Welche Zeit ist notwendig, um unter gegebenen Akkumulations- und Temperaturverhältnissen einen Eisschild von der Größe des grönländischen Inlandeises oder der Antarktis aufzubauen?

Von R. Haefeli, Zürich *)
Schweiz. Gletscherkommission
Int. Glaziologische Grönlandexpedition

Da die in der Überschrift genannte Frage nur dann sinnvoll ist, wenn die Prämissen klargestellt werden, so wird auch die Antwort je nach den gemachten Voraussetzungen ganz verschieden ausfallen. Außerdem bedarf die Problemstellung an sich einer Präzisierung, weil die Zeit, die notwendig ist, um für gegebene klimatische Bedingungen den vollkommenen stationären Zustand zu erreichen, theoretisch unendlich lang ist. Wir schlagen deshalb vor, unsere Frage wie folgt zu präzisieren:

Welche Zeit ist notwendig, um einen Eisschild bei gegebenen klimatischen Bedingungen bis zu 95 %, 98 % oder 99 % seiner endgültigen Höhe des stationären Zustandes aufzubauen? Unter einem gegebenen Klima sei dabei eine konstante Akkumulation, konstante Temperaturverhältnisse, konstanter Erdwärmestrom etc. verstanden, d. h. Bedingungen, die in der Natur nicht vorkommen. Auch die maßgebenden Parameter k_1 und n des Fließgesetzes des Eises

$$1)\quad \varphi = k_1 \cdot \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^n \qquad {}^{1})$$

seien konstant, d. h. unabhängig von der jeweiligen Höhe des Eisschildes und der Zeit. [2])

Berechnung der Aufbauzeit

Wir betrachten den zentralen Teil eines Eisschildes im Bereich der Eisscheide (horizontale Eisoberfläche). Würde der seitliche Abfluß des Eises verhindert, so ließe sich die Aufbauzeit eines Eisschildes in einfachster Weise dadurch berechnen, daß man die maximale Mächtigkeit H in m des stationären Eisschildes durch die jährliche Akkumulation a, ausgedrückt in m Eis, dividiert, d.h.

$$2)\quad t_{oH} = \frac{H}{a} : t_{oh} = \frac{h}{a}$$

Für den Fall des freien seitlichen Eisabflusses kann gemäß *Fig. 1* (Schema) der zeitliche Aufbau eines streifenförmigen Eisschildes durch folgende Differentialgleichung formuliert werden:

$$3)\quad \frac{dh}{dt} = a - v_h \cdot \frac{h}{x} \qquad \text{worin bedeuten:}$$

a = Jährliche Akkumulation in m Eis

v_h = Mittlere horizontale Ausflußgeschwindigkeit, unter Annahme eines annähernd rechteckigen Geschwindigkeitsprofils

h = Eismächtigkeit im Zeitpunkt t

x = Horizontaler Abstand des betrachteten Geschwindigkeitsprofils vom Zentrum (Eisscheide).

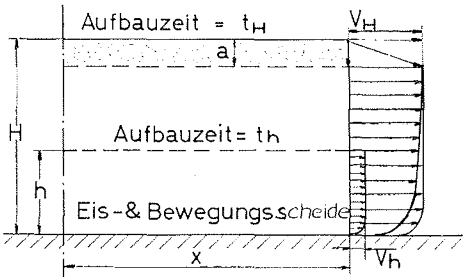

Fig. 1

*) Prof. R. Haefeli, Zürich 6/44, Susenbergstr. 193

[1]) φ bedeutet die Geschwindigkeit der Winkeländerung in einem kubischen Körperelement, k_1 die entsprechende spez. Winkelgeschwindigkeit für τ_1 = 1 kg/cm².

[2]) R. Haefeli: Contribution to the movement and the form of ice sheets in the Arctic and Antartic: Journal of Glaciology, Vol 3, No. 30, 1961 (p. 1133—1151).

