K_v \sim N^{-1}$).

Weil ihre Anwendung in der Behandlung von Problemstellungen in der Ozeanographie (noch) relativ selten ist, wurde die Methode der finiten Elemente ausführlich in Kapitel 3 vorgestellt. Ihr gewichtigster Vorteil für diese Arbeit ist, daß sie die Verwendung von unstrukturierten Gittern ermöglicht, wie beispielsweise das aus Abschnitt 4.1. Mit Tetraedern als Gitterelemente kann der komplizierten Geometrie, die durch die Bodentopographie gegeben ist, gut gefolgt werden, was in den Bildern (4.4) und (4.5) zu sehen war. Wegen der Variationsformulierung (Standard-Galerkin-Methode) des Advektions-Diffusions-Problems treten höchstens erste Ableitungen auf. Deshalb können die Basisfunktionen einfach gehalten werden, so daß Temperatur und Salzgehalt stückweise linear und die Geschwindigkeiten stückweise konstant auf den Elementen sind. Alle Parameter des Modells sind im gesamten Modellgebiet kontinuierlich gegeben. Im Abschnitt 3.10 wurde gezeigt, daß die diskreten Gleichungen, die aus der Variationsformulierung hervorgehen, einfach adjungiert werden können. Im wesentlichen handelt es sich dabei nur um das Transponieren der Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} . Nachteilig ist aber die vom Modell geforderte Speicherkapazität. Wie im Abschnitt 3.7 beschrieben wurde, liegt das vor allem in der Numerierung der Gitterpunkte. Sie führt zu einer Struktur der Steifigkeitsmatrix, in der die nicht-verschwindenden Einträge zum Teil sehr weit von

der Hauptdiagonalen entfernt liegen (große Bandbreite). Dieser Umstand erfordert bei der notwendigen Präkonditionierung des iterativen Lösers (GMRES) einen großen Anteil an der insgesamt benötigten Speicherkapazität.

Im Abschnitt 4.3 wurde die Massenerhaltung des Modells überprüft. Dabei wurde gezeigt, daß die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes $\nabla \cdot \mathbf{u}$ bis auf ein sehr kleines ε_u verschwindet. An mehr als 99.7% der Gitterpunkte ist $|\varepsilon_u| < 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ und liegt somit im Rahmen der numerischen Genauigkeit, die für das iterative Lösungsverfahren GMRES gesetzt wurde. Das Geschwindigkeitsfeld ist also quellenfrei. Somit ist das Modell massenerhaltend.

Die Entwicklung der Kostenfunktion J der präsentierten Modellergebnisse zeigt (Abschnitt 5.1), daß alle Terme der Kostenfunktion im Verlauf des Minimierungsprozesses um eine bis mehrere Größenordnungen reduziert wurden. Grundsätzlich ist es bei der Minimierung des Modells von Nachteil, daß die Modellgleichungen separieren (siehe Abschnitt 4.3) und damit keine Projektion der Zustandsgleichung (2.1) auf den Gradienten der Kostenfunktion ∇J besteht. Das heißt, daß die Ableitungen der Zustandsgleichung nach den unabhängigen Parametern (den Kontrollvariablen, Gl. 2.7) verschwinden und auch die Lagrangeschen Multiplikatoren λ_j , die in den Gradienten von J eingehen, unabhängig von der Zustandsgleichung sind. Die nachteiligen Eigenschaften, die das Inversmodell dadurch bekommt, wurden in den Abschnitten 4.3 und 5.1 beschrieben. Es erscheint also sinnvoll, in der weiteren Modellentwicklung für eine Projektion der Zustandsgleichung auf die Kostenfunktion zu sorgen.

6.2 Anmerkungen zum Gitter

An dieser Stelle sollen nochmal ein paar Anmerkungen zum Gitter gemacht werden. Denn von der Charakteristik des generierten Gitters werden die Eigenschaften des Modells deutlich beeinflusst.

Zunächst haben wir im Bild (3.4) im Abschnitt 3.7 gesehen, wie groß die Bandbreite der Steifigkeitsmatrix aufgrund der gegebenen Numerierung der Gitterpunkte ist. Wie schon mehrfach erwähnt, benötigt das GMRES-Verfahren deshalb eine gute Präkonditionierung und damit einen großen Speicherbedarf, um nach möglichst wenig Iterationen zu konvergieren. Eine Optimierung der Datenstruktur eines 3-dimensionalen unstrukturierten Gitters ist aber sicherlich nicht einfach. Ein vertikal strukturiertes Gitter¹ wird eine bessere Datenstruktur haben und somit eine günstigere (Speicherkapazität sparende) Struktur der Steifigkeitsmatrix ergeben. Allerdings ist dann aber die Möglichkeit der lokalen Gitterverfeinerung eingeschränkt.

