

Modellierung der Entstehung von  
Radarstrukturen im Grönländischen Eisschild  
als Instabilitäten verursacht durch  
Viskositätsunterschiede zwischen Eisschichten

Laura Dohn, Mat.-Nr. 2376669

**Masterarbeit**

im Studiengang Geowissenschaften

Abgabe: 02. Dezember 2015



1. Gutachter: Prof. Dr. Angelika Humbert
2. Gutachter: Dr. Torsten Bickert

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
2.1	Stand der Wissenschaft . . . . .	6
2.1.1	Isochronenarchitektur . . . . .	6
2.1.2	Technischer Stand . . . . .	8
2.2	Motivation und wissenschaftliche Fragestellung . . . . .	9
2.2.1	Viskosität . . . . .	9
2.2.2	Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten . . . . .	9
2.2.3	Aufgaben- und Fragestellung . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Theorie</b>	<b>11</b>
3.1	Bilanzgleichungen . . . . .	11
3.1.1	Massenbilanz . . . . .	11
3.1.2	Impulsbilanz . . . . .	11
3.2	Konstitutivgleichung und Rheologie des Eises . . . . .	12
3.2.1	Glennsches Fließgesetz . . . . .	13
3.3	Grenzbedingungen . . . . .	14
3.3.1	Eisoberfläche . . . . .	14
3.3.2	Eisunterseite . . . . .	15
3.3.3	Laterale Grenzen . . . . .	15
3.4	Finite-Elemente-Methode . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Implementierung des Modells</b>	<b>17</b>
4.1	Parameter . . . . .	18
4.2	Geometrie . . . . .	20
4.3	Arbitrary-Lagrangian-Eulerian-Methode . . . . .	22
4.4	Laminar flow . . . . .	23
4.5	Mesh . . . . .	24
4.5.1	Fine Triangular . . . . .	25
4.5.2	Mapped Mesh . . . . .	25

4.6	Study . . . . .	25
4.6.1	Stationary Solver . . . . .	25
4.6.2	Time Dependent Solver 1 . . . . .	25
4.7	Altersmodell . . . . .	26
4.7.1	Variablen . . . . .	26
4.7.2	Convection-Diffusion Equation . . . . .	26
4.7.3	Time Dependent Solver 2 . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Experimente und Ergebnisse</b>	<b>28</b>
5.1	Verifikation . . . . .	28
5.2	Entwicklungsverlauf . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Diskussion</b>	<b>43</b>
6.1	Randbedingungen . . . . .	43
6.2	Gitter . . . . .	46
6.2.1	Elemente . . . . .	46
6.2.2	Auflösung in x-Richtung . . . . .	47
6.2.3	Auflösung in y-Richtung . . . . .	48
6.3	Spektrum des Enhancement-Faktors . . . . .	51
6.4	Implementierung der Viskosität . . . . .	53
6.4.1	Geometrie . . . . .	53
6.4.2	Altersgleichung . . . . .	54
6.5	Faltenbildung . . . . .	55
6.6	Verhalten der Geometrie . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Ausblick und Schlussfolgerung</b>	<b>58</b>
<b>8</b>	<b>Danksagung</b>	<b>61</b>
<b>9</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>65</b>
<b>10</b>	<b>Anhang</b>	<b>68</b>

# 1 Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Entwicklung eines mathematischen 2D-Modells zur Untersuchung des Einflusses der Viskosität bei der Entstehung großräumiger Faltenstrukturen, die z.B. im Grönländischen Eisschild gefunden wurden. Das Modell wird mit der Software COMSOL Multiphysics(c) realisiert. Die Viskosität der Eisschichten wird über den Enhancement-Faktor gesteuert, der u.A. Verunreinigungen in der Eisstruktur parametrisiert.

Probleme in der Modellierung ergaben sich aus der Wahl der Randbedingungen, der Gitterelemente und -größe sowie der Art der Implementierung des Enhancement-Faktors.

Während für das Gitter eine geeignete Lösung gefunden wurde, konnten die Randbedingungen nur für Teilbereiche der Fragestellung zufriedenstellend modelliert werden. Die Implementierung der Viskosität fand auf zwei unterschiedlichen Wegen statt - über die Geometrie und über ein Altersmodell. Beide Ansätze haben Vor- und Nachteile bei der Beantwortung der Fragestellung, die in dieser Arbeit diskutiert werden.

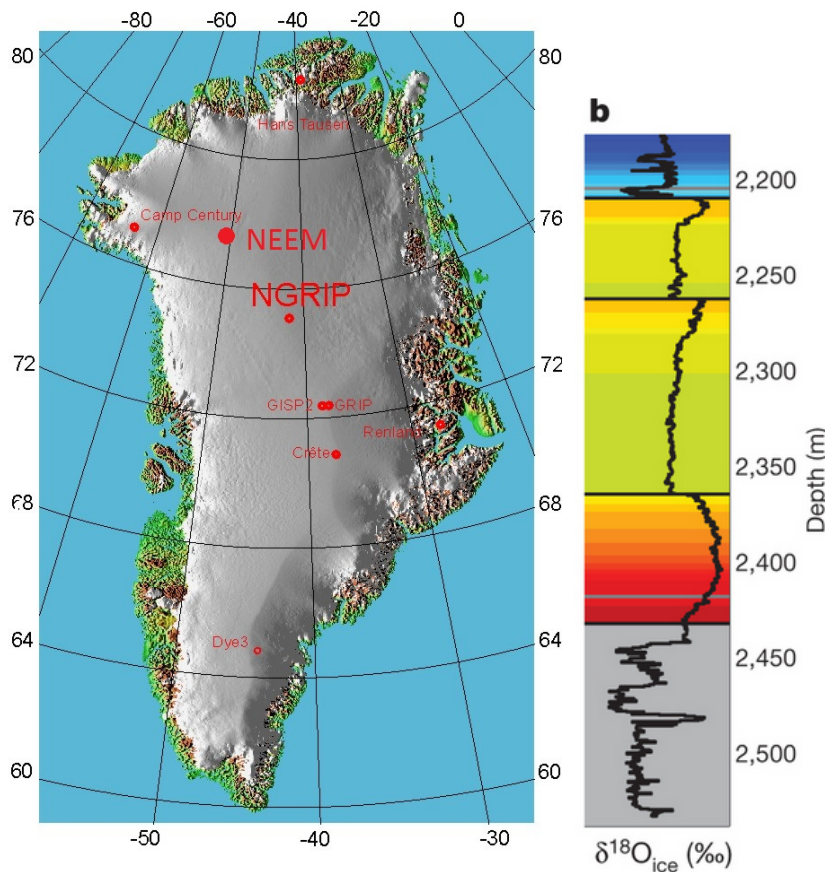
Das Modell ist in der Lage, durch die Bodentopographie ausgelöste Falten darzustellen. Viskositätsabhängige Falten konnten nicht erzeugt werden.

## 2 Einleitung

Grönland ist die größte Insel der Welt und wird, bei einer Eisbedeckung von etwa 80%, nach der Antarktis vom zweitgrößten Eisschild der Erde bedeckt. Das Eis ist bis zu 3,4 km dick, im Durchschnitt sind es 2 km. Würde diese Eismasse abschmelzen, hätte dies einen Meeresspiegelanstieg von 7,36 m zur Folge (Bamber et al., 2013).

Die Dicke des Eisschildes ließ darauf schließen, dass untere Schichten des abgelagerten Eises aus dem Eem, dem letzten Interglazial vor heute, das etwa 130.000-115.000 Jahre vor heute war, gefunden werden können. Dies ist für die Forschung interessant, da das Klima im Eem ähnlich stabil wie heute war, allerdings um wenige Grad wärmer. Die Befunde könnten Aufschluss darüber bringen, was bei einer Erwärmung des Klimas passieren könnte. Ab Ende der 70er Jahre des letzten Jahrhunderts gab es mehrere Eiskernbohrungen bis zum Grönländischen Bettgestein, mit dem Ziel, Eis aus dem Eem zu finden.

Der aktuellste Eiskern ist der North Greenland Eemian Ice Drilling-Kern, kurz NEEM-Kern genannt (Abb.1 (a)). Er wurde zwischen 2008 und 2012 gezogen und beinhaltet vermutlich das gesamte Eem (Dahl-Jensen et al., 2012). Untersuchungen des Kerns, wie z.B. die Analyse der stabilen Isotope, zeigen eine Störung der Eisschichten. Einige Bereiche wiederholen sich, andere fehlen oder liegen invertiert vor (Abb. 1 (b)). Eine mögliche Ursache für Störungen der Messwerte ist, dass das Eis im relativ warmen Eem antaute und wieder gefror, was zu Verfälschungen der Werte führt. Dieses Phänomen wird auch rezent beobachtet (Dahl-Jensen et al., 2012), reicht zur Erklärung der vorliegenden Störungen aber nicht aus.



(a) Lokation des NEEM-Kerns und vorhergehender Bohrprojekte in Grönland (b) Störungen in der zeitlichen Abfolge der Messwerte von stabilen Sauerstoffisotopen

Abbildung 1: Dahl-Jensen et al., 2012

Im Gebiet des NEEM-Kerns wurde Radargramme aufgenommen, die neben der Eisgeometrie auch den Eisuntergrund und das Bett zeigen (Abb. 2). Die einzelnen, dunklen Linien innerhalb des Eises, werden als Isochronen interpretiert (Leysinger Vieli, 2007) und stellen daher die abgelagerten Eisschichten eines jeden Jahres dar. In den Aufnahmen wird sichtbar, dass die Eisschichten aufgeschoben und gefaltet wurden.

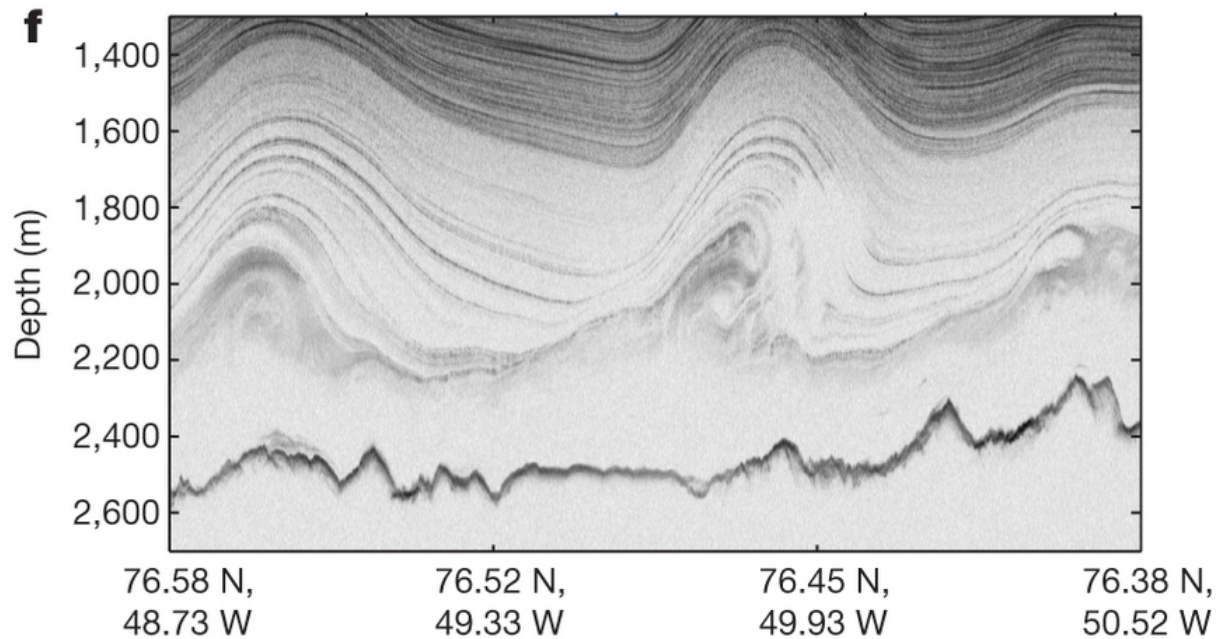


Abbildung 2: Radaraufnahme nordwestlich der NEEM-Lokation; einzelne, dunkle Linien werden als Isochronen interpretiert; die dicke, dunkle Linie stellt die Bodentopographie dar (Center for Remote Sensing of Ice Sheets, 2011; veröffentlicht von Dahl-Jensen et al., 2012)

In dieser Arbeit soll nun ein möglicher Mechanismus, der zur Entstehung dieser gefalteten bzw. undulierten Eisstrukturen führt, modelliert werden.

## 2.1 Stand der Wissenschaft

Sowohl über die Entstehung der Undulationen als auch über die Isochronen an sich ist bisher nicht viel bekannt. Bereits die Annahme, dass die einzelnen, dunklen Linien der Radargramme Isochronen darstellen, ist eine Vermutung. Hindmarsh et al. (2006) stellten fest, dass überraschend wenig darüber geforscht wurde, wie die Gletschermechanik die Isochronenarchitektur beeinflusst.

### 2.1.1 Isochronenarchitektur

Weertman (1976) beschrieb, wie sich Veränderungen an der basalen Grenze des Eises auf die überliegenden Schichten auswirken. So wird das Alter der Isochronen über- bzw. unterschätzt, wenn Eis von einem Bereich mit gefro-

renem Bett über einen Bereich mit angetautem Bett fließt, bzw. umgekehrt. Dies ist als Weertman-Effekt bekannt.

Der Raymond-Effekt (Raymond, 1983) tritt besonders an Eisscheiden auf. Hier fließt das Eis in unterschiedliche Richtungen auseinander, was zur Bildung von Antiklinalen führt, die als Raymond-Bögen („Raymond arches“) bezeichnet werden.

Pattyn (2002) untersuchte den Einfluss der Bodenrauheit auf die Verlässlichkeit der Auswertung von Eiskerndaten. Es wurde bereits vermutet, dass sich eine hohe Rauheit des Bettes negativ auf die Genauigkeit der Ergebnisse auswirkt. Pattyn zeigte, dass nicht nur dies der Fall war, sondern dass darüber hinaus auch Daten aus dem oberen Bereich des Eiskerns beeinträchtigt sein können.

Zwei weitere Faktoren, die einen Einfluss auf die Architektur der Isochronen haben können, wurden durch Gudmundsson (2003) beschrieben. Dies waren zum einen die Wellenlängen der Bodentopographie, zum anderen die „Slip Ratio“, die das Verhältnis von basaler Geschwindigkeit zur Deformationsgeschwindigkeit darstellt.

Hindmarsh et al. (2006) überprüften den Einfluss der durch Gudmundsson beschriebenen Faktoren in einem Modell und kamen zu dem Schluss, dass die Wellenlängen der Bodentopographie den größten Einfluss haben. Eis zeigt zwei charakteristische Verhaltensweisen, um auf die Bodentopographie zu reagieren. Ist die Wellenlänge der Bodentopographie kleiner bis so lang wie die Dicke des überliegenden Eises, so zeigt sich kein Einfluss und die Eisschichten überlagern das Bett horizontal, sofern kein anderer Einfluss besteht. Bei einer größeren Wellenlänge passen sich die Eislagen dem Bett an und zeigen Undulationen.

Leysinger Vieli et al. (2007) untersuchten mittels eines Modells, welchen Einfluss Veränderungen des internen Fließverhaltens des Eises sowie das basale Fließverhalten auf Unregelmäßigkeiten in den Isochronen haben können. Die Modellergebnisse zeigen, dass eine Kombination verschiedener Fließeffekte die Isochronen über die gesamte Dicke des Eisschildes beeinflussen kann und



dass Veränderungen der Lagen in Oberflächennähe nicht allein auf Veränderungen in der Akkumulationsrate zurückgeführt werden können.

Allgemein hat eine Änderung in der Akkumulationsrate eine größere Auswirkung auf die jüngeren Isochronen, eine Änderung der basalen Bedingungen dagegen auf die älteren und eine Änderung in der Viskosität auf die dazwischen gelegenen Eisschichten (Leysinger Vieli et al., 2007).

### **2.1.2 Technischer Stand**

Zwei technische Faktoren sind dafür verantwortlich, dass bisher wenig über das Thema geforscht wurde: Das Bodenradar und der PC.

Obwohl das Bodenradar bereits seit den 1930er Jahren in der Glaziologie eingesetzt wird, waren die Möglichkeiten zur genauen Untersuchung der Isochronen bisher begrenzt. Neue Technik erhöht die Auflösung der einzelnen Schichten und verringert den Umfang der so genannten „echofreien Zone“, die den Übergangsbereich von den klar abgegrenzten Isochronen zum Gesteinsbett darstellt, in dem die Eisschichten nur schwer bis gar nicht erkannt werden können. Es war bisher nicht immer möglich, Aussagen darüber zu treffen, ob diese Zone tatsächlich aus einer dicken, beispielsweise angetauten und wieder angefrorenen Eisschicht besteht, oder aus nicht unterscheidbaren Einzellagen.

Die Radargramme um die NEEM-Lokation herum wurden mit einem speziell für die Eisüberwachung in der Antarktis und Grönland entwickeltem Bodenradar aufgenommen, das verschiedene Wellenlängen kombiniert, um alle Eislagen bis zum Bett genau zu erkennen (Leuschen et al., 2010). Fortgeschrittene Konzepte und Technik dieser Art wurden bereits in den 1970er Jahren vorgeschlagen, waren aber aus technischen und finanziellen Gründen noch nicht umzusetzen (Rodríguez-Morales et al., 2014).

Das gleiche trifft auf den Punkt der Rechner zu. Die eingeschränkte Rechenleistung älterer Computer erlaubte oft nur Näherungen der benötigten Gleichungen zu berechnen.

## 2.2 Motivation und wissenschaftliche Fragestellung

In dieser Arbeit soll überprüft werden, welchen Einfluss die Viskosität, im Besonderen die Viskositätsunterschiede zwischen aufeinanderfolgenden Eisschichten, auf die Architektur der Isochronen hat.

### 2.2.1 Viskosität

Bei Eis handelt es sich um ein nicht-newtonsches Fluid. Das bedeutet, dass es nichtlinear auf Belastungen reagiert. Beginnt eine Last auf ein Eisschild zu wirken (z.B. durch die sich immer neu ablagernden Eisschichten, sowie Schnee und Firn, die auf die unterliegenden Schichten drücken), so verhält sich dieses zunächst wie ein Festkörper und widersteht der Auflast. Über längere Zeit beginnt das Eis unter der Last jedoch zu fließen und verhält sich wie ein Fluid.

Die Viskosität ist ein Maß für die Fließfähigkeit eines Fluids und vom betrachteten Material abhängig. Verglichen mit Wasser liegt die Viskosität von Eis deutlich höher, d.h. es fließt langsamer. Untersuchungen am NEEM-Kern zeigen, dass die Viskositätsunterschiede im Eis, insbesondere dem Übergangsbereich zwischen dem Eem und der folgenden Kaltzeit, sich um Faktoren von 50 bis 100 unterscheiden können (Dahl-Jensen et al., 2012).

### 2.2.2 Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten

Als möglicher bzw. vergleichbarer Mechanismus zur Entstehung der Undulationen werden Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten herangezogen. Diese entstehen, wenn entweder zwei Fluide, zwei Gase oder eine Kombination dieser bzw. ein einziger Gas- oder Fluidkörper mit unterschiedlichen internen Strömungsgeschwindigkeiten vorliegt. Da in diesem Fall Eis vorliegt, wird von einem einzigen Fluidkörper ausgegangen. Fließen nun zwei Ebenen dieses Fluids unterschiedlich schnell und entsteht eine Reibung an der Grenzfläche, so zieht die schnellere Ebene an der langsamer fließenden und es entstehen Verwirbelungen (Abb. 3).

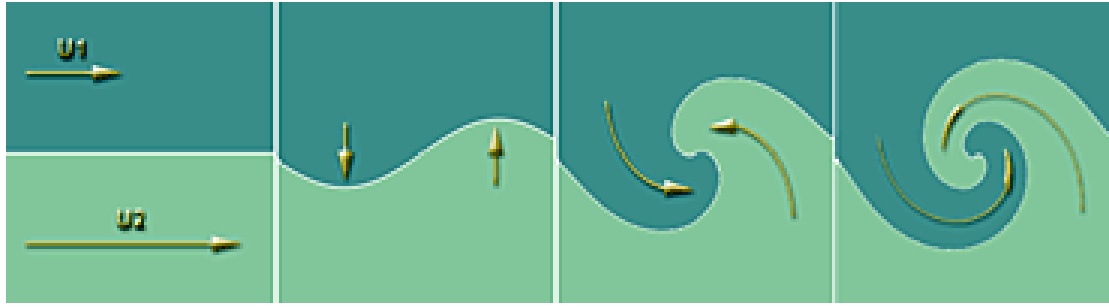


Abbildung 3: Schematische Darstellung von Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten  
 (<http://www.brockmann-consult.de/CloudStructures>)

Beispiele für Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten sind Wellen auf dem Wasser oder auch bestimmte Wolkenformationen.