Wir nehmen dabei an, daß sich der Fließvorgang praktisch auf eine relativ dünne bodennahe Eisschicht konzentriert, deren Fließvermögen (k_t-Wert) durch die Nähe des Schmelzpunktes erhöht wird. Auf Grund des Fließgesetzes des Eises gilt folgende Beziehung:

$$4)\ \frac{v_h}{v_H} = \left(\frac{\tau_h}{\tau_H}\right)^n = \left(\frac{h}{H}\right)^n$$

Ist der stationäre Zustand erreicht (h = H), so wird dh = O. Für diesen Grenzfall gilt nach Gl. 3:

$$5)\ 0 = a - v_H \cdot \frac{H}{x};\ v_h = \frac{a}{H} \cdot x$$

Durch Einsetzen der Gl. 4 und 5 in Gl. 3 erhält man die Differentialgleichung des Aufbauprozesses:

$$6)\ \frac{dh}{dt} = a - a\left(\frac{h}{H}\right) \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^n =$$

$$a\left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{n+1}\right];\ h' = \frac{h}{H}$$

$$7)\ \frac{dh'}{dt} = \frac{a}{H} \cdot \left[1 - h'^{(n+1)}\right]$$

Es zeigt sich, daß diese Differentialgleichung nicht nur für den streifenförmigen, sondern auch für den kreisförmigen Eisschild Gültigkeit hat, so daß die nachstehenden Lösungen für beide Fälle gelten.

Die Integration von Gl. 7 ist für n = 1 und n = 3 relativ einfach. Man erhält dabei folgende Ausdrücke für die gesuchte Aufbauzeit in Funktion der jeweiligen Eismächtigkeit h':

$$8)\ \underline{n = 1}\ :\ t_h = \frac{H}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + h'}{1 - h'};$$

$$h' = \frac{h}{H}$$

Um diesen Wert mit der ideellen Aufbauzeit ohne seitliches Abfließen zu vergleichen, wird nachstehend die Verhältniszahl λ gebildet, die nur von der relativen Eismächtigkeit h' abhängig ist.

$$9)\ \lambda_{(1)} = \frac{t_h}{to_h} = \frac{1}{2\,h'} \cdot \ln \frac{1 + h'}{1 - h'}$$

Der Fall n = 1 würde einer Newtonschen Flüssigkeit entsprechen, die sich wesentlich anders verhält als das Eis. Um dem wirklichen Verhalten des Eises näher zu kommen, betrachten wir den Fall n = 3. Die entsprechenden Ausdrücke lauten:

$$9)\ \underline{n = 3}\quad t_h = \frac{H}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot$$

$$\left[\operatorname{arc\,tg} h' - \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - h')}{(1 + h')}\right]$$

$$10)\ \lambda_{(3)} = \frac{1}{2h'} \cdot$$

$$\left[\operatorname{arc\,tg} h' - \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{(1 - h')}{(1 + h')}\right]$$

Die berechneten λ-Werte, welche das Verhältnis der Aufbauzeit mit seitlichem Abfluß zur ideellen Aufbauzeit ohne seitlichen Abfluß wiedergeben, sind in der nachfolgenden Tabelle für n = 1 und n = 3 enthalten und in *Fig. 2* dargestellt.

Aus dieser Tabelle 1 wie auch aus Fig. 2 geht hervor, daß sich die Verzögerung des Aufbaues des Eisschildes durch das seitliche Abfließen des Eises erst von ca. 80 % der Endhöhe H an stärker bemerkbar macht, bzw. mehr als 10 % beträgt. Um 99 % der Endhöhe zu erreichen, wäre für n = 3 mit einer Verzögerung von 73% gegenüber der Aufbauzeit ohne seitliches Ausfließen zu rechnen. Die Annäherung an den stationären Zustand erfolgt umso langsamer, je näher der Eisschild diesem Zustand bereits ist.

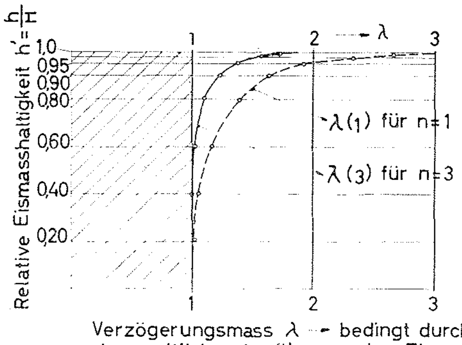

Fig. 2

Zahlenbeispiele

Das erste der nachstehenden Beispiele bezieht sich auf das grönländische Inlandeis, das zweite auf die Antarktis. In beiden