Ein anderes Problem, das bereits in den Abschnitten 4.1 und 4.2 angesprochen wurde, betrifft die vertikale Auflösung am Boden. Bei dem Gitter aus Abschnitt 4.1 ist die Auflösung in Richtung der Normalen zum Boden maximal 500 Meter groß. Will man diesen Wert auf 250m verringern, vergrößert sich die Anzahl der Gitterpunkte von 13431 auf 26425 und die Zahl der Tetraeder von 65623 auf 129722. Eine Halbierung der Auflösung normal zum Boden führt also ungefähr zu einer Verdoppelung der Anzahl der Gitterpunkte und der Elemente. Die Anzahl der Dreiecke, die die Bodentopographie bilden erhöht sich von 6187 auf 16029. Zum Vergleich mit der Abbildung (4.3) zeigt das Bild (6.1) das Gitter mit der kleineren

¹Damit ist gemeint, daß die Gitterpunkte in Ebenen (z.B. horizontalen Flächen oder σ -Flächen) in verschiedenen Tiefen liegen und daß jeder Gitterpunkt in allen Ebenen einen Partnerpunkt hat, der über beziehungsweise unter ihm liegt.

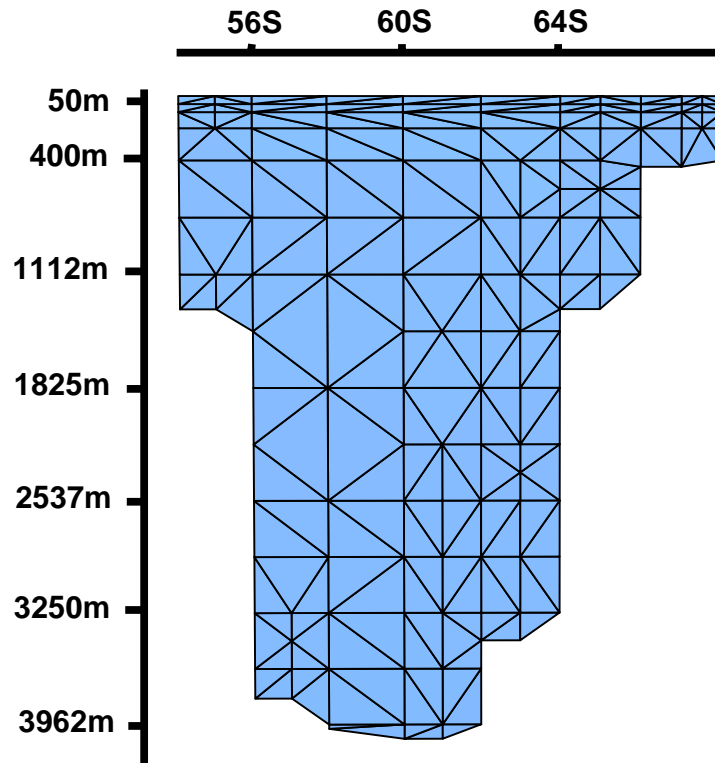


Abbildung 6.1: Zum Vergleich mit Abbildung (4.3): Offener Rand bei $70^\circ W$ zwischen Südatlantik und Drake-Passage eines Gitters mit feinerer Auflösung normal zum Boden.