### 2.2.3 Aufgaben- und Fragestellung

Den Hauptanteil dieser Arbeit macht die Entwicklung des Modells aus. Es müssen geeignete Randbedingungen gefunden werden sowie Lösungen, um numerische Probleme zu beseitigen und die Bildung von Falten zu ermöglichen.

Besonders wird die Rolle der Viskosität bei der Entstehung der Undulationen untersucht. Hierfür sollen neben der Frage, ob die Viskosität allein für die Entstehung ausreicht, auch die Fragen nach der für die Bildung nötigen Zeit und der Höhe des Viskositätsunterschieds zwischen den Schichten untersucht werden.

Ein weiterer Schritt ist die Einbindung der Bodentopographie. Wie im Abschnitt "Isochronenarchitektur" beschrieben, ist bekannt, dass die Bodentopographie einen Einfluss auf die Isochronenarchitektur haben kann, wenn sie sehr stark ausgeprägt ist (Hindmarsh et al., 2006). Ob eine geringere Ausprägung in Kombination mit der Viskositätsbetrachtung ausreichend ist, ist eine weitere Fragestellung dieser Arbeit.

Diese Masterarbeit wurde innerhalb der Arbeitsgruppe Glaziologie am Alfred-Wegener-Institut durchgeführt.

## 3 Theorie

Dieses Kapitel beschreibt kurz die mathematischen und physikalischen Hintergründe, die für die Erstellung des Modells benötigt werden. Zunächst wird hierbei auf die Gleichungen, durch die das Modell beschrieben wird, eingegangen und deren Hintergründe sowie enthaltene Größen erläutert. Danach wird die Finite-Elemente-Methode beschrieben, durch die eine Näherungslösung der Gleichungen bestimmt wird. Die konkrete Implementierung des Modells in COMSOL Multiphysics(c) wird im anschließenden Kapitel beschrieben.

### 3.1 Bilanzgleichungen

Das Fließen von Eis findet langsam auf sehr langen Zeitskalen statt. Es wird als Problem der Fluidmechanik behandelt. Dies bedeutet, dass es über kontinuumsmechanische Gleichungen beschrieben wird. Im Speziellen sind dies die Gleichungen zu Masse und Impuls, die im Folgenden für den 2D-Fall beschrieben werden.

Die aufgestellten Gleichungen sind als Stokes-Gleichungen bekannt. Ein Modell, welches diese komplett löst, also keine Terme vernachlässigt, wird als full Stokes-Modell bezeichnet.

#### 3.1.1 Massenbilanz

Eis ist ein inkompressibles Fluid mit einem quellen- und senkenfreien Geschwindigkeitsfeld  $v$ :

$$\operatorname{div}(v) = 0.$$

#### 3.1.2 Impulsbilanz

Die Impulsbilanz kann aus dem zweiten newtonschen Gesetz abgeleitet werden. Sie besagt, dass die Impulsänderung den von außen wirkenden Volu-

menkräften  $f$  und Oberflächenkräften  $\sigma$  entsprechen muss. Die lokale Form der Impulsbilanz lautet:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v v) = \operatorname{div}(\sigma) + f.$$

Da Eis langsam fließt und damit über eine hohe Viskosität bzw. eine niedrige Reynolds-Zahl verfügt, können die Trägheitskräfte vernachlässigt werden, sodass nur die Gravitationskraft  $\rho g$  mit  $g=(0, -g)^T$  als Anteil übrig bleibt.

$$\operatorname{div}(\sigma) + f = 0$$

$\sigma$  bezeichnet den Cauchyschen Spannungstensor, der den Spannungszustand eines Punktes im deformierbaren Material beschreibt. Er wird in einen deviatorischen Anteil  $\sigma^D$  und einen Anteil, der den hydrostatischen Druck beinhaltet  $pI$  aufgeteilt.

$$\sigma = \sigma^D - pI$$

$I$  bezeichnet den Identitätstensor,  $p=-1/2\operatorname{tr}\sigma$  den Druck. Dies führt zur Stokes-Gleichung:

$$\operatorname{div}(\sigma^D - pI) = -\rho g$$

### 3.2 Konstitutivgleichung und Rheologie des Eises

Eis ist ein nicht-newtonsches Fluid. Das bedeutet, dass es nicht linear auf Spannung reagiert (Abb. 4). Wird Eis belastet, so verhält es sich auf kurzen Zeitskalen elastisch wie ein Festkörper und widersteht der Last. Bleibt diese jedoch über längere Zeit bestehen, beginnt das Eis, sich durch die Gravitation viskos wie ein Fluid zu verhalten und zu fließen.

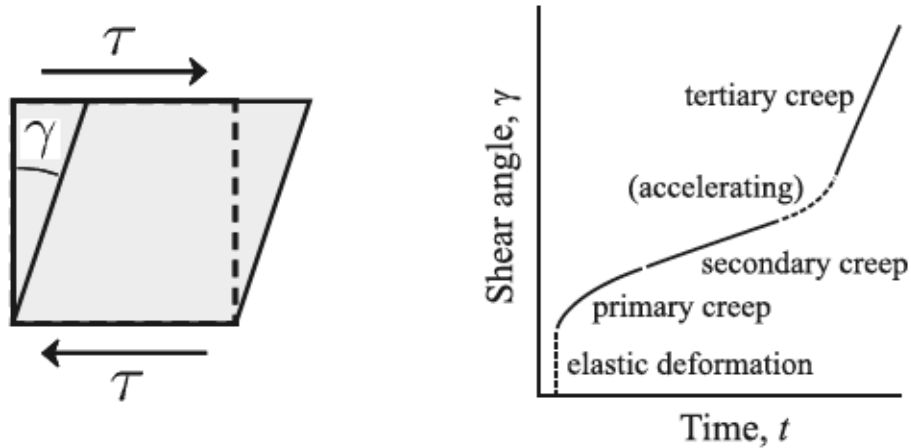


Abbildung 4: links: Resultierender Scherwinkels an einem Eisblocks unter Scherspannung; rechts: Veränderung des Scherwinkels über die Zeit (Greve und Blatter, 2009)

### 3.2.1 Glensches Fließgesetz

Die bis hierher beschriebenen Formeln sind materialunabhängig und können auf jedes inkompressible Fluid angewendet werden. Zur Lösung der Gleichungen für das Material Eis wird nun noch ein Konstitutivgesetz benötigt - das Glensche Fließgesetz (Glen, 1955).

$$\dot{\epsilon}_{ij} = EA\tau_e^{D^{n-1}}\tau_{ij}^D$$

$\dot{\epsilon}_{ij}$  bezeichnet den Verformungsgeschwindigkeits-Tensor (*strain rate tensor*) in der Komponentenform:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

$\tau_e^D$  ist die effektive deviatorische Spannung bzw. die zweite Invariante des deviatorischen Spannungstensors. Der Rate-Faktor A sowie der Enhancement-Faktor E können große Schwankungen in der Fließfähigkeit verursachen. Der Rate-Faktor erhöht sich exponentiell mit der Eistemperatur, sodass das Eis sich leichter verformt, wenn es sich dem Druckschmelzpunkt nähert. Er ist abhängig von Temperatur und Wassergehalt. Die inverse Form des Glenn-

schen Fließgesetzes lautet:

$$\tau^D = 2\mu\dot{\epsilon},$$

mit

$$\mu(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2}(EA)^{-1/n}\dot{\epsilon}_e^{\frac{1-n}{n}}.$$

Die effektive Verformungsrate (*strain rate*) wird mit  $\dot{\epsilon}_e = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}\dot{\epsilon}_e^2}$  bezeichnet. Der Enhancement-Faktor beinhaltet eine Anzahl von Parametern, die nicht durch den Rate-Faktor abgedeckt werden. Dies sind beispielsweise Größe und Orientierung der Eiskristalle oder der Einschluss von Unreinheiten. Der Enhancement-Faktor kann in einem großen Bereich schwanken (Paterson, 1991).

Für diese Arbeit wird die Viskosität des Eises über den Enhancement-Faktor gesteuert.

### 3.3 Grenzbedingungen

Die bisher aufgestellten Gleichungen sind nur innerhalb des betrachteten Körpers gültig. Dort, wo der als Kontinuum definierte Eiskörper mit der Außenwelt bzw. den Grenzbereichen zum umliegenden Eis in Kontakt tritt, ändern sich die Bedingungen der Bilanzgleichungen sprunghaft. Für diese Übergangsbereiche müssen neue Gleichungen definiert werden.

#### 3.3.1 Eisoberfläche

Die Eisoberfläche stellt den Übergang vom Eis zur Atmosphäre dar. Dieser Bereich ist spannungsfrei. In der impliziten Form wird er mit:

$$F_s(x, t) = z - z_s = 0,$$

beschrieben.  $z_s$  bezeichnet die Position der Eisoberseite. Die kinematische Randbedingung lautet:

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + v_x \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_y \frac{\partial z_s}{\partial y} + v_z = N_s a_s^\perp$$

$a_s^\perp$  bezeichnet die Akkumulation auf die Eisoberfläche,  $N_s$  die Gradientennorm:

$$N_s = |\nabla F_s| = \left(1 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Grenzfläche wird vereinfacht als reibungsfrei betrachtet. Es ergibt sich die dynamische Grenzbedingung:

$$tn = 0$$

### 3.3.2 Eisunterseite

Die implizite Beschreibung der Eisunterseite sowie die kinematische Randbedingung erfolgen analog zur Eisoberseite.

$$F_s(x, t) = z - z_b = 0$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + v_x \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_y \frac{\partial z_b}{\partial y} + v_z = N_b a_b^\perp$$

$z_b$  beschreibt hier die Höhe und  $N_b$  die Gradientennorm der Eisunterseite.

$$N_b = |\nabla F_b| = \left(1 + \left(\frac{\partial z_b}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

### 3.3.3 Laterale Grenzen

Im Modell wird ein Ausschnitt aus einem Eisschild betrachtet. Die seitlichen Randbedingungen werden daher so gewählt, dass der Eisblock als Baustein einer Aneinanderreihung von Modellen gesehen werden kann. Das Eis, das auf einer Seite aus dem Modell herausfließt, fließt in gleicher Geschwindigkeit  $v$  und mit gleichem Druck  $p$  auf der anderen Seite wieder hinein:

$$v^+ = v^-$$



$$p^+ = p^-$$

### 3.4 Finite-Elemente-Methode

Zur Lösung der bis hier beschriebenen partiellen Differentialgleichungen, wird die Finite-Elemente-Methode verwendet. Diese hat gegenüber beispielsweise der Finite-Differenzen-Methode den Vorteil, dass das verwendete Gitter je nach Bereich mehr oder weniger feinmaschig gewählt werden kann. So kann z.B. das Gitter um den Bereich, an dem zwei Eisschichten aufeinanderliegen, enger gewählt werden, damit die Entstehung der Undulationen sichtbar wird, ohne den Rechenaufwand für den Gesamtbereich zu erhöhen. Bei der Finite-Elemente-Methode wird der Modellbereich in eine Anzahl Elemente von finiter Größe aufgeteilt. Für jedes Element werden Ansatzfunktionen definiert, die in die oben aufgestellten Differentialgleichungen eingesetzt werden. Je höher die Anzahl an Elementen in einem Modell, umso mehr Ansatzfunktionen werden definiert und umso genauer ist die folgende numerisch bestimmte Lösung.

## 4 Implementierung des Modells

Das Eismodell wird in der kommerziellen Finite-Elemente-Software COMSOL Multiphysics© 5.0 realisiert. Die dafür nötigen Schritte werden in diesem Kapitel erläutert. Mit COMSOL Multiphysics© (ab hier COMSOL) können partielle Differentialgleichungen durch Anwendung der Finite-Elemente-Methode numerisch gelöst werden. Da für die Modellentwicklung die englische Variante der Software verwendet wurde, werden insbesondere für die Angabe der Einstellungen, aber auch wenn passend im weiteren Text, englische Begriffe verwendet. Eine graphische Benutzeroberfläche erleichtert die Implementierung. Diese ist neben den Leisten in vier Hauptbereiche unterteilt (Abb. 5). Im Model Builder werden einzelne nodes angelegt, die Definitionen, Geometrie, Physikalische Gleichungen etc. beinhalten. Deren Eigenschaften können im Settings-Fenster festgelegt werden. Das Graphics-Fenster zeigt den Modellaufbau und nach Durchlauf des Solvers die Ergebnisse. Im Nachrichten-Bereich wird eine Übersicht über den Fortschritt des Solvers und auftretende Probleme oder Fehler gezeigt.

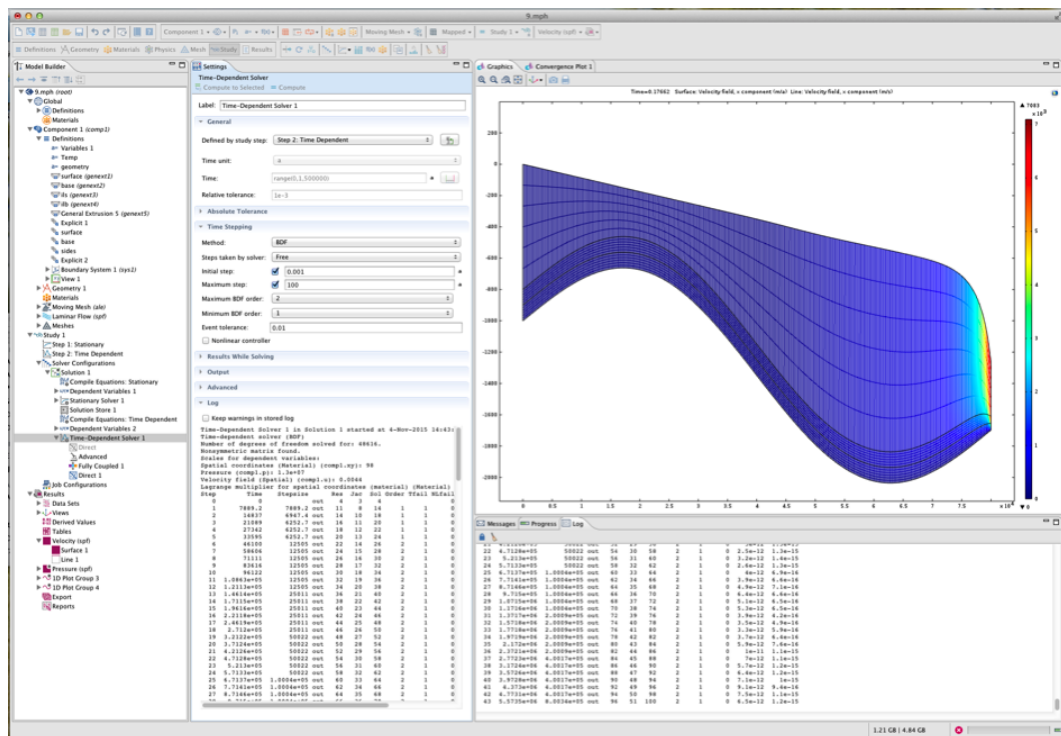


Abbildung 5: COMSOL Entwicklungs Oberfläche

Im Folgenden wird der Aufbau des ersten Modellexperiments beschrieben. Da der Fokus dieser Arbeit auf der Modellentwicklung lag, wurden viele Einstellungen später mehrmals verändert. Dies wird in Abschnitt 5 dokumentiert. Zusätzlich wird die Implementierung des Altersmodells hier übernommen (4.6), da dieses umfangreicher ist und unnötig Platz in den Ergebnissen belegen würde. Dieses wurde aber erst zu einem späteren Zeitpunkt verwendet.

## 4.1 Parameter

Parameter können in COMSOL sowohl global für das gesamte Modell, als auch lokal für einzelne Modellkomponenten bereitgestellt werden. Da dieses Modell aus nur einer einzigen Komponente besteht, können beide Speicherorte genutzt werden.

Für das Modell benötigte Parameter, die die Eigenschaften des Eises beschreiben, wurden im node *variables* definiert (Tab. 1). Ebenso wurden hier Angaben zur Modellgeometrie und Rechenhilfsmittel (Anzahl der Sekunden in einem Jahr) gespeichert.

Tabelle 1: Eiseigenschaften- und Geometrieparameter

Name	Ausdruck	Einheit	Beschreibung
A	$10^{-16}$	$Pa^{-3} * a^{-1}$	Rate-Faktor ohne Temperaturprofil
rho_ice	910	$kg * m^{-3}$	Dichte von Eis
g	9.81	$m * s^{-2}$	Erdbeschleunigung
n	3		Exponent im Glenschen Fließgesetz
spy	31556926		Sekunden pro Jahr
alpha	0.5	rad	Neigung des Eisblocks
L	40	km	Länge

Ein zweites Variablen-node wurde für die Viskosität sowie slip-Bedingung angelegt (Tab. 2). Durch ändern der E1- und E2-Parameter kann schnell und einfach die Viskosität des Modells verändert werden.

Tabelle 2: Viskositäts- und Gleitparameter

Name	Ausdruck	Einheit	Beschreibung
d	$\text{sqrt}((ux^2+0,25*(uy+vx)^2+1e-20)$	$s^{-1}$	effektive Deformationsrate
mu_E1	$0,5 * E1 * A^{-1/n} * d^{(1-n)/n}$	Pa*s	dynamische Eisviskosität 1
mu_E2	$0,5 * E2 * A^{-1/n} * d^{(1-n)/n}$	Pa*s	dynamische Eisviskosität 2
E1	1		Enhancement-Faktor 1
E2	3		Enhancement-Faktor 2
slip	$-(10^7 * (\text{abs}(-u * ny + v * nx) + \text{eps})^{m-1} * (u * -ny + v * nx)) * \text{test}(u * -ny + v * nx)$		Gleitbedingung

Im node *Temp* (Tab. 3) wurden die nötigen Parameter für ein einfaches Temperaturprofil definiert. Die Temperatur an der Eisoberseite wurde auf 253,15 K festgelegt. Die Temperatur der Unterseite liegt um 15 K niedriger. Über den Parameter T wurde ein quadratisches Temperaturprofil festgelegt, das über den Ratefaktor A in das Modell eingebaut wird.

Tabelle 3: Parameter des Temperatur-Profiles

Name	Ausdruck	Einheit	Beschreibung
surfacetemp	253,15	K	Oberflächentemperatur
A	$A_0 * \exp(-Q/(R * T))$	$Pa^{-3} * a^{-1}$	Ratefaktor mit Temperaturprofil
A_0	$\text{if}(T \leq 263,15, 3,985 * 10^{-13}, 1,916 * 10^3)$		
Q	$\text{if}(T \leq 263,15, 60000, 139000)$		Aktivierungsenergie
R	8,314	$J * mol^{-1}$	Gaskonstante
f	$15/(1000^2)$		Faktor
T	$(f * zs - \text{nojac}(y))^2 + \text{surfacetemp}$	K	Temperaturprofil

Um beispielsweise das Temperaturprofil anzulegen, sowie weitere Berechnungen durchzuführen, wurden general extrusions angelegt (Tab. 4), die eine Linie des Modells, wie z.B. die Eisoberseite, beschreiben und auch bei einer Deformation dieser Linie gültig bleiben.

Tabelle 4: Übersicht der general extrusions

Name	Beschreibung
zs	Eisoberseite
zb	Eisunterseite
H	zs-zb, Eisdicke
ils	obere Mitellinie
ilb	untere Mitellinie

## 4.2 Geometrie

Über die Geometrie wird das Kontinuum definiert. Den Grenzen können später gezielt Randbedingungen zugewiesen werden. Für die Modellentwicklung wurden zwei grundlegende Geometrien verwendet. Diese wurden möglichst einfach gehalten, um lange Rechenzeiten zu vermeiden.