Tabelle 1 der λ-Werte für n = 1 und n = 3. (λ = Verzögerungsmaß)

h	$\ln \frac{1+h'}{1-h'}$	$\lambda_{(1)}$ n = 1	arc tg h'	$\frac{1}{2} \ln \frac{1-h'}{1+h'}$	$\lambda_{(3)}$ n = 3
1,00	∞	∞			∞
0,99	5,293	2,67	0,773	2,646	1,73
0,98	4,595	2,34	0,771	2,297	1,56
0,95	3,664	1,93	0,758	1,832	1,36
0,90	2,994	1,68	0,733	1,497	1,24
0,80	2,179	1,37	0,675	1,090	1,10
0,60	1,386	1,15	0,540	0,693	1,03
0,40	0,840	1,05	0,381	0,420	1,00
0,20	0,405	1,01	0,197	0,203	1,00

Tab. 2. Berechnung der Aufbauzeiten in Jahren.

a m/Jahr	H m	$t_{oHt} = \frac{H}{a}$	λ-Werte 95 %	98 %	99 %	th (95 %)	th (98 %)	th (99 %)
		Jahre				Jahre	Jahre	Jahre
1 Grönland								
0,30	3000	10'000	1,36	1,56	1,73	13'600	15'600	17'600
2. Antarktis								
0,10	4000	40'000	1,36	1,56	1,73	54'400	62'400	70'000

Fällen wird nach der Aufbauzeit gefragt. die bei konstantem Klima erforderlich wäre, um von 0 ausgehend 95, 98 bzw. 99 % der stationären Höhe H zu erreichen.

Durch diese analytische Darstellung wird die Ansicht bestätigt, daß in Wirklichkeit der stationäre Zustand eines Eisschildes kaum je erreicht werden kann, weil der Aufbauprozeß durch die relativ kurzfristigen Klimaschwankungen ständig gestört wird. Dagegen können gewisse Klimaveränderungen momentane Durchgänge durch einen scheinbar stationären Zustand bewirken, bei dem die Massenbilanz vorübergehend, d. h. während einiger Jahren, als ausgeglichen erscheint.

Vergleich zwischen Aufbau- und Abbauzeit
Rechnet man umgekehrt die Abflußzeit, die notwendig wäre, damit das Eis seitlich abfließen würde, wenn zur Zeit t = 0 die Akkumulation a gänzlich aufhören würde, so ergeben sich ganz andere Verhältnisse. Die Differentialgleichung lautet dann:

$$11)\quad \frac{dh'}{dt} = -\frac{a}{H} \cdot h^{n+1}; \qquad h' = \frac{h}{H}$$

und ihre Lösung:

$$12)\quad t = \frac{H}{a} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{h'^n} - 1\right)$$

$$13)\quad \text{für } n = 3 : t = \frac{H}{a} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{h'^3} - 1\right)$$

$$= \frac{H}{a} \cdot \lambda';$$

$$14)\quad \lambda' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{h'^3} - 1\right)$$

$h' = 1 \ \ 1/2 \ \ 1/3 \ \ 1/4 \ \ 1/5 \ \ 1/10$
$\lambda' = 0 \ \ 2{,}33 \ \ 8{,}67 \ \ 21 \ \ 41{,}3 \ \ 111$

Für $\frac{H}{a}$ = 10'000 (Grönland)
$h' = 0{,}1 \quad t = 1{,}11$ Mill. J.

Für $\frac{H}{a}$ = 40'000 (Antarktis)
$h' = 0{,}1 \quad t = 4{,}44$ Mill. J.

d. h. eine Abnahme der Akkumulation hat nur einen sehr langsamen Abbau zur Folge. Viel rascher erfolgt der Abbau bei einer Temperaturänderung, die eine starke Ablation mit einer Hebung der Firnlinie bewirkt.

Schlußbemerkung:
Selbstverständlich handelt es sich bei unserer Analyse nur um ideelle Grenzzustände, die von den Vorgängen in der Natur wesentlich abweichen. Wir sind uns deshalb voll bewußt, daß diese theoretischen Zusammenhänge mit allen nötigen Vorbehalten zu betrachten sind.