Auflösung am Boden entlang des offenen Randes bei 70°W durch die Drake Passage. Wobei bei diesem Beispiel die flachen Kontinentalschelfe nicht mitgeneriert wurden. Die Verdopplung der Zahl der Gitterpunkte ist aber so nicht akzeptabel, weil dies unverhältnismäßig viel Speicherbedarf und CPU-Zeit erfordert. Eine andere Möglichkeit bestände im Einbau einer expliziten Bodenrandschicht, wie sie von Nechaev (1998) [53] vorgeschlagen wurde. Dabei soll das Gitter am Boden mit der gleichen vertikalen Auflösung wie im Innern des Modellgebiets aber überall um zum Beispiel 50 Meter flacher generiert werden, als es die Bodentopographie vorgibt. Jeder Gitterpunkt, der dann zum Boden gehört, bekommt einen Nachbarpunkt der 50 Meter weiter unter ihm positioniert wird. Diese zusätzlichen Punkte bilden dann den eigentlichen Boden. Somit würde das Modell eine 50 Meter dicke Bodenrandschicht bekommen. Am Beispiel des Gitters aus Abschnitt 4.1 würde durch diese Technik die Anzahl der Gitterpunkte nur um wenige tausend Punkte und die Anzahl der Tetraeder um schätzungsweise 18000 steigen. Die Punkte, die an das 50 Meter flachere Gitter angebaut werden müßten, wären bekannt. Man erhält dadurch dann eine Menge an Prismen, die jeweils in drei Tetraeder aufgespalten werden müssen. In der korrekten Aufspaltung in Tetraeder liegt dabei der größte Arbeitsaufwand.

6.3 Ausblick auf weitere Anwendungen

Aspekte zur möglichen weiteren Entwicklung des Modells wurden schon in diesem Kapitel erwähnt. So sollen die Transporte über die Ränder durch einen Term in der Kostenfunktion geregelt werden. Die Diffusionskoeffizienten sollen räumlich variabel gehalten werden, um eine bessere Parametrisierung subskaliger Prozesse zu erreichen und um damit die Quellen in der Advektions-Diffusions-Gleichung klein zu halten. Die Möglichkeiten des Einbaus einer Bodenrandschicht bei möglichst geringer Anzahl von Gitterpunkten wurde im vorhergehenden Abschnitt besprochen. Die Gesamtzahl an Gitterpunkten so klein wie möglich zu bekommen, wird vor allem auch dann wichtig, wenn das Modellgebiet auf den gesamten Atlantik, zirkumpolar oder gar global erweitert werden soll. Um genügend Rechnerressourcen zu bekommen, könnte es dann notwendig werden, das Modell auf Parallelmaschinen rechnen zu lassen.

Ein anderer Punkt ist, daß die SSH-Daten aus Satelliten-Altimetermessungen, die gerade im südlichen Südatlantik zur Verfügung stehen, nur eingeschränkt brauchbar sind. Außerdem passen sie – wie man in dieser Arbeit gesehen hat – nicht gut mit klimatologischer Hydrographie (ohne Jahresgang) zusammen. Die Verwendung synoptischer Datensätze könnte hier Verbesserungen bringen. Außerdem würden qualitativ bessere SSH-Daten sicherlich Referenzgeschwindigkeiten erzeugen, die das Bild der dargestellten Zirkulation realistischer gestalten würden.

Ein weiterer Aspekt ist, die Stationarität des Modells aufzuheben und mit der zeitabhängigen Advektions-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} C + \mathbf{u} \cdot \nabla C - K_h \Delta_h C - K_v \frac{\partial}{\partial z} C = F^C \quad (6.1)$$

zu rechnen. Die diskrete Form lautet dann gegenüber dem stationären Fall aus Gleichung (3.18)

$$\mathbf{M} \cdot \frac{\mathbf{c}^{t+1} - \mathbf{c}^t}{\Delta t} + \mathbf{S} \cdot (\alpha \mathbf{c}^{t+1} + \beta \mathbf{c}^t) = \alpha \mathbf{f}^{t+1} + \beta \mathbf{f}^t \quad (6.2)$$

mit $\alpha + \beta = 1$. \mathbf{M} ist die Massenmatrix, die bereits aus Abschnitt 3.6.4 Gleichung (3.53) bekannt ist. Im einfachsten Fall ist $\alpha = 0$ und $\beta = 1$. Der Fall $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0.5$ wird als Crank-Nicolson Methode bezeichnet. Näheres dazu findet man bei Johnson (1990) [44].

Bei der weiteren Anwendung des Modells besteht die Überlegung, transiente Tracer wie zum Beispiel CFCs oder Tritium zu verwenden. Damit würden zusätzliche Informationen bei der Bestimmung der ozeanischen Zirkulation einfließen. Die Tracer-Daten, die für die Assimilation zur Verfügung stehen (siehe z.B. Schlosser und Roether, 1999) [68], raten es allerdings an, die Länge der offenen Ränder zu minimieren. Das heißt, daß das Modell dafür zumindest auf den gesamten Atlantik erweitert werden sollte.