In COMSOL gibt es neben der Möglichkeit eine beispielsweise in einem CAD-Programm erstellte Geometrie zu übernehmen, verschiedene einfache geometrische Körper, aus denen die gewünschte Form gebaut werden kann. Dies wurde für das vorliegende Modell durchgeführt.

Die erste Geometrie ist ein einfacher, geneigt liegender Eisblock (Abb. 6). Die Länge wird über den Parameter L auf 40 km festgelegt. Bei einem dreilagigen Modellaufbau werden vier Linien erstellt, die um den Faktor alpha gedreht sind. Diese Krümmung der Fläche erleichtert das Fließen von Eis. Diese Linien werden nun mit einem Rechteck umgeben. Das Eismodell ist 1000 m dick.

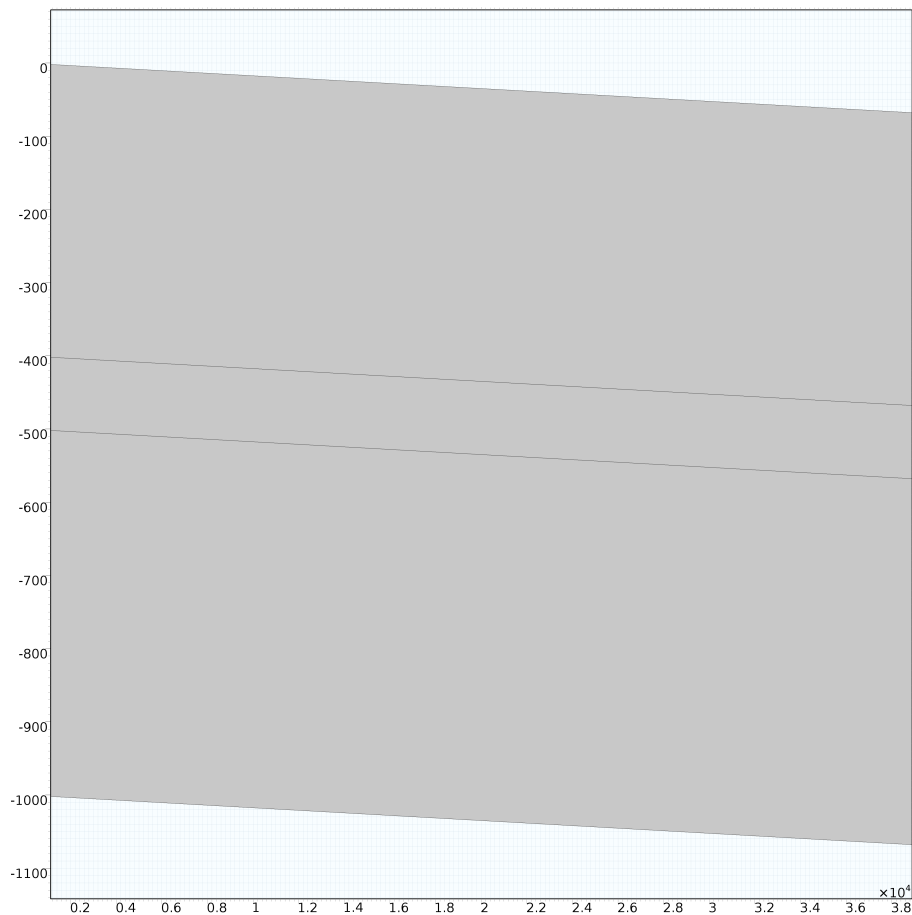


Abbildung 6: Erste Modellgeometrie, basierend auf Experiment D von ISMIP-HOM (Pattyn et al., 2008)

Es ist zu beachten, dass in COMSOL entgegen der Norm die Eisdicke als y-Richtung und nicht als z-Richtung bezeichnet wird. Dies ist voreingestellt und muss so hingenommen werden.

Die zweite Geometrie entspricht der ersten, hat aber eine veränderte, wellenförmige Unterseite, um das Fließen zu beschleunigen (Abb. 7).

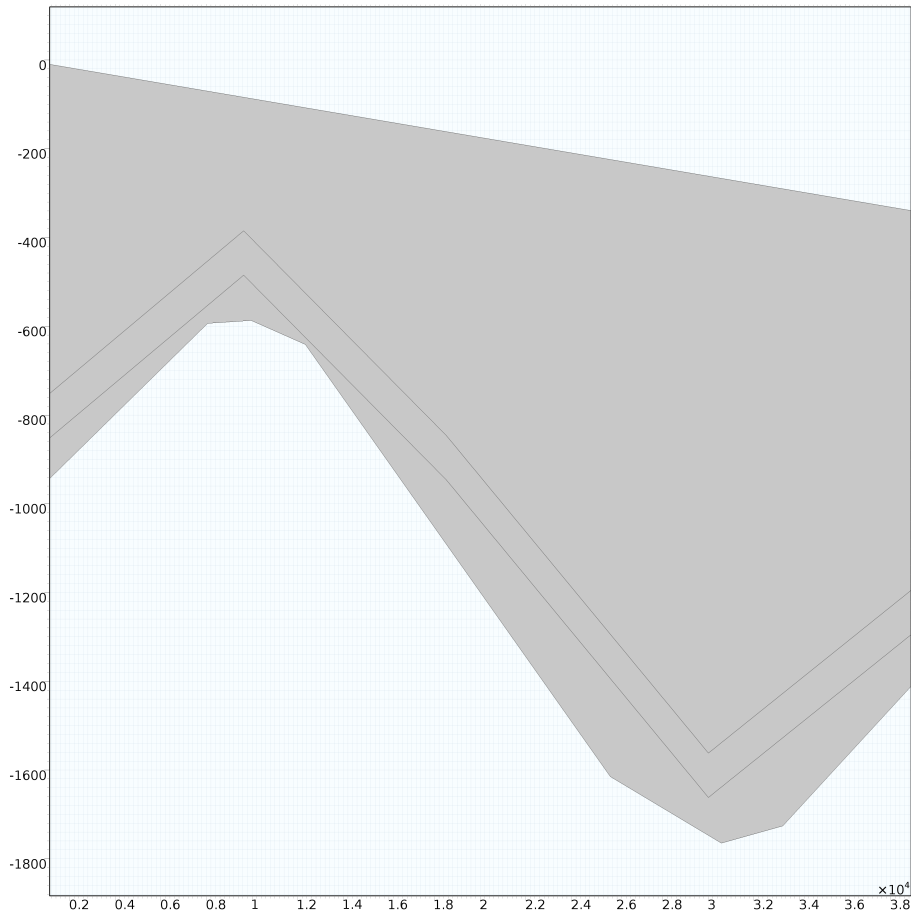


Abbildung 7: Zweite Geometrie, basierend auf Experiment B von ISMIP-HOM (Pattyn et al., 2008)

### 4.3 Arbitrary-Lagrangian-Eulerian-Methode

Um Veränderungen von sowohl der äußeren als auch der internen Geometrie erfassen zu können, wird die Arbitrary-Lagrangian-Eulerian-Methode (ALE) verwendet. Über diese kann vorgegeben werden, ob und wie sich einzelne Linien zu deformieren haben.

- Free Deformation 1: Das node zur freien Deformation wird auf die gesamte Eisfläche angewendet, unabhängig von der Anzahl an Lagen. Hierdurch kann sich jede einzelne Gitterzelle frei verändern.
- Prescribed Mesh Velocity 1: Über dieses node können einzelnen Linien unterschiedliche Deformationsgeschwindigkeiten vorgegeben werden. Für die mittleren Linien des Modells, wird in x-Richtung keine und in

y-Richtung die Geschwindigkeit

$$\frac{\partial y_{mesh}}{\partial t} = u * nx + v * ny$$

vorgegeben.

- Prescribed Mesh Velocity 2: Der Eisoberseite wird eine Geschwindigkeit von 0 in x-Richtung vorgegeben. In y-Richtung erhält sie die gleiche Geschwindigkeitsformel wie die mittleren Lagen. Je nach Modellversuch wird eine Akkumulationsrate von 0,5 m/a addiert.
- Prescribed Mesh Velocity 3: Die seitlichen Modellränder müssen fixiert bleiben ( $v_x = 0$ ) und dürfen sich gleichzeitig frei in y-Richtung bewegen, um ein Wachsen oder Schrumpfen des Eises darstellen zu können.
- Prescribed Mesh Velocity 4: Die Eisunterseite muss sowohl in x- als auch in y-Richtung fixiert bleiben. Daher werden beide Geschwindigkeiten als 0 vorgegeben.

#### 4.4 Laminar flow

Die Bewegung des Eises wird über das Laminar flow-node implementiert. Dieses beinhaltet den Navier-Stokes-Fluss. Unter Physical model wird für Eis incompressible fluid ausgewählt, so dass Stokes-Fließen modelliert wird. Es wird für die Geschwindigkeit und den Druck des Eises (u, v und p) gelöst. Unter *Consistent Stabilization* wird die *Streamline diffusion* deaktiviert. Zur Diskretisierung des Fluids wird unter *Discretization* P2+P1 ausgewählt. Dadurch wird der Geschwindigkeitsanteil mit quadratischen, der Druckanteil mit linearen Elementen gerechnet.

- Fluid properties 1: Über die *fluid properties* werden die Eisdichte und Viskosität eingestellt. Unter *fluid properties* -> *density* wird *user defined* eingestellt und rho\_ice eingegeben. Für die *dynamic viscosity* wird ebenfalls *user defined* gewählt und mu\_E1 eingegeben. Für einen drei-



lagigen Aufbau werden hier die obere und die untere Eisschicht angewählt.

- Fluid properties 2: Die Eisdichte der *Fluid properties 1* wird übernommen, die Viskosität auf `mu_E2` eingestellt. Als Anwendungsbereich wird die mittlere Eislage angewählt.
- Initial Values 1: Das Startfeld für die Geschwindigkeit sowie der Druck werden hier auf 0 gesetzt.
- Volume Force 1: Hier wird der Druck des Eises implementiert. Die wirkende Kraft  $F$  wird in x-Richtung auf 0, in y-Richtung auf  $\rho_{ice} \cdot g$  gesetzt.
- Periodic Boundary Conditions 1: Die periodischen Randbedingungen legen fest, dass Geschwindigkeit und Druck des Eises, das auf einer Seite aus dem Modell herausfließt, Geschwindigkeit und Druck des auf der anderen Seite hineinfließenden Eises entsprechen muss ( $u_{src} = u_{dst}, p_{src} = p_{dst}$ ). Als Druckdifferenz wird hier 0 eingestellt.
- Open Boundary 1: Die Eisoberseite wird als offene Grenze festgelegt. Dadurch darf sie sich frei verändern, was der im ALE vorgeschriebenen Veränderung durch Geschwindigkeit und Akkumulationsrate entspricht.
- Wall 1: Die Eisunterseite entspricht einer Wand. Um das Fließen des Eises zu unterstützen, wird eine slip-Bedingung implementiert, indem der Term den *Weak expressions* unter *Equation view* hinzugefügt wird.

## 4.5 Mesh

Unter der Gitter-Option können verschiedene Gitter angelegt werden, die später in den Solvern angewählt werden können. So können beispielsweise einzelne Modellkomponenten mit unterschiedlichen Gitterelementen belegt werden oder verschiedene Solver einer einzigen Komponente mit unterschiedlichen Gittern arbeiten.

Für das Eismodell wurden zwei unterschiedliche Gitter erstellt.

#### **4.5.1 Fine Triangular**

Zunächst wurde ein Gitter aus Dreieckselementen gewählt. Hierbei wurde der Bereich um die sich verändernden Mittellinien fein vernetzt, um die Bewegung gut darstellen zu können.

#### **4.5.2 Mapped Mesh**

Des Weiteren wurde ein Gitter aus Rechteckselementen angelegt. Dieses hat bei einer vergleichbaren Auflösung eine kürzere Rechenzeit, kann aber weniger genau um einzelne Bereiche verengt werden.

### **4.6 Study**

In diesem Bereich werden die Solver festgelegt, mit denen das Modell berechnet wird. Über einen stationären Solver wird in einem ersten Schritt das Startfeld des Modells bestimmt. Dieses wird danach von einem zeitabhängigen Solver weiter verwendet.

#### **4.6.1 Stationary Solver**

Für beide Solver können unabhängig voneinander einzelne Bestandteile des Modells ausgeschaltet werden. So löst der stationäre Solver nicht für die ALE, da hier noch keine Bewegung entsteht.

#### **4.6.2 Time Dependent Solver 1**

Der zeitabhängige Solver greift die Lösung des stationären auf und verwendet sie, um die Evolution des Eises über die Zeit zu berechnen. Dieser Solver kann auch in einzelne Teile gesplittet werden, bei denen beispielsweise in einem ersten Schritt für den laminaren Fluss und in einem zweiten Schritt für die ALE gelöst wird. Erst danach wird der nächste Zeitschritt für den laminaren Fluss berechnet.

Zu Anfang wurde festgelegt, das Modell über 50000 Jahre rechnen zu lassen bei einem maximalen Zeitschritt von 100 Jahren. Die Rechenzeit wurde

versuchsabhängig verändert und im Anhang dokumentiert.

## 4.7 Altersmodell

Das Altersmodell stellt eine andere Art dar, die Viskosität in das Modell zu integrieren. Hierbei wird zunächst wie vorher der stationäre Solver gestartet. Danach wird während des zeitabhängigen Solvers ein weiteres Feld erstellt, dass jedem Gitterpunkt ein Alter zuweist. Dieses zieht sich durch die Berechnung von oben nach unten durch das Modell. Während dieses Rechenschritts wird der Wert für E im gesamten Modell konstant gehalten. Nun wird einer Schicht mit einem bestimmten Alter ein anderer Enhancement-Faktor als den Schichten um sie herum zugewiesen. Anschließend wird ein dritter Solver hinzugefügt, der weiter zeitabhängig rechnet.

### 4.7.1 Variablen

Unter definitions wird ein neues Variablen-node  $Xi$  angelegt (Tab. 5).

Tabelle 5: Parameter für die Altersgleichung

Name	Ausdruck	Einheit	Beschreibung
mu_E1	$0,5 * E1 * A1^{-(1/n)} * d^{(1-n)/n}$	Pa*s	dynamische Eisviskosität 1
d	$\text{sqrt}((ux^2 + 0,25 * (uy + vx)^2 + 1e - 20)$	$s^{-1}$	effektive Deformationsrate
slip	$-(10^7 * (\text{abs}(-u*ny + v*nx) + \text{eps})^{m-1} * (u*ny + v*nx)) * \text{test}(u*ny + v*nx)$		Gleitgesetz
E1	$\text{if}(\text{nojac}(Xi) <= 800 * \text{spy} + t \ \&\& \ \text{nojac}(Xi) >= 600 * \text{spy} + t, 1, 3)$		Enhancement-Faktor

### 4.7.2 Convection-Diffusion Equation

Die Altersgleichung wird über eine Konvektions-Diffusions-Gleichung implementiert (Gudlaugsson et al., 2015). Als Einheit werden für abhängige Variable und Quellterm Jahre eingestellt.

- Convection-Diffusion Equation 1: Hier wird die allgemeine Konvektions-

Diffusions-Gleichung aufgestellt:

$$d_a \frac{\partial X_i}{\partial t} + \nabla(-c \nabla X_i) + \beta \nabla X_i = f$$

$c$  wird auf  $1e-13$ ,  $f$  und  $d_a$  1 gesetzt.

- Initial Values 1: Das Startalter des Modells wird auf 0 Jahre gesetzt. Dies erhöht sich durch den zeitabhängigen Solver.
- Zero Flux 1: Hier wird festgelegt, dass das Alter sich nicht von den seitlichen Rändern oder der Eisunterseite ausgehend ändern darf. Nur durch Akkumulation über die Eisoberseite kann das Alter der Eisschichten erhöht werden.
- Dirichlet Boundary Condition 1: Die Erhöhung des Alters wird über eine Dirichlet-Randbedingung an der Eisoberseite gesteuert.

#### 4.7.3 Time Dependent Solver 2

Wie oben beschrieben rechnet dieser Solver mit dem im ersten zeitabhängigen Solver erzeugten Altersfeld und neu eingestelltem Enhancement-Faktor weiter. Bei den Einstellungen der Solver muss beachtet werden, dass der erste zeitabhängige Solver nur für die unter *variables* definierten Variablen und nicht für die unter  $X_i$  löst, der zweite nur für  $X_i$  und nicht für *variables*.

## 5 Experimente und Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden zunächst wichtige Zwischenschritte auf dem Weg zum Modell beschrieben. Ein tabellarischer Überblick über die meisten Modellexperimente ab Mitte September 2015 findet sich in gekürzter Form im Anhang und in vollständiger Form auf dem beiliegenden Datenträger.

### 5.1 Verifikation

Zur Verifikation des Modells, wird Experiment D des Ice Sheet Model Intercomparison Project for Benchmark experiments for higher-order and full-Stokes ice sheet models (ISMIP-HOM) von Pattyn et al. (2008) herangezogen. An der Studie waren 28 internationale Modelle beteiligt. Es werden 2D- und 3D-Fälle mit unterschiedlichen Geometrien sowie stationären und zeitabhängigen Verhältnissen behandelt.

Experiment D beschreibt einen Eisblock von variierender Länge (5/10/20/40/80/160 km). Die Ober- und Unterseite sind wie folgt definiert:

$$z_b(x) = -x * \tan(\alpha)$$

$$z_s(x) = z_b(x) + 1000$$

wobei  $x$  die Länge und  $\alpha$  die Neigung des Eisblocks definiert. An der Basis wird ein Gleitgesetz festgelegt

$$\beta^2 = 1000 + 1000\sin(\omega x)$$

Die seitlichen Randbedingungen sind periodisch, was bedeutet, dass der Durchfluss auf beiden Seiten einander entspricht. Abb. 8 zeigt den schematischen Aufbau des Experiments.

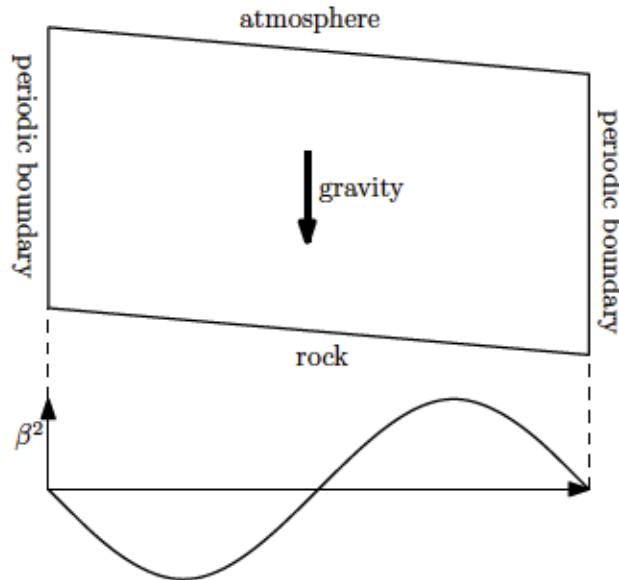


Abbildung 8: Geometrie, basaler Reibungskoeffizient und Grenzbedingungen von Experiment D von ISMIP-HOM (Beyer, 2014)

Es liegen stationäre Bedingungen vor. Abb. 9 zeigt die Geschwindigkeit des Modellaufbaus mit und ohne die über die Geometrie implementierten Eislagen. Der Enhancement-Faktor ist in beiden Fällen für den gesamten Modellbereich konstant. Der Vergleich zeigt, dass die Veränderung im Aufbau keinen Einfluss auf das Fließverhalten des Eises hat. ISMIP-HOM Experiment D wurde als Ausgangspunkt für das zu entwickelnde Modell gewählt. Dem Grundaufbau wurden zwei weitere Linien hinzugefügt, um die erste Geometrie zu erhalten. Für die zweite Geometrie wurde die Form der Eisunterseite wie in Kap. 3 beschrieben verändert.

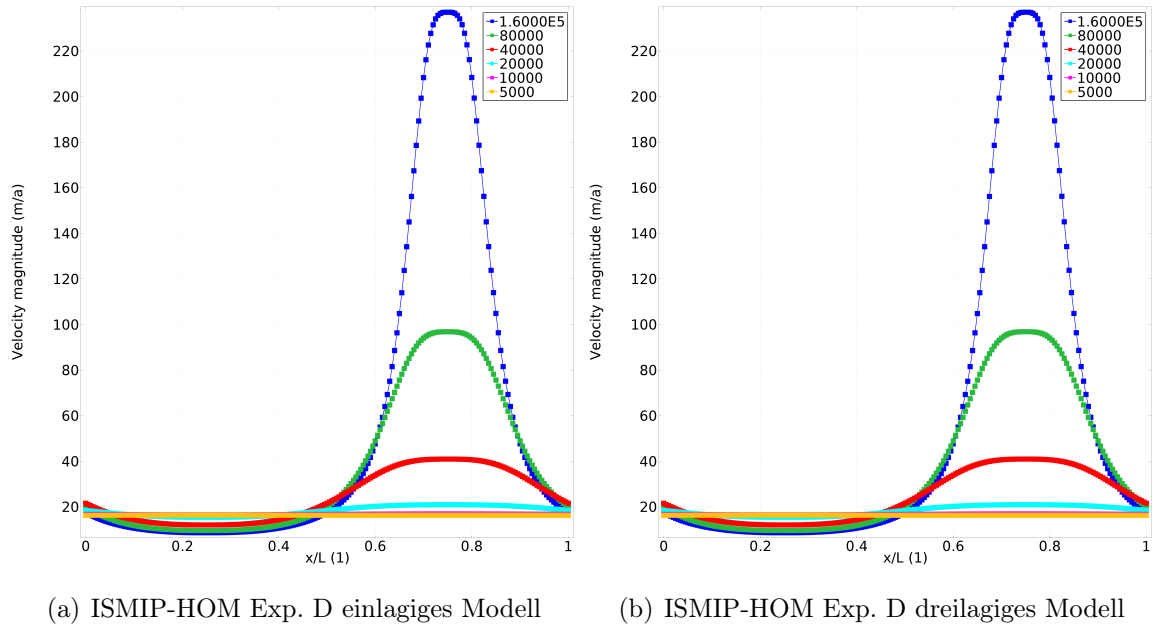


Abbildung 9: Vergleich der Geschwindigkeiten

## 5.2 Entwicklungsverlauf

Zu diesem allgemeinen Aufbau wurde eine Serie von Versuchsdurchläufen erstellt (Tab. 6), die mit steigender Nummer an Komplexität zunehmen. Die ersten drei Experimente nutzen die oben beschriebene Geometrie ohne Veränderung. Experimente 4-10 rechnen mit zwei Lagen, 11-15 mit drei Lagen. Die Experimente wurden zunächst in der genannten Reihenfolge durchgeführt, sodass die ersten Durchläufe als Versuche genutzt wurden, um allgemeine Probleme im Aufbau zu identifizieren. Es wird immer mit einem Versuch mit konstantem Wert für die Viskosität begonnen. Diesem folgt ein Versuch mit einer Formel für die Viskosität, die die konstanten Faktoren  $E_1$  und  $A$  enthält. Auf der dritten Stufe wird der Faktor  $A$  ebenfalls durch eine Formel ersetzt, die die temperaturabhängigen Faktoren  $A_0$  und  $Q$  enthält. Diese Experimente werden darauf mit zwei Lagen wiederholt, bei denen später unterschiedliche Werte  $E_1$  und  $E_2$  verwendet werden. Schließlich folgt ein Aufbau mit drei Lagen und unterschiedlichen Werten für  $E$ . In den ersten Experimenten ist aufgrund eines Fehlers im Modell die Viskosität noch mit höherem  $E$  für die mittlere Lage angegeben, wodurch diese härter wird und weniger schnell fließt. Dies wurde später geändert, sodass die mittlere

Lage einen niedrigeren Enhancement-Faktor aufweist, was einer weicheren Eisschicht entspricht. Für alle anfänglichen Experimente wurde Geometrie 2 verwendet.

Tabelle 6: Experiment-Überblick

	Nr.	Temperaturprofil	A	Viskosität	E
eine Lage	1	ohne	/	$10^{-14}$	/
	2	ohne	$10^{-16}$	mu_E1	1
	3	mit	$A_0 \exp(-Q/(RT))$	mu_E1	1
zwei Lagen	4	ohne	/	$10^{-14}$	/
	5	ohne	$10^{-16}$	mu_E1	1
	6	mit	$A_0 \exp(-Q/(RT))$	mu_E1	1
	7	ohne	$10^{-16}$	mu_E1, _E2	1 3
	8	mit	$A_0 \exp(-Q/(RT))$	mu_E1, _E2	1 3
	9	ohne	$10^{-16}$	mu_E2, _E1	3 1
	10	mit	$A_0 \exp(-Q/(RT))$	mu_E2, _E1	3 1
drei Lagen	11	ohne	/	$10^{-14}$	/
	12	ohne	$10^{-16}$	mu_E1	1
	13	mit	$A_0 \exp(-Q/(RT))$	mu_E1	1
	14	ohne	$10^{-16}$	mu_E1, _E2, _E1	1 3 1
	15	mit	$A_0 \exp(-Q/(RT))$	mu_E1, _E2, _E1	1 3 1

Als Beispiel des Ausgangsmodells wird in Abb. 10 das Modellergebnis von Experiment 15 nach 50000 Jahren gezeigt. Das Geschwindigkeitsfeld entwickelt sich in einer realistischen Form. Die untere Mittellinie liegt parallel zur Eisunterseite, während die obere im mittleren Modellbereich eine Ausbuchtung nach oben entwickelt, die sich über die Zeit nach rechts durch das Modell zieht und dabei weiter anwächst. Dies geschieht auch bei einem über den gesamten Modellbereich konstantem Enhancement-Faktor.

An dieser Stelle wurden abwechselnd Versuche mit trianguliertem sowie mapped mesh durchgeführt. Das triangulierte Gitter zeigte hierbei einen erhöhten Rechenaufwand bei gleichem Endergebnis, sodass schließlich nur noch mit dem mapped mesh gerechnet wurde.

Ein häufig auftretender Modellfehler bestand in invertierten Gitterelemen-



ten und einer deformierten Eisoberseite. Die periodischen Randbedingungen führten dazu, dass Gitterelemente an den seitlichen Rändern nach oben oder unten umknickten. Zum einen führte dies dazu, dass sich die mittleren Linien sehr eng zueinander sowie nach unten zogen und dort mit der Eisunterseite zusammenliefen. Zum anderen bewegten sich die Mittellinien mit teilweise unterschiedlicher Geschwindigkeit, sodass sie sich überschnitten oder mit Eisober- oder Eisunterseite kreuzten. Da dies durch Veränderungen im Gitter, im Zeitschritt und durch Fixierung der Linien nicht gelöst werden konnte, wurden diese Randbedingungen schließlich verworfen. Es folgte eine Testreihe weiterer Randbedingungen.

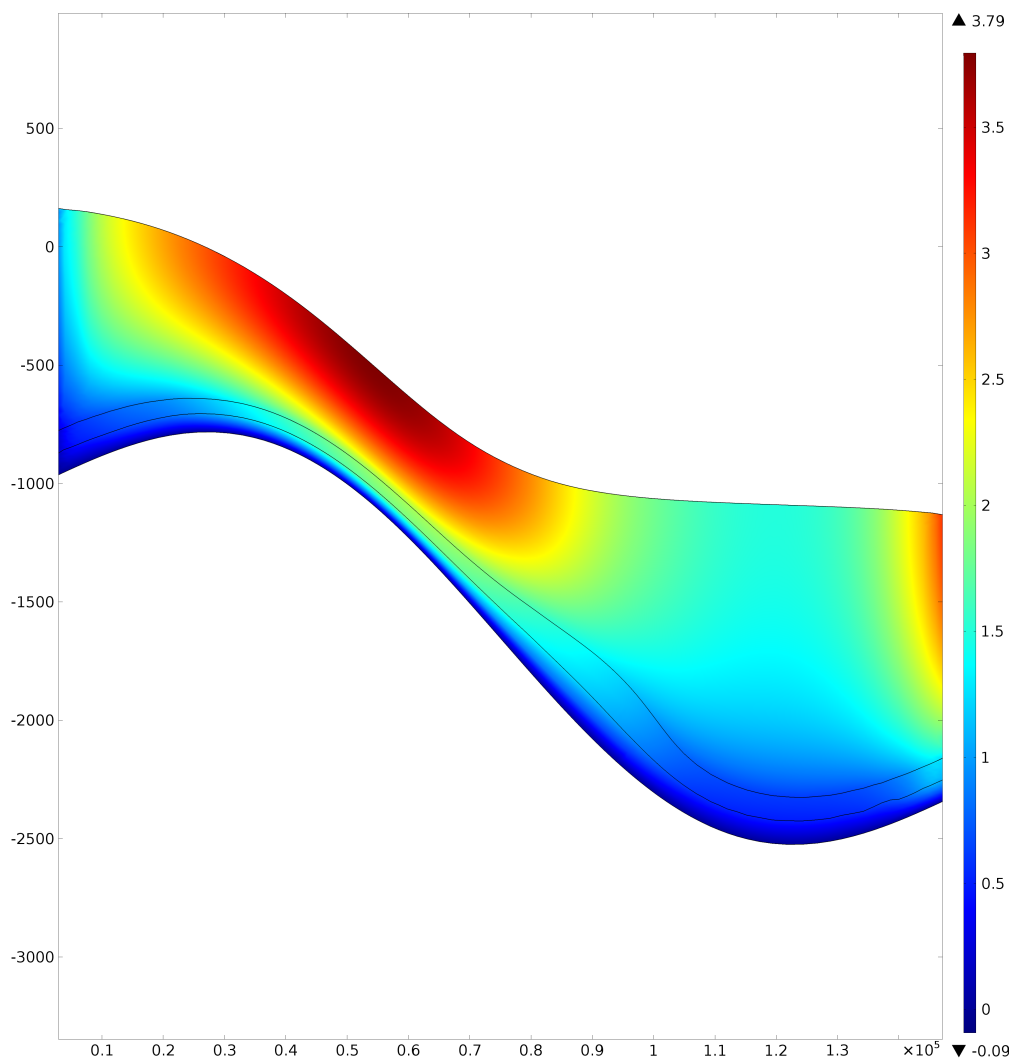


Abbildung 10: Experiment 1: Drei Lagen, periodische Randbedingungen

Zunächst wurde am linken Modellrand über eine Symmetrie-Bedingung

eine Eisscheide implementiert ( $u=0$ ) und am rechten Rand eine no slip-Bedingung. Abb. 11 zeigt einen zweilagigen Aufbau mit diesen Bedingungen. Das Problem der umgeknickten Randelemente konnte so beseitigt werden. Durch die no slip-Bedingung wurde das Eis jedoch am rechten Rand aufgestaut und konnte das Modell nicht mehr verlassen. So wuchs dieser Bereich stark an und das Geschwindigkeitsfeld erhielt sehr kleine Werte. Zudem ergab sich unabhängig von Enhancement-Faktor, Temperaturprofil oder Lagenanzahl immer das gleiche Modellergebnis.

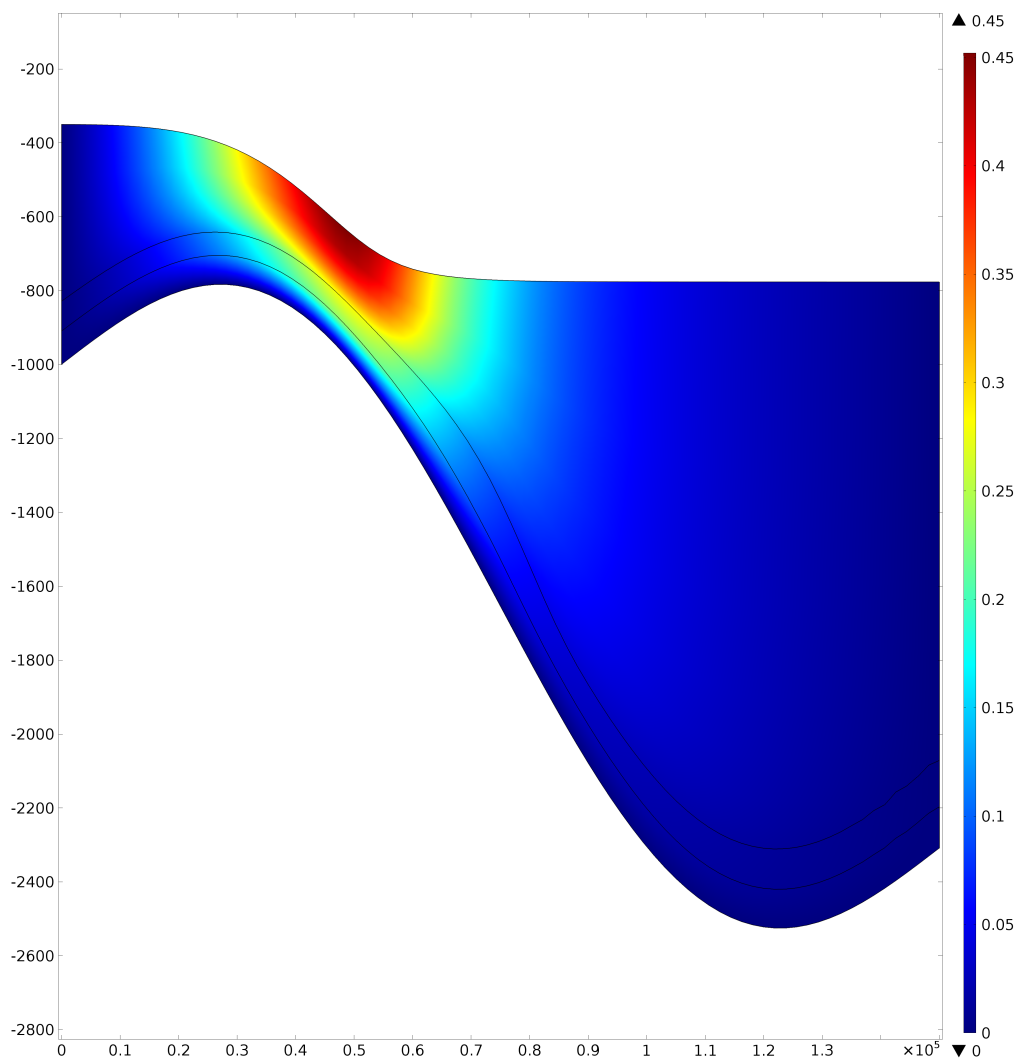


Abbildung 11: Experiment 2: Symmetrie-Bedingung am linken Rand, no slip-Bedingung am rechten

In einer längeren Testphase wurden die Inlet- und Outlet-Bedingungen verwendet. Dabei fließt eine über einen Inlet festgelegte Menge Eis in das Modell hinein, die über den Outlet wieder hinaus fließt. Die Flussmenge kann

z.B. als Geschwindigkeit oder als Druck vorgegeben werden und muss auch nicht für Inlet und Outlet konsistent sein. Ein Vorteil bestand in dem passenden Geschwindigkeitsfeld. Diverse Versuche mit unterschiedlichen Inlet- und Outlet-Bedingungen führten aber grundsätzlich zu invertierten Gitterelementen an mindestens einem der seitlichen Ränder sowie zu einer Deformation der Geometrie (Abb. 12). Die Randelemente knickten so stark um, dass sie je nach Einstellung nach unten oder oben aus dem Modellbereich hinausliefen. Hierfür konnte keine Lösung gefunden werden.

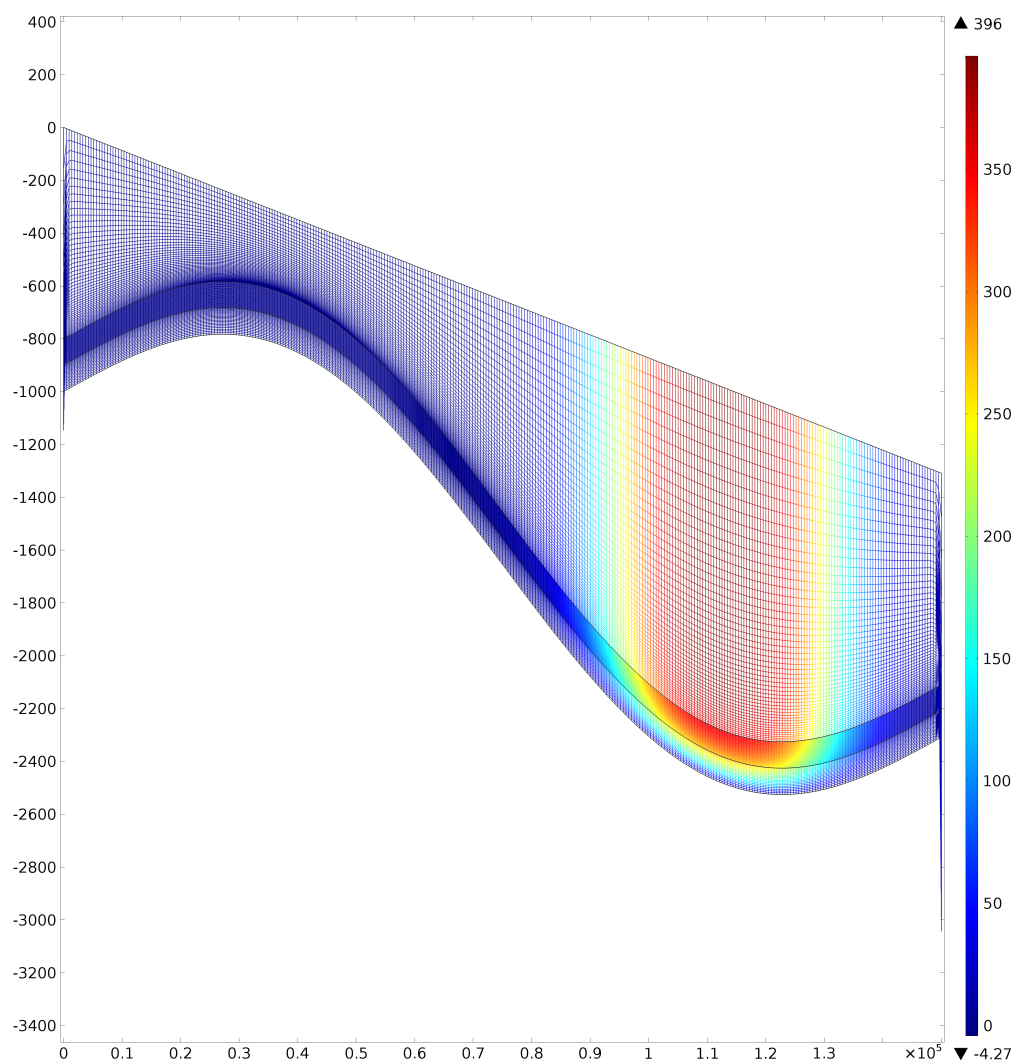


Abbildung 12: Experiment 3: Inlet- und Outlet-Randbedingungen

Der nächste Versuchsaufbau erfolgte wieder mit einer Eisscheide bzw. einer Symmetrie-Bedingung am linken Rand in Kombination mit einer open boundary am rechten Rand (Abb. 13). Dadurch konnte das Eis aus dem Mo-

dell hinausfließen, jedoch wurde durch die Eisscheide kein neues Eis nachgeliefert. Daher wurde eine Akkumulationsrate von 0,5 m/a addiert, um den Eisblock zu stabilisieren.

Ein Problem bei diesem Aufbau bestand darin, dass auch bei Verwendung einer Akkumulationsrate der Eisblock ausdünnte. Die Mittellage wurde dadurch bei weiteren Läufen aus dem Eisblock herausgeschoben, sodass die Berechnung abbrach.

Als ergänzender Lösungsansatz wurde daher die Berechnung des Modells in zwei Schritte aufgeteilt. Als erstes wurde das Modell als einlagiger Eisblock in den steady state gerechnet. Hierbei schrumpfte der Aufbau zusammen.