Literaturverzeichnis

- [1] Akima, H. On estimating partial derivatives for bivariate interpolation of scattered data. *Rocky Mountain J. of Math.*, 14(1):41–52, 1984.
- [2] Bagriantsev, N.V., A.L. Gordon and B.A. Huber. Weddell Gyre: Temperature maximum stratum. *J. Geophys. Res.*, 94:8331–8334, 1989.
- [3] Barrett, R., M. Berry, T.F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine und H. Van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [4] Barnier, B., P. Marchesiello and A.P. de Miranda. Modelling the Ocean Circulation in the South Atlantic: A Strategy for Dealing with Open Boundaries. In G. Wefer, W.H. Berger, G. Siedler, D.J. Webb, editor, *The South Atlantic: Present and Past Circulation*, pages 189–304. Springer-Verlag, 1996.
- [5] Beckmann, A., H. Hellmer and R. Timmermann. A Numerical Model of the Weddell Sea: Large Scale Circulation and Water Mass Distribution. *J. Geophys. Res.*, 104(C10):23375–23391, 1999.
- [6] Behrens, J. *Adaptive Semi-Lagrange-Finite-Elemente-Methode zur Lösung der Flachwassergleichungen: Implementierung und Parallelisierung*. PhD thesis, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Bremerhaven, 1996.
- [7] Behrens, J. Atmospheric and ocean modeling with an adaptive finite element solver for the shallow-water equations. *Appl. Num. Math.*, 26:217–226, 1998.
- [8] Bennett, A.F. Poleward Heat fluxes in the Southern Hemisphere. *J. Phys. Oceanogr.*, 8:789–798, 1978.
- [9] Brezzi, F., M.-O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet and G. Rogé. A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 96:117–129, 1992.
- [10] Brooks, A.N. and T.J.R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 32:199–259, 1982.
- [11] Bryan, K. A numerical method for the study of the circulation of the world ocean. *J. Comput. Phys.*, 4:347–376, 1969.

- [12] Connor, J.J. and J.D. Wang. Finite-element modeling of hydrodynamic circulation. Numerical Methods Fluids Dynamics, Pentech Press, London, 355-387, 1974.
- [13] Cox, M.D. A primitive equation, three-dimensional model of the ocean. GFDL Ocean Group Tech. Rep. No. 1, 143pp, 1984.
- [14] Dietrich, G., K. Kalle, W. Krauss, G. Siedler. *Allgemeine Meereskunde*. Gebrüder Borntraeger, Berlin, 1975.
- [15] England, M.H. On the formation of Antarctic Intermediate and Bottom Water in ocean general circulation models. *J. Phys. Oceanogr.*, 22:918–926, 1992.
- [16] England, M.H. and V.C. Garçon. South Atlantic circulation in a world ocean model. *Ann. Geophysicae*, 12:812–825, 1994.
- [17] Fahrback, E., G. Rohardt, M. Schröder and V. Strass. Transport and structure of the Weddell Gyre. *Ann. Geophysicae*, 12:840–855, 1994.
- [18] Fahrback, E., M. Schröder and A. Klepikov. Circulation and Water Masses in the Weddell Sea. *Phys. of Ice-Covered Seas*, 2:569–604, 1994.
- [19] Filipiak, M. Mesh Generation, Version 1.0. Technology Watch Report, Edinburgh Parallel Computing Centre, The University of Edinburgh, 1996.
- [20] Fix, G.J. Finite element model for ocean circulation problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 29(3):371–387, 1975.
- [21] Foster, T.D., A. Foldvik and H. Middleton. Mixing and bottom water formation in the shelf break region of the southern Weddell Sea. *Deep Sea Research*, 34:1771–1794, 1987.
- [22] Foster, T.D. and H. Middleton. Bottom water formation in the western Weddell Sea. *Deep Sea Research*, 27A:367–381, 1980.
- [23] Franca, L., S.L. Frey and T.J.R. Hughes. Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95:253–276, 1992.
- [24] Fu, L.-L. The general circulation and meridional heat transport of the subtropical South Atlantic determined by inverse methods. *J. Phys. Oceanogr.*, 11:1171–1193, 1981.
- [25] Fu, L.-L., E. Christensen, M. Lefebvre und Y. Ménard. TOPEX/POSEIDON mission overview. *J. Geophys. Res.*, 99(C12):24369–24381, 1994.
- [26] Gargett, A.E. Vertical eddy diffusivity in the ocean interior. *J. Mar. Res.*, 42:359–393, 1984.
- [27] Garnier, E., B. Barnier, L. Siefridt and K. Beranger. Air-sea fluxes from 15 years of ECMWF reanalysis: A surface boundary condition for OGCMs? manuscript subm. to *J. Climate Dyn.*, 1998.
- [28] Giering, R. Tangent linear and Adjoint Model Compiler. Center for Global Change Science, Dept. of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences, MIT, Cambridge, USA, 1997.