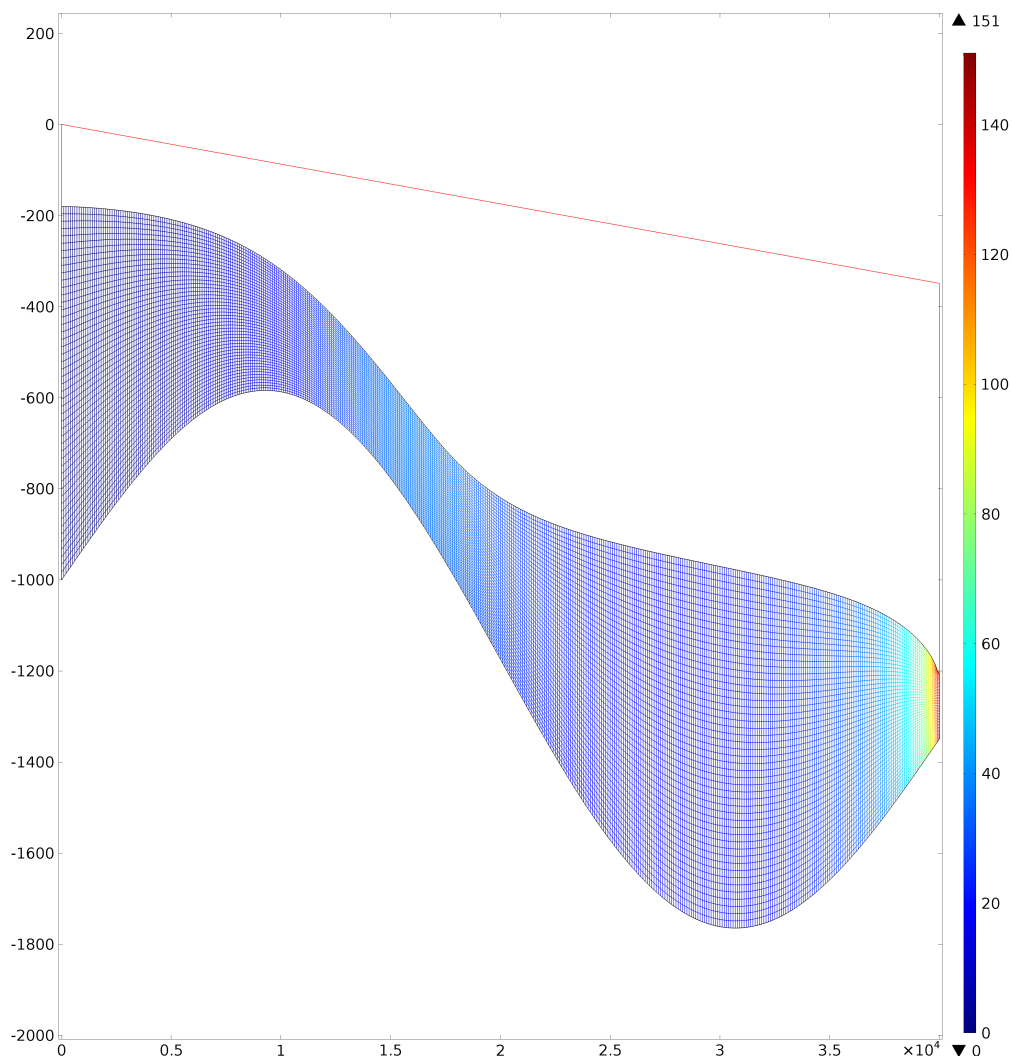


Abbildung 13: Experiment 4a: Symmetrie-Bedingung am linken Rand, open boundary am rechten; Modellauf mit konstantem Enhancement-Faktor und ohne zusätzliche Eislagen

Diese Geometrie wurde daraufhin in ein neues Modell exportiert und als Grundlage für den zweiten Rechendurchlauf verwendet (Abb. 14). Hier wurde das Modell über die Geometrie wieder in Lagen unterteilt. Die Lagen konnten nun so gewählt werden, dass sie während des Time Dependent Solvers nicht aus dem Modell hinausgeschoben wurden. Die Mittellage musste hierfür gegenüber früheren Experimenten verdünnt werden.

Im mittleren Modellbereich wird dieser Aufbau nun sehr dünn. Die Geschwindigkeit im rechten Bereich ist verglichen mit dem restlichen Modell sehr hoch, insgesamt fließt das Eis aber sehr langsam. Im rechten unteren Modellteil zeigt sich eine Welle, die sich von links nach rechts, beginnend an der absteigenden Seite des Eisunterseitenhügels durch das Modell zieht und die Mittellinien hinter sich Richtung Unterseite drückt, sodass diese immer enger zusammenlaufen. Dies erinnert an die Ausbuchtung bei den periodischen Randbedingungen.

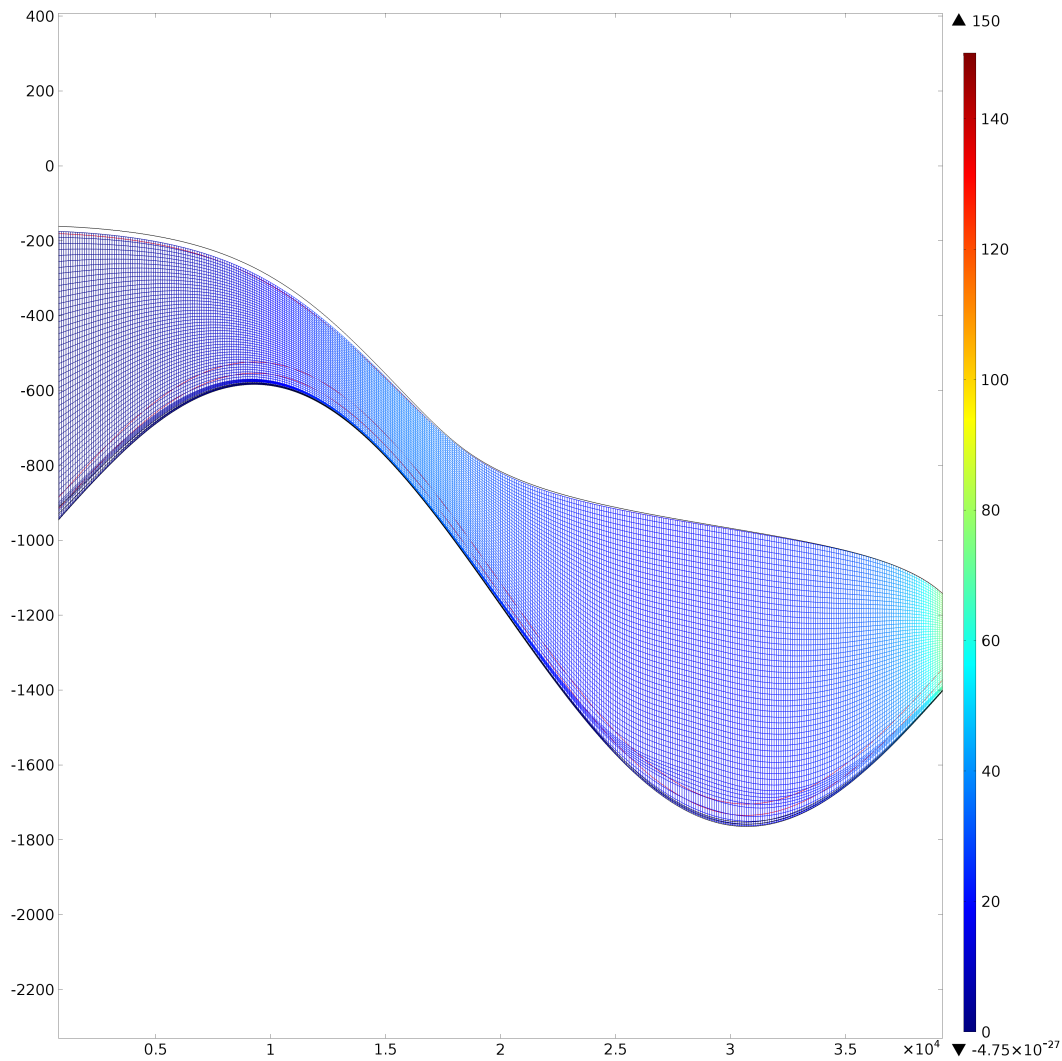


Abbildung 14: Experiment 4b: Schritt 2 zu Exp. 4a; Neuverteilung von Eislagen und Enhancement-Faktor

In einem nächsten Versuch sollte das Verfahren auf die Block-Geometrie angewendet werden. Hierzu wurde der gleiche Aufbau wie oben verwendet und die Unterseite entsprechend verändert. Dieser Modellaufbau ließ sich nicht in den steady state rechnen. An der rechten oberen Ecke, an der die beiden open boundaries zusammenlaufen, schrumpfte das Modell schneller zusammen, als das Gitter sich mitbewegen kann. Dadurch lief das Gitter aus dem Modell heraus und es entstanden invertierte Gitterelemente. Zudem zogen sich die Mittellinien am linken Rand nach oben, wodurch nach einer Weile wieder Oszillationen entstanden. Für diese Geometrie musste ein anderer Weg gewählt werden, sodass wie zuvor nur in einem Schritt gerechnet wurde und die Oszillationen zunächst hingenommen wurden (Abb. 15).

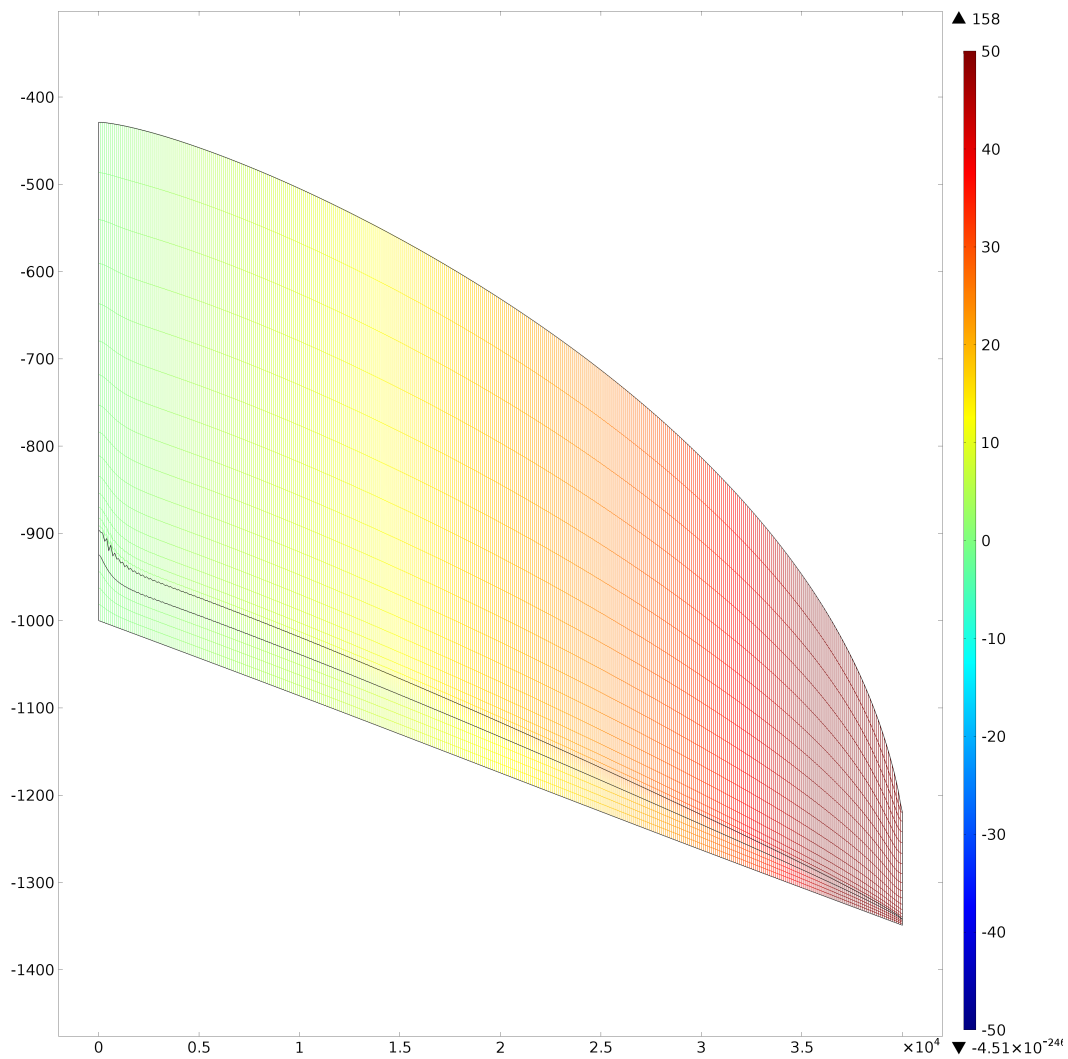


Abbildung 15: Experiment 5: Symmetrie- Bedingung am linken Rand, open boundary am rechten; Modell wurde wieder in einem Schritt gerechnet

Um die Möglichkeit, mit dem Modell Falten zu erzeugen zu testen, wurde in die Eisunterseite eine Erhebung eingefügt (Abb. 16). Es zeigte sich, dass die Eisschichten sich über dieser Stelle auftürmen und eine starke Veränderung in der Eisoberseite sichtbar wird. Ein Umknicken der Falten war jedoch nicht zu erkennen. Die Faltung in der Eisoberseite verschwindet, sobald das Eis über die Erhebung hinweg geflossen ist. Die Faltung in den Mittellinien zieht sich durch das Modell bis zum Rand und verschwindet dort.

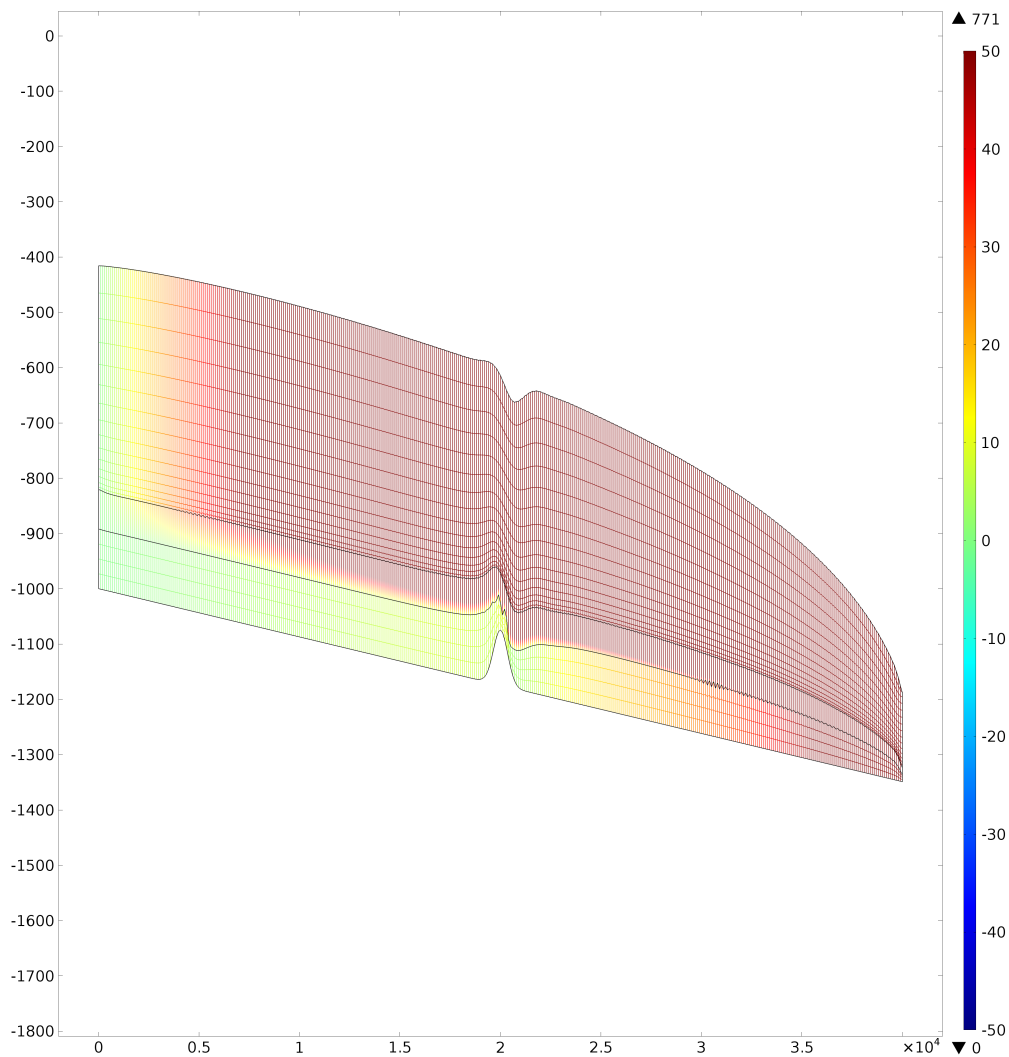


Abbildung 16: Experiment 6: Exp. 5 wurde eine Erhebung in der Eisunterseite eingefügt; diese sorgt für eine Faltenbildung; Oszillationen der Mittellinien treten weiterhin auf

Um die am Rand sowie durch die Faltung entstehenden Oszillationen zu entfernen, wurde die Anzahl der Elemente in x-Richtung auf 4000 erhöht. Dies entspricht einem Gitterpunkt alle 10 Meter. Das Modell in Abb. 17 unten hat ansonsten die gleichen Einstellungen. Es wird wie in der vorhergegangenen Abbildung als Gitter dargestellt, was jedoch durch die hohe Auflösung nicht mehr sichtbar ist. Sowohl am Rand als auch in der Nähe der Erhebung sind keine Oszillationen mehr sichtbar. Auch ist der Knick in der mittleren Lage am linken Rand nicht mehr vorhanden. Diese Auflösung scheint daher passend zu sein und wurde für weitere Modellläufe übernommen.



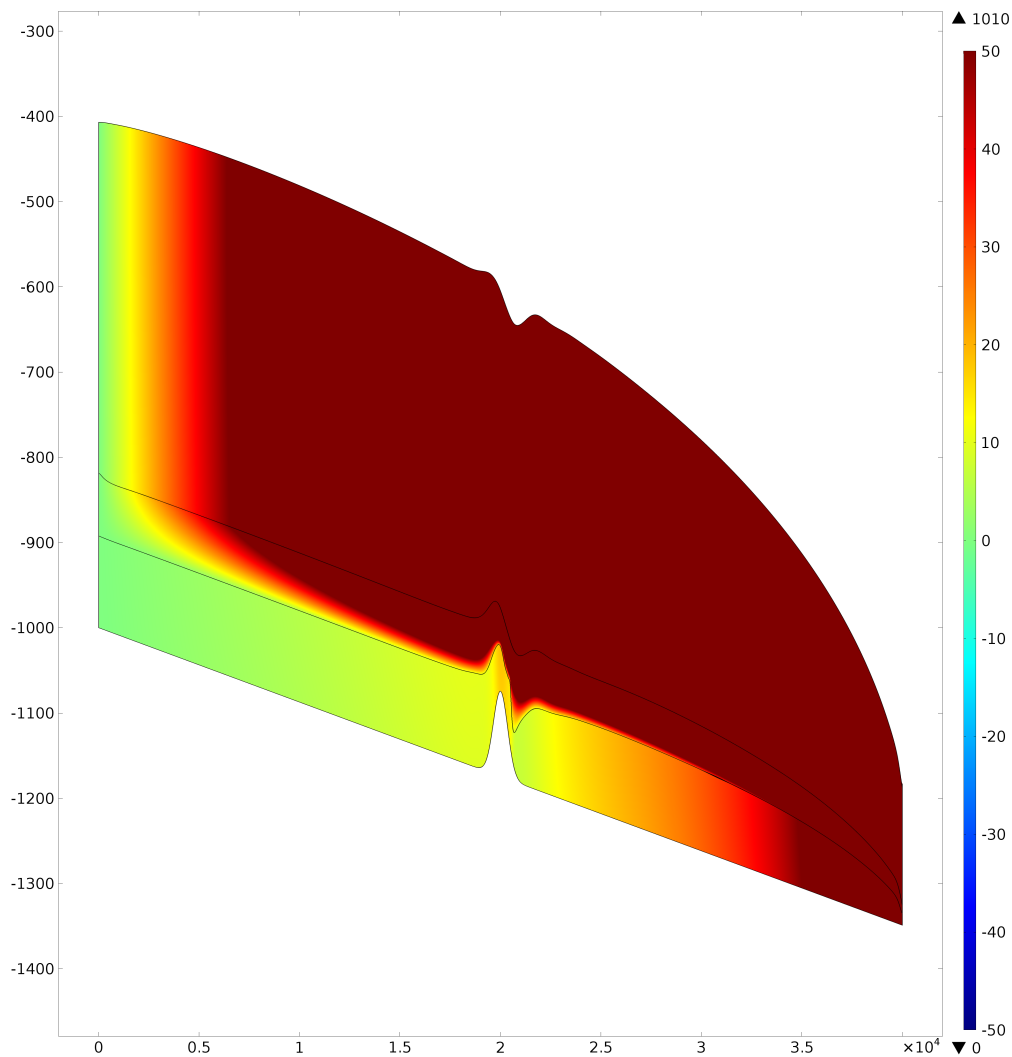
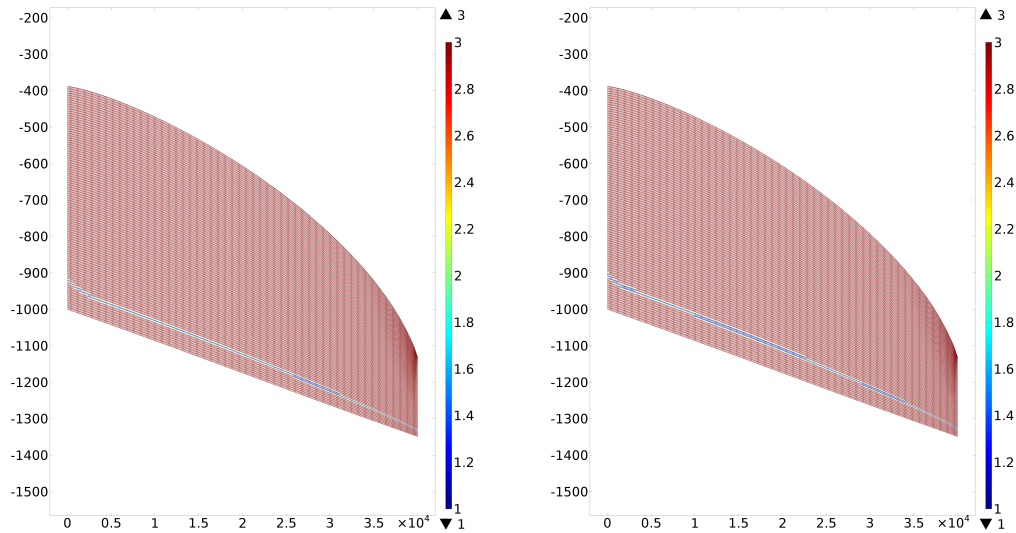


Abbildung 17: Experiment 7: eine verbesserte Auflösung gegenüber Exp. 6 entfernt die numerischen Fehler im Gitter

Da jedoch in den vorherigen Experimenten keine Faltung zu erkennen war, wurde in einem ganz neuen Ansatz als nächstes die Implementierung der Viskosität komplett verändert. Die Mittellinien, die das Modell über die Geometrie in Lagen aufteilen, werden entfernt. Stattdessen wird ein Altersmodell (4.7) hinzugefügt und ein zweiter Studien-Schritt eingebaut. Das Modell berechnet wie vorher zunächst den stationären sowie den ersten zeitabhängigen Solver. Dadurch werden Alter  $\xi$  über das Modell verteilt. Diesen werden nun über eine Funktion Werte für  $E$  zugewiesen.

In einem ersten Versuch wurden der 600-800 Jahre alten Lage, ein niedrigerer Enhancement-Faktor zugewiesen als dem umliegenden Eis. Die Auflösung wurde hier wieder höher gewählt. Abb. 18 zeigt den Vergleich von zwei Mo-

dellläufen, bei denen unterschiedliche Enhancement-Faktoren gewählt wurden. Dort ist kein Unterschied in der Form der Lage zu erkennen.



(a) Enhancement-Faktor oben und unten = 1, in der Mitte  $E = 0.25$       (b) Enhancement-Faktor oben und unten = 50, in der Mitte  $E = 1$

Abbildung 18: Experiment 8: Vergleich unterschiedlicher Enhancement-Faktor-Verteilungen zu ähnlichen Modellzeitpunkten

Ein anderer Ansatz dieses Aufbaus besteht darin, einem festgelegten Bereich einen anderen Enhancement-Faktor zuzuweisen. So wurde bei dem Modell in Abb. 19 der Bereich älter als 2000 Jahre auf  $E=0,1$  gesetzt, der Bereich jünger als 2000 Jahre auf  $E=1$ . Dadurch wird das Problem der verschwindenden Altersschicht gelöst.

Nach Änderung der Viskosität schrumpft dieses Modell zunächst um wenige zehner Meter, um schließlich um insgesamt etwa 200 m anzuwachsen. Der neue steady state wird damit nach etwa 2500 Jahren erreicht. Bereits vor Erreichen des steady state bilden sich kleinere Undulationen aus, die langsam von links nach rechts durch das Modell laufen. Diese verschwinden nach wenigen hundert Jahren wieder und kommen in einer Größenordnung ähnlich der Oszillationen aus Experiment 5 und 6 vor.

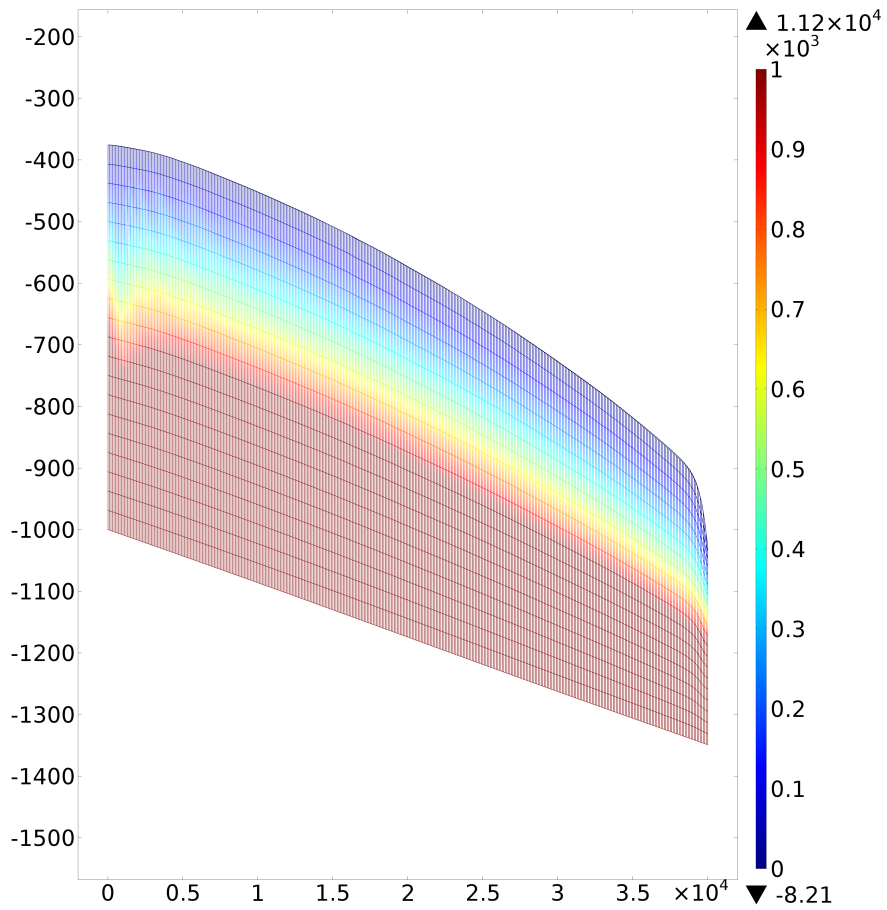


Abbildung 19: Experiment 9: Betrachtung des Altersbereichs von 0 bis 1000 Jahren;  
 leichte Oszillationen im linken Teil der Abbildung

## 6 Diskussion

Im Folgenden werden wichtige Parameter für die Modellentwicklung diskutiert. Ein großes Problem stellte das Finden geeigneter Randbedingungen dar, die sich weder negativ auf die Numerik noch auf die Beantwortung der Fragestellung auswirken. Die Wahl des Gitters und dessen Auflösung stellen den nächsten größeren Punkt dar. Des Weiteren werden das Spektrum des Enhancement-Faktors, die Implementierung der Viskosität, sowie Probleme bei der Faltenbildung und dem Verhalten der Geometrie behandelt.

### 6.1 Randbedingungen

Ein großes Problem stellte die Wahl der Randbedingungen des Modells dar. Hier wurde zunächst versucht, den Modellaufbau mit periodischen Randbedingungen zu lösen. Bei diesen fließt das Eis mit gleicher Geschwindigkeit und gleichem Druck auf der einen Modellseite hinein, wie es auf der anderen hinaus fließt. Die Position der Eislagen verändert sich über die Zeit nicht durch äußere Faktoren, wie Akkumulationsrate oder ein Fließen des Eises aus dem Modell heraus. Dieser Aufbau zeigte bei einfachen Modellläufen gute Ergebnisse. Gerade bei komplexeren oder höher aufgelösten Experimenten zeigten sich jedoch Schwachstellen.

Zacken in der Eisoberseite sowie an den Grenzflächen zwischen den einzelnen Eislagen deuten im Allgemeinen auf numerische Probleme hin. Ein Ansatz, diese zu beheben, besteht darin, das Gitter in x-Richtung zu verfeinern. Im Fall der periodischen Randbedingungen führte dies allerdings dazu, dass das Problem verstärkt wurde und der Modelllauf früher als vorher abbrach. Je höher aufgelöst das Gitter war, umso eher brach das Modell unter Angabe einer allgemeinen Fehlermeldung ab.

Ein weiteres Problem stellten Unregelmäßigkeiten in den Randbereichen des Modells dar (Abb. 20). Das Geschwindigkeitsfeld veränderte sich an dieser Stelle, wodurch die Randelemente umgeknickt wurden. Diese Zacken zogen sich in Form von Oszillationen weiter durch das ganze Modell.

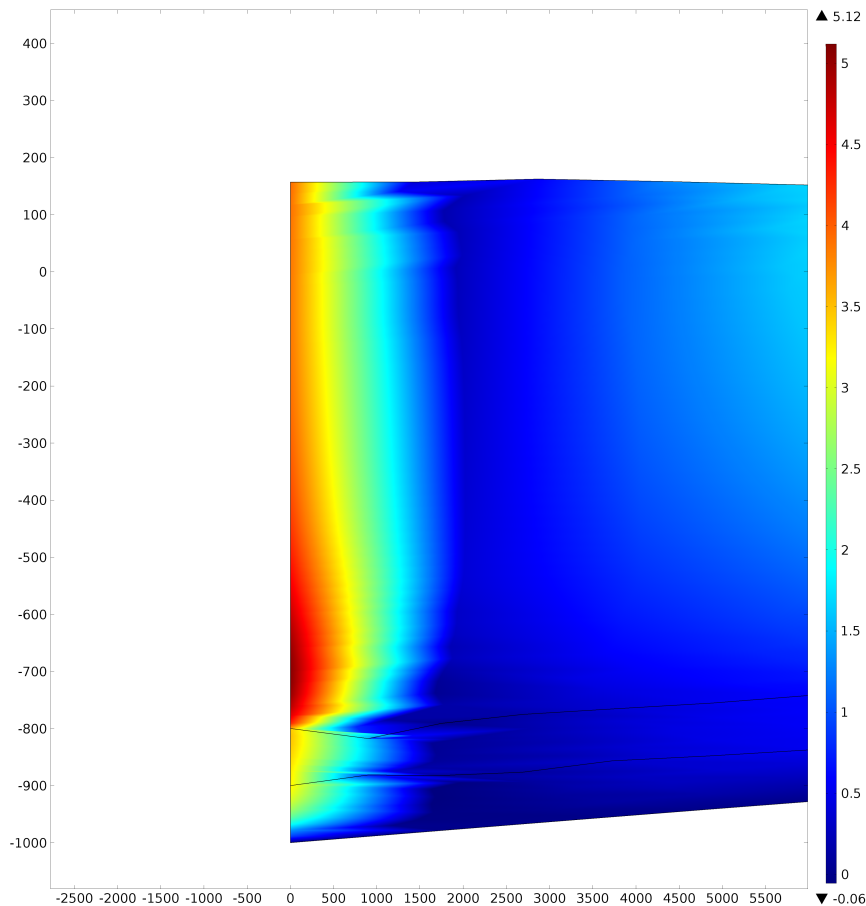


Abbildung 20: Unregelmäßigkeiten in der Geschwindigkeitsverteilung am linken Rand bei periodischen Randbedingungen

Die Kombination aus Symmetrie- und no slip-Bedingung hat den Vorteil eines passend verteilten, wenn auch zu langsamen Geschwindigkeitsfeldes. Zudem entstanden bei keinem der Versuche Oszillationen oder andere numerische Probleme. Da jedoch kein Eis aus dem Modell herausfließen konnte und die Geschwindigkeiten sehr niedrig waren, konnte es nicht weiter verwendet werden.

Als nächstes wurden Inlet- und Outlet-Bedingungen angewendet, die ein Fließen in das Modell hinein und aus dem Modell hinaus vorgeben. Hierbei kann der Fluss über eine Geschwindigkeit, einen Druck, einen Massefluss oder einen laminaren Fluss vorgeschrieben werden. Bei unterschiedlichen Einstellungen zeigte sich immer das gleiche Modellverhalten (Abb. 21). Wie auch bei den periodischen Randbedingungen knickten die Elemente an den seitli-

chen Rändern nach oben oder unten um. Über die Zeit wurden die Elemente hier aus dem Modell hinaus geschoben. Oszillationen konnten hier nicht entstehen, da die Berechnung vorher abgebrochen wurde.

Ein Lösungsansatz bestand darin, aus einem funktionierenden Aufbau mittels des *cutline*-Tools die Geschwindigkeitsprofile an den seitlichen Rändern eines Modells mit realistischem Geschwindigkeitsfeld zu extrahieren und diese als Inlet und Outlet-Bedingungen vorzugeben. Das Resultat bestand in noch stärker umgeknickten Randelementen.

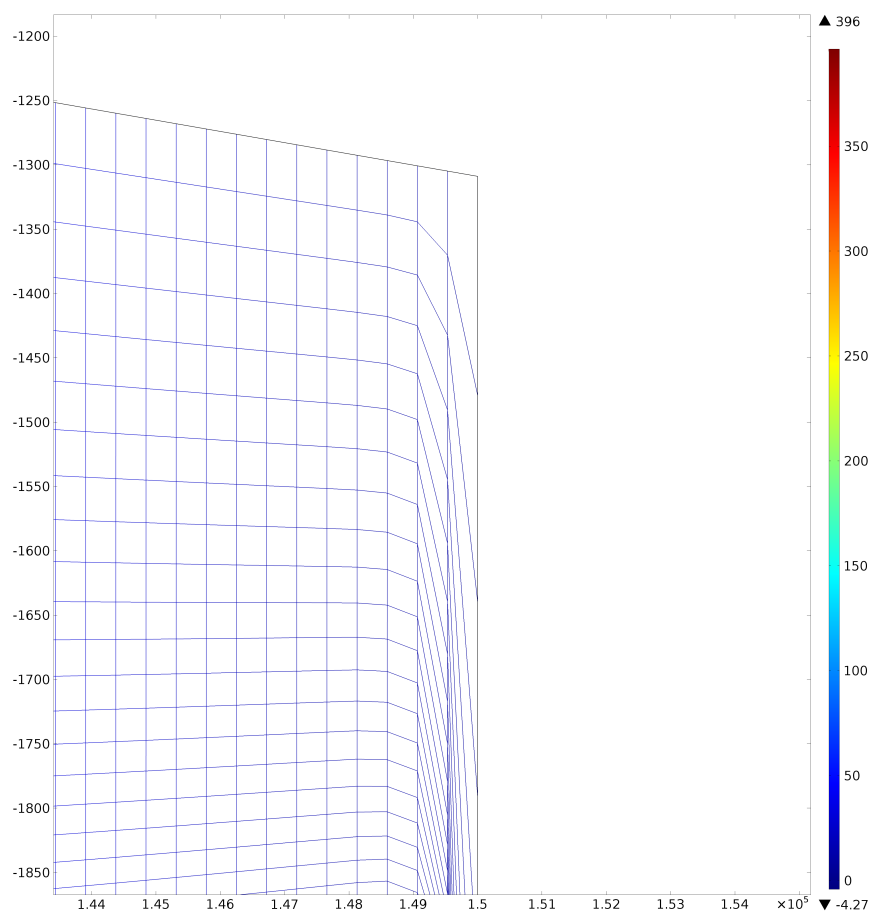


Abbildung 21: verzerrte Gitterelemente am rechten Rand (Exp. 3)

Die Kombination von Symmetrie auf der linken und open boundary auf der rechten Seite, sowie einer slip-Bedingung an der Eisunterseite, löst das Problem der Oszillationen, umgeknickten Randelemente und Zacken in der Eisoberseite. Unter Verwendung eines gut aufgelösten Gitters treten diese numerischen Probleme nicht mehr oder in vernachlässigbar kleiner Ausprägung auf.

gung auf. Dieser Aufbau ist ein Standard und realistisch für die Modellierung von Eisschilden.

Ein Nachteil dieses Ansatzes besteht darin, dass die oberste Eislage alle zwei Jahre um einen Meter anwächst, während das Eis an der Basis durch den Outlet aus dem Modell verschwindet.

## **6.2 Gitter**

Für das Modell wurden zwei unterschiedliche Gitterelemente verwendet und verglichen. Nach einer Festlegung auf eine Elementart wurde die Auflösung bestimmt.

### **6.2.1 Elemente**

Für den Aufbau des Gitters wurden als Elemente zunächst Dreiecke verwendet. Später wurden diese durch Rechtecke ersetzt (Abb. 22).

Dreieckselemente haben den Vorteil, dass ein weniger strukturiertes Gitter aufgebaut wird als mit Rechteckselementen. Dies bedeutet, dass beispielsweise das Gitter um den Raum der Begrenzungslinien der mittleren Eislage enger gezogen werden kann als zum oberen und unteren Rand. Dadurch kann der für die Modellbetrachtung relevante Bereich sehr genau modelliert werden, wobei gleichzeitig nicht unnötig Rechenzeit verbraucht wird, da ein Großteil der Modellfläche ein gröberes Gitter erhält.

Ein Nachteil der Dreieckselemente besteht darin, dass sie anfällig für numerische Probleme, wie invertierte Gitterelemente und unerwünschte Geometriedeformationen sind. Gerade am oberen Rand des Modells bildeten sich öfter mehr oder weniger kleine Zacken aus. Um diese zu entfernen muss die Elementanzahl in diesem Bereich deutlich erhöht werden, sodass der Rechenvorteil der Dreieckselemente negiert wird. Mit dem Mapped Mesh, das sich aus Rechtecken zusammensetzt, kann die Auflösung des Gitters in x- und y-Richtung unabhängig voneinander genau eingestellt werden. Dies hat den Vorteil, dass je nach Modelllauf die Rechenzeit angepasst werden kann. So lange keine numerischen Probleme wie die oben erwähnten Zacken auf-

treten, kann die Auflösung in x-Richtung relativ grob gewählt werden. Das gleiche gilt für invertierte Gitterelemente an den Rändern und die Auflösung in y-Richtung.

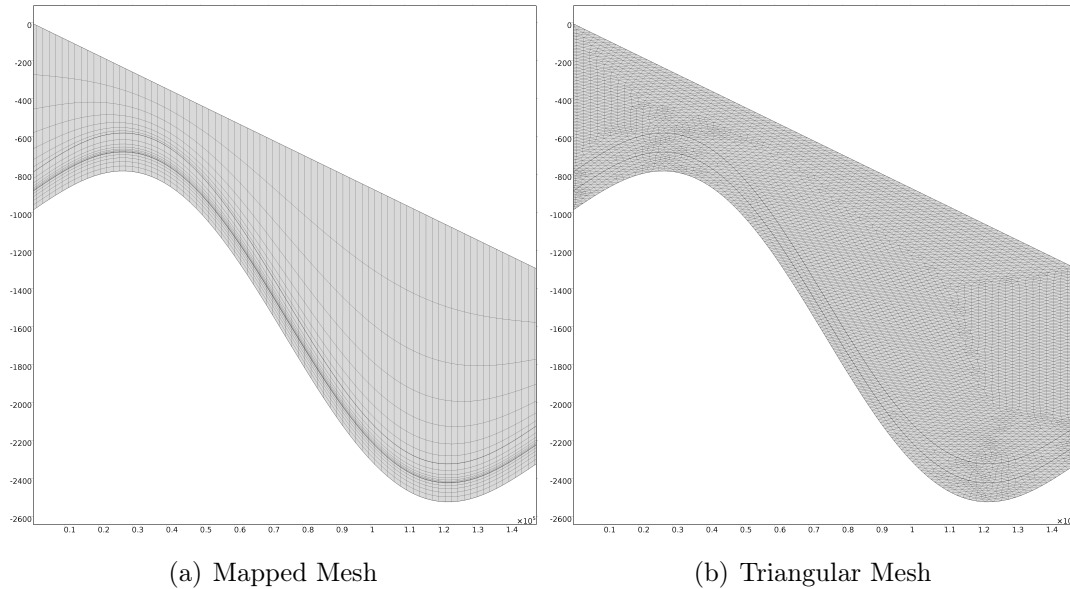


Abbildung 22: Vergleich der Verteilung von Rechtecks- und Dreieckselementen

### 6.2.2 Auflösung in x-Richtung

Um Testläufe durchzuführen wurde für die ersten Versuche ein grobes Gitter gewählt, um die Rechenzeit zu reduzieren und Probleme frühzeitig zu entdecken. Dies hat den Nachteil, dass durch ein grobes Gitter bedingte numerische Fehler, wie abgeknickte oder invertierte Elemente entstehen können. Treten diese nur lokal und in kleinem Maßstab auf, so stellen sie meist kein Problem dar und können zunächst vernachlässigt werden.