- [29] Gilbert, J.C. and C. Lemaréchal. Some Numerical Experiments with Variable-Storage Quasi-Newton Algorithms. *Mathematical Programming*, 45:407–435, 1989.
- [30] Gill, A.E. Circulation and bottom water production in the Weddell Sea. *Deep-Sea Res.*, 20:111–140, 1973.
- [31] Gill, A.E. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, Inc., 1982.
- [32] Gordon, A.L. Brazil-Malvinas Confluence – 1984. *Deep Sea Res.*, 36:359–384, 1989.
- [33] Gordon, A.L., F.W. Ray, W.M. Smethie and M.J. Warner. Thermocline and intermediate water communication between the South Atlantic and the Indian Oceans. *J. Geophys. Res.*, 97:7223–7240, 1992.
- [34] Haidvogel, D., J. Wilkin and R. Young. A semi-spectral primitive equation ocean circulation model using vertical sigma and orthogonal curvilinear horizontal coordinates. *J. Comput. Physics*, 94:151–185, 1991.
- [35] Haidvogel, D.B., A.R. Robinson and E.E. Schulman. The accuracy, efficiency and stability of three numerical models with application to open ocean problems. *J. Comput. Phys.*, 34:1–53, 1980.
- [36] Haidvogel, D.B., E. Curchitser, M. Iskandarani, R. Hughes and M. Taylor. Global Modeling of the Ocean and Atmosphere Using the Spectral Element Method. In C.A. Lin, R. Laprise and H. Ritchie, editor, *Numerical Methods In Atmospheric And Ocean Modelling*, pages 505–531. Canadian Meteorology and Oceanographic Society, 1997.
- [37] Hammer, P.C., O.J. Marlowe and A.H. Stroud. Numerical integration over simplexes and cones. *Math. tables a. o. aids to computation*, 10:130–137, 1956.
- [38] Hastenrath, S. Heat budget of tropical ocean and atmosphere. *J. Phys. Oceanogr.*, 10:159–170, 1980.
- [39] Hastenrath, S. On meridional heat transports in the World Ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, 12:922–927, 1982.
- [40] Hellerman, S. and M. Rosenstein. Normal Monthly Wind Stress Over the World Ocean with Error Estimates. *J. Phys. Oceanogr.*, 13:1093–1104, 1983.
- [41] Hughes, T.R.J., L.P. Franca and G.M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 73:173–189, 1989.
- [42] Hughes, T.R.J., M. Mallet and A. Mizukami. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. beyond SUPG. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 54:341–355, 1986.
- [43] Iskandarani, M., D.B. Haidvogel and J.P. Boyd. A Staggered Spectral Finite Element Model With Application to the Oceanic Shallow Water Equations. *Int. J. of Num. Meth. in Fluids*, 20:393–414, 1995.