Ziehen sich abgeknickte Elemente aber in Form von Oszillationen durch das gesamte Modell oder entstehen Zacken in der Eisoberseite, so werden die Ergebnisse verfälscht und die Rechenzeit stark erhöht.

Es muss also zumindest für Testläufe ein Kompromiss zwischen einer zu niedrigen Auflösung, die Gitterprobleme verursacht und einer zu hohen Auflösung gefunden werden, da sonst in beiden Fällen unnötig viel Zeit zur Berechnung gebraucht wird.

Für die Modellläufe hat sich bei numerischen Problemen eine Auflösung von



einem Element je zehn Meter bewährt.

### 6.2.3 Auflösung in y-Richtung

Für die meisten Experimente wurde eine recht grobe Auflösung in y-Richtung gewählt, die je 100 m ein Element setzte. Dies kann an zwei Stellen zu Problemen führen.

Zum einen veränderte das Modell während der Läufe seine Höhe. Während das Modell in den steady state gelangte, schrumpfte es an der rechten oberen Seite sehr schnell. Das Gitter konnte sich hier nicht so schnell bewegen wie die Geometrie, sodass es sich aus dem Eisblock herausbewegte (Abb. 23). Je nachdem, wie früh im Lauf dies passierte, führte es zum Abbruch der Berechnung oder erhöhte nur die Rechenzeit.



Abbildung 23: invertierte Gitterelemente bedingt durch unterschiedliche Bewegungsgeschwindigkeiten von Eisoberseite und rechtem Rand

Dieses Problem konnte eingeschränkt durch eine gröbere Auflösung in

y-Richtung behoben werden. Sind weniger Elemente vorhanden, so rücken diese bei einer Modellverengung weniger schnell zusammen und bilden ein stabileres, dafür aber ungenaues Gitter.

Ein Nachteil dieser Methode besteht daher darin, dass das Gitter zu grob wird, um andere Strukturen aufzulösen. Zudem war es auch nicht immer hilfreich. Je schneller das Modell zusammenschrumpft, umso weniger Erfolg hat diese Lösung.

Zum anderen zeigten sich mit dem Einbau des Altersmodells Schwachstellen in der Auflösung. Abb. 24 zeigt das Modell nach der Implementierung der Schritte in Abschnitt 4.7. Der Alterslage zwischen 600 und 800 Jahren wird ein Wert von  $E=0.25$  zugewiesen, während die obere und die untere Lage einen Wert von  $E=1$  erhalten. Beobachtet man diese Darstellung während das Modell rechnet, so macht es den Eindruck, dass diese lückenhafte Lage langsam, den Elementen in x-Richtung folgend, von rechts nach links wandert, eine Gitterlage weiter unten wieder rechts auftaucht und dann erneut nach links wandert.

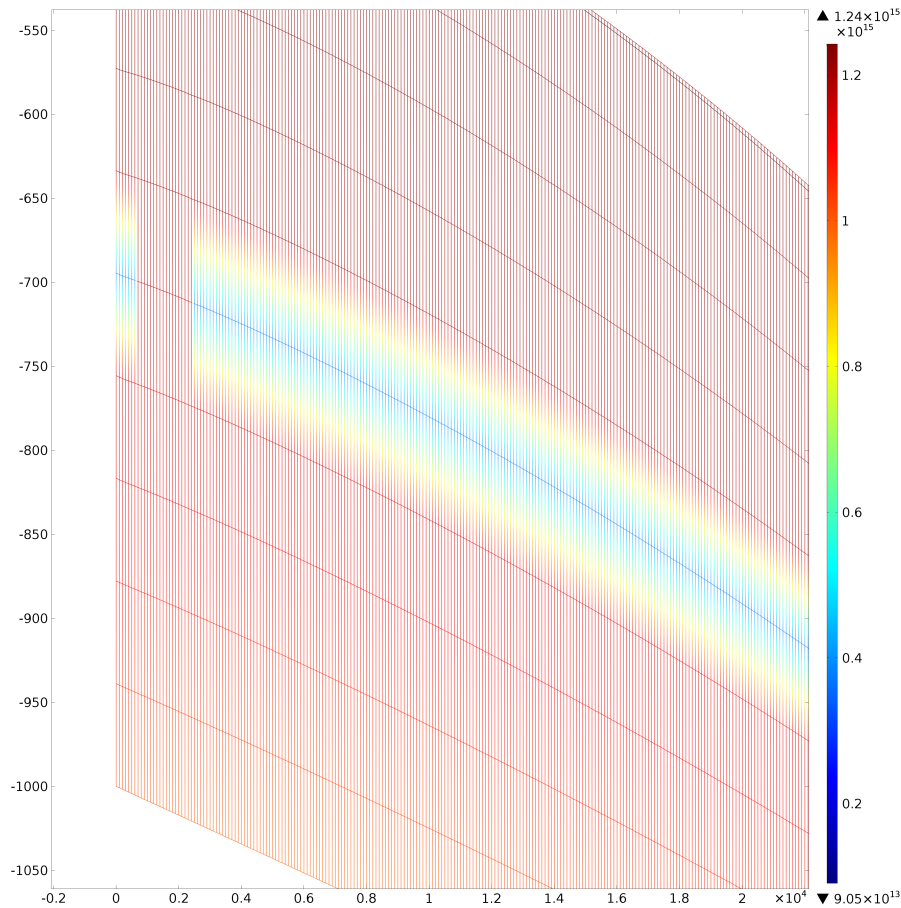


Abbildung 24: Lücke in der Horizontalausdehnung des geänderten Enhancement-Faktors bedingt durch zu niedrige Vertikalaufösung

Auf Abb. 24 ist dargestellt, dass das Altersmodell in der Vertikalenrichtung recht konsistent ist, während sich in der Horizontalrichtung leichte Abweichungen zeigen. Die Lücke in der Darstellung des Enhancement-Faktors ist also vermutlich auf ein Darstellungsproblem zurückzuführen und nicht auf Fehler in der Implementierung. Die Anzahl der Elemente wurde auf 100 erhöht, was einem Punkt alle 10 m und damit der Auflösung in x-Richtung entspricht. Die Darstellung verbesserte sich dadurch so weit, dass die Lage während der Berechnungen beinahe durchgehend lückenlos blieb. Je älter diese Lage wird, umso dünner wird sie, da das Eis durch den Outlet das Modell verlässt. Dadurch entstehen neue Lücken, da die Anzahl der Gitterelemente der Lage in y-Richtung abnimmt.

### 6.3 Spektrum des Enhancement-Faktors

Durch die Entwicklung des Modells sollte der Einfluss der Viskosität bei der Faltenbildung im Eis untersucht werden. Die Veränderung der Viskosität wird über den Enhancement-Faktor gesteuert.

Um die Grenzen des Modells im Umgang mit der Viskosität zu testen, wurde ein Parametric Sweep durchgeführt. Hierbei wurde auf den Grundaufbau des ISMIP-HOM Experiments D zurückgegriffen. Das Modell wird in drei Lagen unterteilt und nur der stationäre Zustand berechnet. Die obere und untere Eislage erhalten einen Wert von  $E1=1$ . Während des Parametric Sweep wird der Enhancement-Faktor  $E2$  der mittleren Lage langsam höher (Abb. 25) bzw. niedriger (Abb. 26) gewählt.

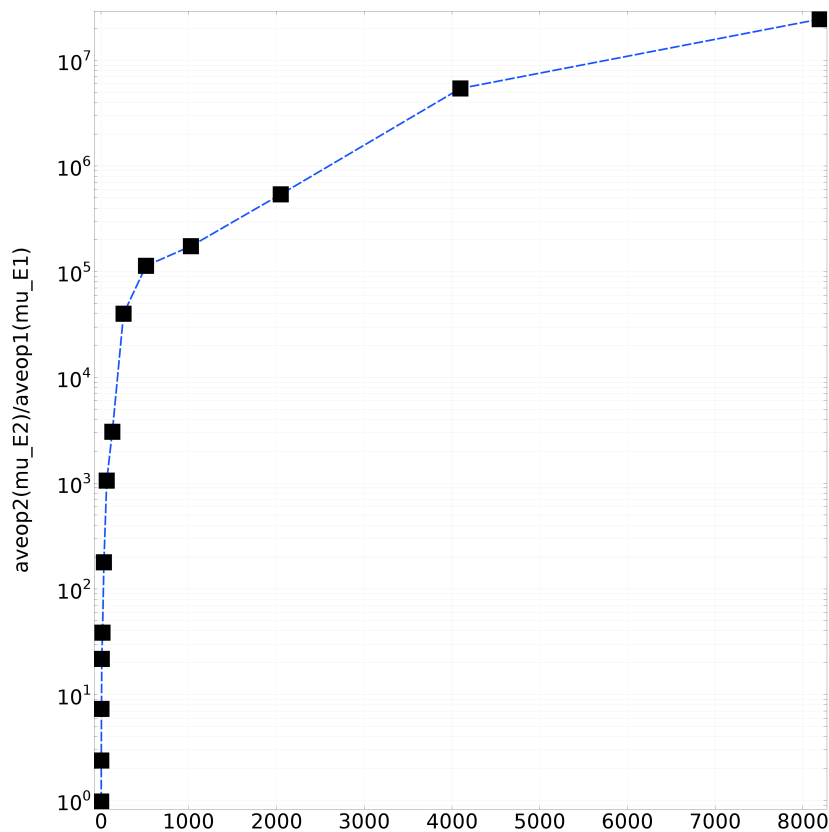


Abbildung 25: Durchschnitt von  $\mu_{E1}$  durch Durchschnitt von  $\mu_{E2}$  gegen den ansteigenden Enhancement-Faktor  $E2$

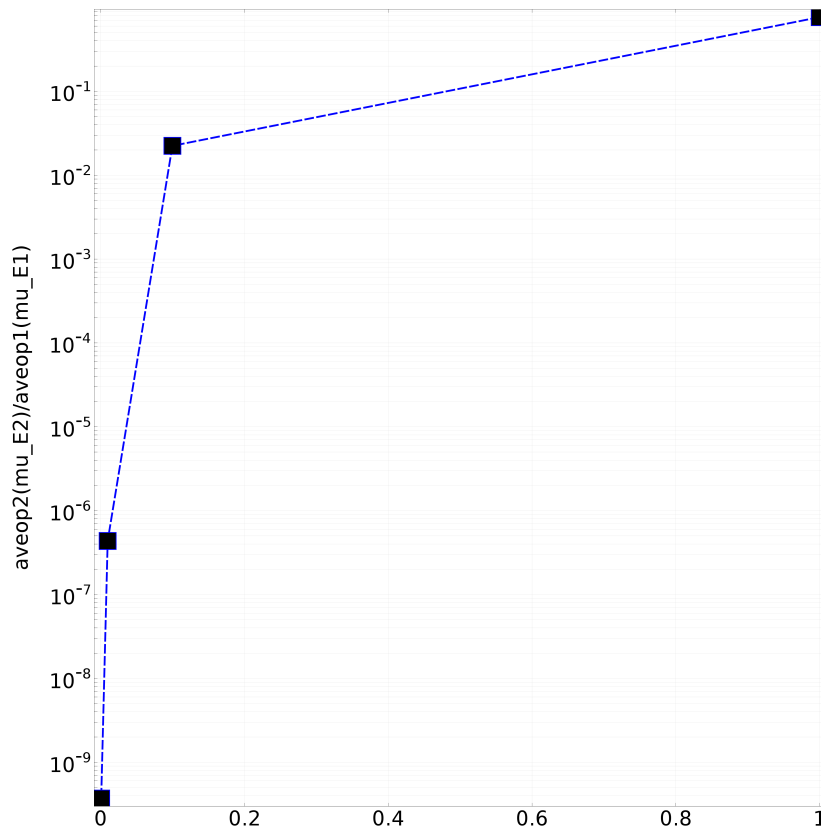


Abbildung 26: Durchschnitt von  $\mu_{E1}$  durch Durchschnitt von  $\mu_{E2}$  gegen den absteigenden Enhancement-Faktor E2

In Abb. 25 wird die mittlere Viskosität der Mittellage geteilt durch die mittlere Viskosität der umgebenden Lagen gegen den sich während des Parametric Sweep verändernden Faktor E2 auf einer logarithmischen Skala dargestellt. Die Werte für E2 beginnen bei 1 und steigen mit 2, 4, 8, 16, 32 etc. bis 8192 an. Ein Wert von 16384 kann nicht mehr verarbeitet werden. Das Modell bricht mit der Fehlermeldung ab, dass der relative Fehler größer als die relative Toleranz, die 0,001 beträgt, ist. Das Verhältnis der Viskositäten steigt bis zu einem Wert von 512 steil an, danach flacht sich die Kurve stark ab.

Abb. 26 zeigt den analogen Verlauf für abnehmende Werte von E2. Es wird wieder bei 1 begonnen und die Werte steigen in einer Reihe von 0,1, 0,01, 0,001 ab. Ein Enhancement-Faktor von 0.0001 kann bereits nicht mehr verarbeitet werden. Das Verhältnis der Viskositäten zueinander erreicht hier sehr schnell sehr kleine Werte.

## 6.4 Implementierung der Viskosität

Die Viskosität kann über verschiedene Wege in das Modell eingebaut werden. Zunächst wurde der Weg über die Geometrie gewählt, da dieser leicht umsetzbar war und keinen großen Rechenaufwand nach sich zog. Später wurde als Vergleich die Methode über eine Altersgleichung verwendet, um Nachteile der Geometrie-Methode zu umgehen.

### 6.4.1 Geometrie

Bei einer Implementierung über die Modellgeometrie wird ein Modell aus mindestens zwei Lagen aufgebaut und diesen im node *Laminar flow* über *Fluid properties 1, 2* unterschiedliche Enhancement-Faktoren zugewiesen. Dies hat neben einer leichten Umsetzbarkeit den Vorteil, dass keine weiteren Physics-nodes implementiert werden müssen, die die Rechenzeit erhöhen und eventuell dazu führen, dass der Time Dependent Solver in mehrere Schritte aufgeteilt werden muss.

Weitere Vorteile sind, dass die Lage mit abweichender Viskosität parallel zu den anderen Lagen, sowie zu Ober- und Unterseite des Eisblocks liegt, sodass kein Einfluss einer eventuellen Krümmung herrscht.

Bei den Modellen, die auf der zweiten Geometrie beruhen, zog sich eine Welle durch die Mittellinie(n). Diese entstand rechts neben dem Höhepunkt der Sine-Kurve als Ausbuchtung, die sich dann durch das Modell hindurch bis zum rechten Rand zog und dort verschwand. Dies trat sowohl bei periodischen Randbedingungen als auch bei einer Kombination aus Symmetrie- und no slip-Bedingung und einer Kombination aus Symmetrie und open boundary auf.

Bei der Kombination aus Symmetrie- und no slip-Bedingung war die Ausbuchtung kaum sichtbar, da das Modell durch das sich aufstauende Eis sehr hoch und dadurch auch sehr langsam wurde. Bei der Kombination aus Symmetrie und open boundary wurden links neben dieser Ausbuchtung die Linien nach unten gedrückt und liefen somit in Richtung der Eisunterseite, an die sie sich dicht anlegten. Dieses Verhalten ließ sich unabhängig von der Ver-

teilung der Viskositätswerte beobachten und führte dazu, dass über einen weiteren Weg der Implementierung nachgedacht wurde.

Der Unterschied der Bewegung der Linie(n) zwischen den periodischen Randbedingungen und der Symmetrie/open boundary-Kombination ergibt sich aus der Eisbewegung. Bei den periodischen Randbedingungen fließt das Eis auf der rechten Seite aus dem Modell hinaus und auf der linken wieder hinein, wodurch die Lage mit verändertem Enhancement-Faktor nicht durch diese Randbedingungen verändert wird. Im anderen Fall fließt Eis aus dem Modell heraus, dass über die Akkumulationsrate nachgeliefert wird. Dadurch wächst die obere Lage an und die untere(n) verschwinden langsam aus dem Modell. Diese Ausdünnung zeigt sich im Zusammenlaufen der Mittellinie(n) mit der Eisunterseite.

#### **6.4.2 Altersgleichung**

Werden die Viskositätsunterschiede altersabhängig in das Modell integriert, so muss zunächst ein weiteres Physics-node eingefügt werden. Dieses fügt eine Konvektions-Diffusions-Gleichung ein, die als Altersgleichung verwendet wird. Während des Time Dependent Solvers werden Alter über den Eiskörper verteilt, sodass danach einem bestimmten Altersbereich ein geänderter Enhancement-Faktor zugewiesen werden kann. Mit diesen Einstellungen wird dann weiter gerechnet. Für dieses Altersmodell wurden zwei unterschiedliche Ansätze getestet.

Zunächst wurde einer Alterslage in der Mitte ein anderer Enhancement-Faktor zugewiesen. Diese Lage alterte mit dem Modell weiter, sodass sie sich langsam nach unten bewegte, dabei ausdünnte und schließlich aus dem Modellbereich verschwand. Hier zeigt sich ein Nachteil der Randbedingungs-Kombination aus Symmetrie und open boundary. Die betrachtete Lage veränderter Viskosität kann nicht im Modell festgehalten werden.

In einem zweiten Ansatz alterte das Modell während des zweiten zeitabhängigen Solvers ebenfalls weiter. Die veränderte Eislage wurde dieses Mal so gewählt, dass der Enhancement-Faktor in einem Altersbereich wie z.B.  $>2000$

Jahre konstant blieb. Durch diesen Ansatz dünnte die Eisschicht nicht mehr aus und blieb im Modell. Ein großer Nachteil bei diesem Ansatz besteht dagegen darin, dass eine Veränderung der Isochronen kaum erfasst werden kann. Bei einem Viskositätsunterschied zwischen zwei Schichten treten an der Grenzfläche Reaktionen zwischen den Lagen (Reibung, Verzerrung) auf. Bei diesem Ansatz würde eine auftretende Veränderung in der Lagengeometrie dadurch negiert werden, dass der Bereich mit unterschiedlicher Viskosität älter wird, dadurch weiter nach unten wandert und den Enhancement-Faktor der unteren Schicht zugewiesen bekommt. So lange nicht in einem kleinen Zeitschritt eine große Veränderung entsteht, kann diese vom Modell nicht erfasst werden.

## 6.5 Faltenbildung

Das Geometrie-Modell zeigt neben der durchwandernden Ausbuchtung, die unabhängig von der Verteilung der Enhancement-Faktoren auftritt, keinerlei Ansatz zur Faltenbildung. Allerdings ist es dadurch, dass die Mittellinien mit der Eisunterseite zusammenlaufen, auch nicht möglich, eine Faltenbildung zu beobachten. Die Schicht mit veränderter Viskosität wird sehr dünn, sodass sie kaum Einfluss auf das Modell nehmen kann.

Ein großes Problem besteht darin, dass die Mittelschicht mit veränderter Viskosität sich nur über wenige tausend Jahre in dem Eisblock befindet. Die 600-800 Jahre alte Schicht verschwindet bereits nach 5000 bis 6000 Jahren völlig aus dem Modell. Über diesen kurzen Zeitraum hinweg lässt sich unabhängig von der Höhe des Viskositätsunterschiedes keinerlei Faltung ausmachen. Dazu kommt, dass, genau wie beim Geometrie-Modell, je tiefer die Schicht im Modell sinkt, sie umso dünner wird und so wieder das Problem mit der Auflösung in  $y$ -Richtung auftritt, bei der die Linie nicht mehr durchgängig sichtbar ist.

In den Experimenten 5 bis 8 werden die Eislagen am linken Rand nach oben gezogen. Dies ist auf den anfangs beschriebenen Raymond-Effekt zurückzuführen, der an Eisscheiden auftritt.



## 6.6 Verhalten der Geometrie

Ein häufig auftretendes Problem bei der Modellentwicklung waren Fehler im Verhalten der Geometrie, unabhängig von der Interaktion des Gitters mit der Geometrie. Zum einen bewegten sich die mittleren Linien unterschiedlich schnell in y-Richtung, sodass sie sich nach einigen Zeitschritten überkreuzten (Abb. 27). Zum anderen trat dieser Effekt der Geschwindigkeitsdifferenz auch an den Kreuzungspunkten der Eisoberseite mit den seitlichen Rändern auf.

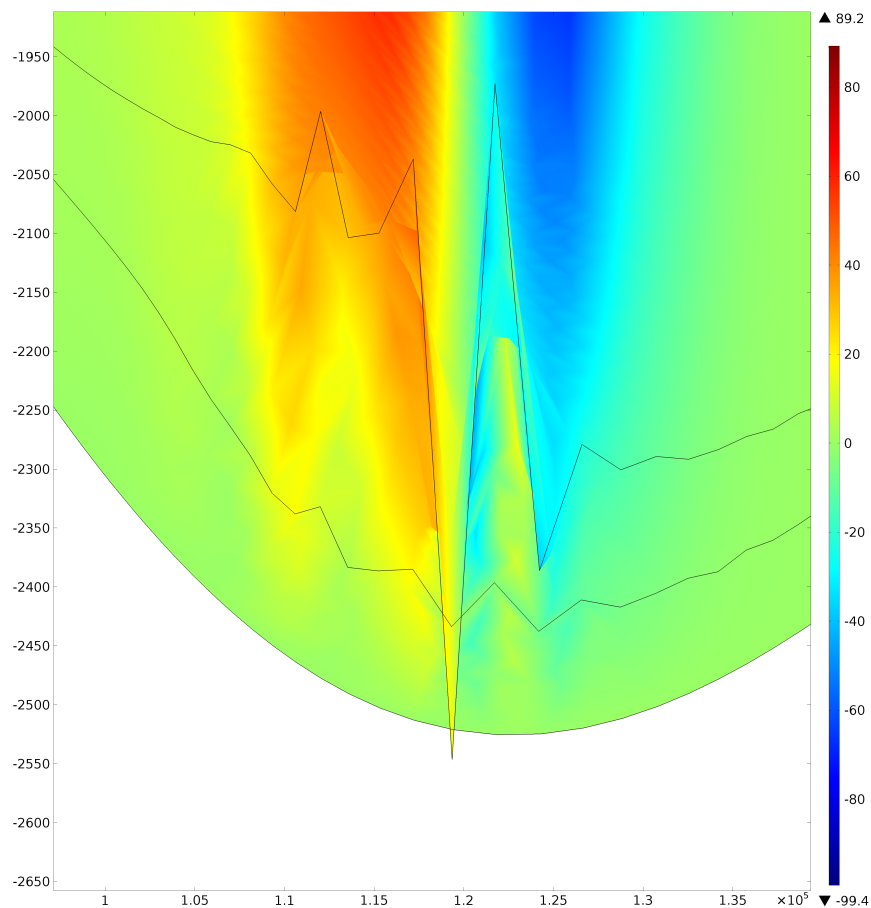


Abbildung 27: deformierte Geometrie aufgrund unterschiedlicher Vertikalgeschwindigkeiten der Grenzen zwischen den Eislagen

Für dieses Problem wurden drei Lösungsmöglichkeiten getestet:

- *Pointwise constraints*: In einem ersten Versuch wurden die Kreuzungspunkte der Mittellinien mit den Rändern festgehalten. Dadurch konnten

sie sich nicht mehr in  $y$ -Richtung entlang der Seitenränder bewegen und sich in Folge nicht mehr kreuzen. Ein großer Nachteil dieser Methode besteht darin, dass die Mittellinien sich nicht mehr frei bewegen können.

- *Prescribed Mesh Velocity*: Ein zweiter Ansatz bestand daher darin, in der *Prescribed Mesh Velocity* der Mittellinien festzulegen, dass die Geschwindigkeit auf 0 gesetzt wird, wenn die Linien sich zu nahe kommen. Dieses Vorgehen führte in einigen Fällen zum Erfolg.
- *Anpassung des Zeitschritts*: Die dritte Möglichkeit besteht darin, den Zeitschritt des Modells sehr klein einzustellen. So wird eine Überlapung der Linien, die aus invertierten Gitterelementen besteht, rechtzeitig erkannt. COMSOL geht dann auf den letzten erfolgreich gerechneten Zeitschritt zurück und berechnet den nächsten Schritt neu. Diese Methode kann bei kleinen Abweichungen hilfreich sein. Grundsätzlich erhöht sich die Rechenzeit durch die kleinen Zeitschritte sehr stark, sodass die zweite Methode bevorzugt wird.

## 7 Ausblick und Schlussfolgerung

Mit der Verbesserung radarfähiger Geräte konnten weiträumig verbreitete Undulationen in großen Teilen Grönlands und in der Antarktis festgestellt werden. Da diese sich sowohl direkt auf die Ergebnisse der Messungen an Bohrkernen als auch auf das Fließverhalten des Eisschildes auswirken, ist das Wissen über ihre Entstehung und Verbreitung bedeutsam.

In dieser Masterarbeit sollte ein Modell entwickelt werden, mit dem der Einfluss unterschiedlicher Viskositäten zwischen Eisschichten auf die Entwicklung großräumiger Falten untersucht werden kann. Als Mechanismus wurden dafür Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten betrachtet. Das mathematische 2D-Modell wurde aus drei Eislagen aufgebaut, denen über den Enhancement-Faktor unterschiedliche Viskositäten zugewiesen werden konnten.

Die Umsetzung des Modells zeigte einige Schwierigkeiten. So konnten die ursprünglich gewünschten Randbedingungen nicht implementiert werden. Es wurden weitere Randbedingungen getestet, die unterschiedliche Vor- und Nachteile aufweisen. Schließlich wurde eine Kombination aus Symmetrie und open boundary als passend betrachtet und auf dieser Grundlage das Modell weiterentwickelt.

Bei der Wahl des Gitters musste auf Dreieckselemente verzichtet werden, um numerische Fehler zu umgehen. Dies hat den Nachteil, dass das Gebiet um die Mittellinien herum nicht so eng wie gewünscht vernetzt werden kann, ohne die Gesamtzahl an Gitterelementen sehr hoch zu setzen. Das Mapped Mesh wurde aufgrund der verbesserten Rechenzeit sowie geringerer numerischer Probleme beibehalten.

Der Ansatz, die Eislagen zu verteilen, führt zu verschiedenen Problemen. Geschieht der Einbau über die Geometrie, ergeben sich numerische Probleme, die das Gitter und die Geometrie unerwünscht deformieren. Bei einer Implementierung über eine Altersgleichung gibt es zwei Ansätze. Erstens kann einer Schicht ein veränderter Enhancement-Faktor zugeordnet werden, die sich dann weiter über die Zeit verändert. Dies hat den Nachteil, dass die Schicht über die Zeit sehr dünn wird und aus dem Modell verschwindet.

Zweitens kann ein fester Altersbereich auf einem bestimmten Enhancement-Faktor festgehalten werden. Hierdurch werden langsam entstehende Grenzflächeneffekte jedoch wieder aufgehoben.

Mit den bisherigen Modellversuchen war es nicht möglich, alleine durch die Viskosität eine Faltenbildung zu erzeugen. Ein Experiment mit einer eingebauten Erhebung in der Eisunterseite zeigt, dass eine Faltung der Eislagen möglich ist, bisher jedoch keine Überkipfung erreicht wird, wie sie bei Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten entstehen. Auch extrem hohe Kontraste zwischen den Enhancement-Faktoren einzelner Schichten trugen nicht zu einer Faltenbildung bei.

Im Folgenden werden mögliche Faktoren genannt, mit denen das Modell weiterentwickelt werden kann.

Eine Möglichkeit bestände darin, die Akkumulation so vorzugeben, dass abwechselnd Eisschichten mit unterschiedlichen Viskositäten abgelagert werden und nicht wie im vorliegenden Modell eine Eisschicht zu einem großen Block wird, während alle weiteren zusammengedrückt werden (Geometrie-Modell mit Akkumulation) oder komplett das Modell verlassen (Altersmodell). So könnten mehrere zeitabhängige Solver hintereinander laufen, die jeweils abwechselnd weichere und härtere Schichten auf das Modell aufbauen, während die alten herausfließen.

Hilfreich wäre es, weiter mit periodischen Randbedingungen arbeiten zu können, um alte Schichten im Modell zu halten. Im November 2015 erschien eine neue Version von COMSOL©, die das Problem der invertierten Gitterelemente stark einschränken soll. Dadurch könnten weitere Testläufe mit einem Dreiecksgitter ausprobiert werden und periodischen Randbedingungen ausgeführt werden. Da diese in ausreichend hoher Auflösung längere Zeit rechnen als ein vergleichbares Mapped Mesh, müssten für diese Versuche mehrere Wochen eingeplant werden.

Ein weiterer Ansatz wäre es, das Modell den stationären sowie den ersten

zeitabhängigen Solver rechnen zu lassen, der das Altersmodell implementiert. Danach könnte eine Viskosität einem Alter zugewiesen und das weitere Altern des Modells unterbunden werden.

Wenn einer der eben genannten Ansätze umgesetzt wurde, könnten die ursprünglich in dieser Arbeit noch geplanten Experimente zu Viskositätsdifferenzen und Bodentopographie durchgeführt werden.

Für die Bodentopographie könnte die Einbindung der Erhebung in der Eisunterseite weiter betrachtet werden. Neben der horizontalen und vertikalen Ausdehnung könnte die Position entlang der x-Richtung eine Rolle spielen. Dabei könnte auch untersucht werden, wie viel Zeit bis zur anfänglichen Entstehung und daraufhin bis zur maximalen Entwicklung der Falten gebraucht werden.

Das Problem der Gitteranpassung bei einer internen Deformation des Gitters durch die Faltenbildung könnte durch ein Automatic Remeshing, also einem automatischen Neuaufbau des Gitters, versucht werden zu lösen. Hierbei wird während des Time Dependent Solvers nach jedem Zeitschritt überprüft, wie stark das Gitter deformiert ist. Überschreitet die Deformation einen festgelegten Wert, so wird das Gitter in diesem Abschnitt neu angepasst und mit dem neuen Gitter weitergerechnet. Während eine Verzerrung des Gitters mit dieser Methode sicherlich zu entfernen ist, muss überprüft werden, ob auch überkippte Falten dadurch abbildbar sind.

Um die Modellierung besser anwendbar auf das Grönländische Eisschild zu machen, muss dessen Dicke beachtet werden. Rund um die NEEM-Lokation ist die Eisschicht ca. 2,5 km dick. Eine solche Dicke ist durch die Symmetrie- und open boundary-Randbedingungen nicht zu erreichen, ohne die Akkumulationsrate unrealistisch hoch anzusetzen.

Da die Entstehung der Falten auf dreidimensionaler Ebene stattfindet, bestünde ein wichtiger Schritt in der Zukunft auch in der Einführung einer dritten Modellebene.

## 8 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich im Verlauf dieser Arbeit unterstützt haben. Besonderer Dank geht an

Angelika Humbert für die freundliche Betreuung während des gesamten Prozesses,

Martin Rückamp für die große Unterstützung im Umgang mit COMSOL,

Torsten Bickert für hilfreiche Hinweise bei der Ideen-Entwicklung und Planung.

Vielen Dank auch an meine Familie: Aurelia, Christel, Hannah, Jens, Rainer und Tjörn für die Unterstützung während meines gesamten Studiums und so manche nötige Ablenkung.

# Abbildungsverzeichnis

1	Dahl-Jensen et al., 2012 . . . . .	5
2	Radaraufnahme nordwestlich der NEEM-Lokation; einzelne, dunkle Linien werden als Isochronen interpretiert; die dicke, dunkle Linie stellt die Bodentopographie dar (Center for Remote Sensing of Ice Sheets, 2011; veröffentlicht von Dahl-Jensen et al., 2012) . . . . .	6
3	Schematische Darstellung von Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten ( <a href="http://www.brockmann-consult.de/CloudStructures">http://www.brockmann-consult.de/CloudStructures</a> ) . . . . .	10
4	links: Resultierender Scherwinkels an einem Eisblocks unter Scherspannung; rechts: Veränderung des Scherwinkels über die Zeit (Greve und Blatter, 2009) . . . . .	13
5	COMSOL Entwicklungsoberfläche . . . . .	17
6	Erste Modellgeometrie, basierend auf Experiment D von ISMIP-HOM (Pattyn et al., 2008) . . . . .	21
7	Zweite Geometrie, basierend auf Experiment B von ISMIP-HOM (Pattyn et al., 2008) . . . . .	22
8	Geometrie, basaler Reibungskoeffizient und Grenzbedingungen von Experiment D von ISMIP-HOM (Beyer, 2014) . . . . .	29
9	Vergleich der Geschwindigkeiten . . . . .	30
10	Experiment 1: Drei Lagen, periodische Randbedingungen . . . . .	32
11	Experiment 2: Symmetrie-Bedingung am linken Rand, no slip-Bedingung am rechten . . . . .	33
12	Experiment 3: Inlet- und Outlet-Randbedingungen . . . . .	34
13	Experiment 4a: Symmetrie-Bedingung am linken Rand, open boundary am rechten; Modellauf mit konstantem Enhancement-Faktor und ohne zusätzliche Eislagen . . . . .	35
14	Experiment 4b: Schritt 2 zu Exp. 4a; Neuverteilung von Eislagen und Enhancement-Faktor . . . . .	37

15	Experiment 5: Symmetrie- Bedingung am linken Rand, open boundary am rechten; Modell wurde wieder in einem Schritt gerechnet . . . . .	38
16	Experiment 6: Exp. 5 wurde eine Erhebung in der Eisunterseite eingefügt; diese sorgt für eine Faltenbildung; Oszillationen der Mittellinien treten weiterhin auf . . . . .	39
17	Experiment 7: eine verbesserte Auflösung gegenüber Exp. 6 entfernt die numerischen Fehler im Gitter . . . . .	40
18	Experiment 8: Vergleich unterschiedlicher Enhancement-Faktor-Verteilungen zu ähnlichen Modellzeitpunkten . . . . .	41
19	Experiment 9: Betrachtung des Altersbereichs von 0 bis 1000 Jahren; leichte Oszillationen im linken Teil der Abbildung . .	42
20	Unregelmäßigkeiten in der Geschwindigkeitsverteilung am linken Rand bei periodischen Randbedingungen . . . . .	44
21	verzerrte Gitterelemente am rechten Rand (Exp. 3) . . . . .	45
22	Vergleich der Verteilung von Rechtecks- und Dreieckselementen	47
23	invertierte Gitterelemente bedingt durch unterschiedliche Bewegungsgeschwindigkeiten von Eisoberseite und rechtem Rand	48
24	Lücke in der Horizontalausdehnung des geänderten Enhancement-Faktors bedingt durch zu niedrige Vertikalauflösung . . . . .	50
25	Durchschnitt von $\mu_{E1}$ durch Durchschnitt von $\mu_{E2}$ gegen den ansteigenden Enhancement-Faktor $E2$ . . . . .	51
26	Durchschnitt von $\mu_{E1}$ durch Durchschnitt von $\mu_{E2}$ gegen den absteigenden Enhancement-Faktor $E2$ . . . . .	52
27	deformierte Geometrie aufgrund unterschiedlicher Vertikalgeschwindigkeiten der Grenzen zwischen den Eislagen . . . . .	56



## Tabellenverzeichnis

1	Eiseigenschaften- und Geometrieparameter . . . . .	18
2	Viskositäts- und Gleitparameter . . . . .	19
3	Parameter des Temperatur-Profiles . . . . .	19
4	Übersicht der general extrusions . . . . .	20
5	Parameter für die Altersgleichung . . . . .	26
6	Experiment-Überblick . . . . .	31

## Literatur

- [1] COMSOL Inc (2015). *COMSOL Multiphysics*.
- [2] J. L. Bamber, J. A. Griggs, R. T. W. L. Hurkmans, J. A. Dowdeswell, S. P. Gogineni, I. Howat, J. Mouginot, J. Paden, S. Palmer, E. Rignot, and et al. A new bed elevation dataset for greenland. *The Cryosphere*, 7(2):499–510, 2013.
- [3] Sebastian Beyer. *Viscoelastic modelling of grounding line migration*. PhD thesis, 2014.
- [4] Dorthe Dahl-Jensen, MR Albert, Ala Aldahan, N Azuma, D Balslev-Clausen, M Baumgartner, A-M Berggren, Matthias Bigler, Thomas Binder, Thomas Blunier, et al. Eemian interglacial reconstructed from a greenland folded ice core. *Nature*, 493(7433):489–494, 2013.
- [5] John W Glen. The creep of polycrystalline ice. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 228, pages 519–538. The Royal Society, 1955.
- [6] Ralf Greve and Heinz Blatter. *Dynamics of ice sheets and glaciers*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [7] E Gudlaugsson, A Humbert, T Kleiner, J Kohler, and K Andreassen. The influence of a model subglacial lake on ice dynamics and internal layering. 2015.
- [8] G Hilmar Gudmundsson. Transmission of basal variability to a glacier surface. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978-2012)*, 108(B5), 2003.
- [9] Richard CA Hindmarsh, Gwendolyn J Leysinger Vieli, Mélanie J Raymond, and G Hilmar Gudmundsson. Draping or overriding: the effect of horizontal stress gradients on internal layer architecture in ice sheets. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface (2003-2012)*, 111(F2), 2006.

- [10] C Leuschen, PS Gogineni, C Allen, JD Paden, R Hale, F Rodriguez-Morales, A Harish, S Seguin, E Arnold, W Blake, et al. The cressis radar suite for measurements of the ice sheets and sea ice during operation ice bridge. In *AGU Fall Meeting Abstracts*, volume 1, page 02, 2010.
- [11] GJ Leysinger Vieli, RCA Hindmarsh, and MJ Siegert. Three-dimensional flow influences on radar layer stratigraphy. *Annals of Glaciology*, 46(1):22–28, 2007.
- [12] WSB Paterson. Why ice-age ice is sometimes soft: *Cold Regions Science and Technology*, 20(1):75–98, 1991.
- [13] Frank Pattyn. Ice-flow characteristics over a rough bedrock: Implications for ice-core interpretation. *Polar Meteorol. Glaciol.*, 16:42–52, 2002.
- [14] Frank Pattyn, Laura Perichon, A Aschwanden, Beate Breuer, Brigitte De Smedt, Olivier Gagliardini, G Hilmar Gudmundsson, Richard Hindmarsh, A Hubbard, Jesse V Johnson, et al. Benchmark experiments for higher-order and full stokes ice sheet models (ismip-hom). *The Cryosphere Discussions*, 2(1):111–151, 2008.
- [15] Charles F Raymond. Deformation in the vicinity of ice divides. *Journal of Glaciology*, 29(103):357–373, 1983.
- [16] Fernando Rodriguez-Morales, Sivaprasad Gogineni, Carlton J Leuschen, John D Paden, Jilu Li, Cameron C Lewis, Ben Panzer, Daniel Gomez-Garcia Alvestegui, Anup Patel, Kyle Byers, et al. Advanced multifrequency radar instrumentation for polar research. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 52(5):2824–2842, 2014.
- [17] Johannes Weertman. Sliding-no sliding zone effect and age determination of ice cores. *Quaternary Research*, 6(2):203–207, 1976.

Internetquellen:

Paperin, M.: Cloud Structures, <http://www.brockmann-consult.de/CloudStructures>, Stand: 30.11.2015

## 9 Anhang