- [44] Johnson, C. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, 1990.
- [45] King, C., D. Stammer and C. Wunsch. The CMPO/MIT TOPEX/POSEIDON Altimetric Data Set. Center for Global Change Science, Dept. of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences, MIT, Cambridge, USA, 1994.
- [46] Le Dimet and O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects. *Tellus*, 38A:97–110, 1986.
- [47] Le Provost, C. and P. Vincent. Finite Element for modelling ocean tides. In B. Parker, editor, *Tidal Hydrodynamics*, pages 41–60. John Wiley and sons Inc., 1991.
- [48] Le Roux, D.Y., A. Stanworth and C.A. Lin. Finite Elements for Shallow Water Equations Ocean Models. *Mon. Weat. Rev.*, 126:1931–1951, 1998.
- [49] Mantyla, A. and J.L. Reid. Abyssal characteristics of the World Ocean waters. *Deep Sea Res.*, 30:805–833, 1983.
- [50] Matano, R.P., S.G.H. Philander. Heat and Mass Balances of the South Atlantic Ocean Calculated From a Numerical Model. *J. Geophys. Res.*, 98(C1):977–984, 1993.
- [51] Munk, W.H. Abyssal recipes. *Deep-Sea Res.*, 13:707–730, 1966.
- [52] National Geophysical Data Center. Digital Relief of the Surface of the Earth. Data Announcement 88-MGG-02, NOAA, Boulder, CO, 1988.
- [53] Nechaev, D.A. An Inverse Finite Element Model of the Large Scale Circulation in the South Atlantic. unpublished manuscript, 1998.
- [54] Nechaev, D.A. and M.I. Yaremchuk. Application of the adjoint technique to processing of a standard section data set: World Ocean Circulation Experiment section S4 along 67°S in the Pacific Ocean. *J. Geophys. Res.*, 100(C1):865–879, 1995.
- [55] Olbers, D. A geometrical interpretation of inverse problems. In D.L.T. Anderson and J. Willebrand, editor, *Oceanic Circulation Models: Combining Data and Dynamics*, pages 79–93. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [56] Olbers, D. and M. Wenzel. Determining diffusivities from hydrographic data by inverse methods with applications to the circumpolar current. In D.L.T. Anderson and J. Willebrand, editor, *Oceanic Circulation Models: Combining Data and Dynamics*, pages 95–139. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [57] Olbers, D.J., V. Gouretzki, G. Seiß and J. Schröter. *Hydrographic Atlas of the Southern Ocean*. Alfred-Wegener-Institute for Polar and Marine Research, Bremerhaven, Germany, 1992.
- [58] Pacanowski, R.C., K.W. Dixon, and A. Rosati. The GFDL Modular Ocean Model Users Guide Version 1.0. GFDL Ocean Group Tech. Rep. No. 2, 46pp, 1991.
- [59] Pedlosky, J. *Geophysical Fluid Dynamics, 2nd Edition*. Springer-Verlag, New York, 1987.

- [60] Peterson, R.G. and L. Stramma. Upper-level circulation in the South Atlantic Ocean. *Prog. Oceanog.*, 26:1–73, 1991.
- [61] Peterson, R.G. and T. Whitworth III. The subantarctic and polar fronts in relation to deep water masses through the southwest Atlantic. *J. Geophys. Res.*, 94(C8):10817–10838, 1989.
- [62] Reid, J.L. On the total geostrophic circulation of the South Atlantic Ocean: Flow patterns, tracers and transports. *Prog. Oceanog.*, 23:149–244, 1989.
- [63] Rhodin, A., U. Calies and D.P. Eppel. IMAS – Integrated Modeling and Analysis System. GKSS-Forschungszentrum Geesthacht GmbH, Geesthacht, Germany, 1996.
- [64] Rintoul, S.R. South Atlantic interbasin exchange. *J. Geophys. Res.*, 96:2675–2692, 1991.
- [65] Saad, Y. and M.H. Schultz. GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3):856–869, 1986.
- [66] Schlitzer, R. Determining the mean, large-scale circulation of the Atlantic with the adjoint method. *J. Phys. Oceanogr.*, 23(9):1935–1952, 1993.
- [67] Schlitzer, R. An adjoint model for the determination of the mean oceanic circulation, air-sea fluxes and mixing coefficients. Berichte zur Polarforschung - Reports on Polar Research, Alfred-Wegener-Institut, Bremerhaven, No. 156, 1995.
- [68] Schlosser, P. und W. Roether. Anthropogene Spurenstoffe zur Untersuchung der ozeanischen Zirkulation. *Phys. Bl.*, 55(1):31–34, 1999.
- [69] Schmelzer, I. Intersection-based grid generation – programming and reference manual. WIAS Berlin, 1994.
- [70] Schmelzer, I. *3D Grid Generation with Contravariant Geometry Description*. PhD thesis, Weierstrass-Institut für angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, 1995.
- [71] Schröter, J. Driving of non-linear time-dependent ocean models by observation of transient tracers - A problem of constrained optimisation. In D.L.T. Anderson and J. Willebrand, editor, *Oceanic Circulation Models: Combining Data and Dynamics*, pages 257–285. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [72] Schröter, J., U. Seiler und M. Wenzel. Variational assimilation of GEOSAT data into an eddy resolving model of the Gulf Stream extension area. *J. Phys. Oceanogr.*, 23(5):925–953, 1993.
- [73] Schwab, C. and M. Suri. The p and hp versions of the finite element method for problems with boundary layers. *Math. of Comp.*, 65(216):1403–1429, 1996.
- [74] Schwarz, H.R. *Methode der finiten Elemente*. Teubner Stuttgart, 1991.

- [75] Seiß, G. Ein inverses Modell der globalen barotropen Zirkulation des Ozeans. Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Berichte aus dem Fachbereich Physik, Report 72, 1996.
- [76] Semtner, A. J. and R. M. Chervin. Ocean general circulation from a global eddy-resolving model. *J. Geophys. Res.*, 97:5493–5550, 1992.
- [77] Semtner, A.J. and R.M. Chervin. A simulation of the global ocean circulation with resolved eddies. *J. Geophys. Res.*, 93:15502–15522, 1988.
- [78] Sloyan, B. *The Circulation of the Southern Ocean and the adjacent ocean basins determined by inverse methods*. PhD thesis, Institute of Antarctic and Southern Ocean Studies, University of Tasmania, 1997.
- [79] Thacker, W.C. Three lectures on fitting numerical models to observations. Technical Report GKSS 87/E/65, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht, 1988.
- [80] Thomasset, F. *Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag New York Inc., 1981.
- [81] Toggweiler, J.R. and B. Samuels. Effect of Sea Ice on the Salinity of Antarctic Bottom Waters. *J. Phys. Oceanogr.*, 25:1980–1997, 1995.
- [82] Vogeler, A. and J. Schröter. Assimilation of satellite altimeter data into an open ocean model. *J. Geophys. Res.*, 100(C8):15951–15963, 1995.
- [83] Vreugdenhil, C.B. and B. Koren. *Numerical Methods for Advection-Diffusion Problems*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, Germany, 1993.
- [84] Walters, R.A. and F.E. Werner. A comparison of two finite element models of tidal hydrodynamics using a North Sea data set. *Adv. Water Resources*, 12:184–193, 1989.
- [85] Webb, D.J. et al. The RAM atlas of the Southern Ocean. Natural Environment Research Council, p 67, 1991.
- [86] Webb, D.J. et al. Using an eddy resolving model to study the Southern Ocean. *EOS*, 72:p15, 1991.
- [87] Wefer, G., W.H. Berger, G. Siedler, D.J. Webb. *The South Atlantic*. Springer-Verlag, 1996.
- [88] Whitworth III, T. Monitoring the Transport of the Antarctic Circumpolar Current at Drake Passage. *J. Phys. Oceanogr.*, 13:2045–2057, 1983.
- [89] Whitworth III, T., W.D. Nowlin, Jr. and S.J. Worley. The net transport of the Antarctic Circumpolar Current through Drake Passage. *J. Phys. Oceanogr.*, 12:960–971, 1982.
- [90] Whitworth III, T., W.D. Nowlin, R.D. Pillsbury, M.I. Moore and R.F. Weiss. Observations of the Antarctic Circumpolar Current and Deep Boundary Current in the Southwest Atlantic. *J. Geophys. Res.*, 96(C8):15105–15118, 1991.

- [91] Willebrand, J., R.H. Käse, D. Stammer, H.-H. Hinrichsen and W. Krauss. Verification of GEOSAT sea surface topography in the Gulf Stream Extension with surface drifting buoys and hydrographic measurements. *J. Geophys. Res.*, 95(C3):3007–3014, 1990.
- [92] Worthington, L.V. The water masses of the world ocean: Some results of a fine scale census. In B.A. Warren and C. Wunsch, editor, *Evolution of Physical Oceanography, Scientific surveys in honor of Henry Stommel*, pages 42–69. The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, Mass., 1981.
- [93] Wunsch, C. *The Ocean Circulation Inverse Problem*. Cambridge University Press, 1996.
- [94] Yaremchuk, M., D. Nechaev, J. Schröter and E. Fahrback. A dynamically consistent analysis of circulation and transports in the southwestern Weddell Sea. *Annales Geophysicae*, 16:1024–1038, 1998.
- [95] Zhu, K., I.M. Navon and X. Zou. Variational Data Assimilation with a Variable Resolution Finite-Element Shallow-Water Equations Model. *Monthly Weather Review*, 122:946–965, 1994.
- [96] Zienkiewicz, O.C. *Methode der finiten Elemente*. Carl Hanser Verlag München, 1984.